I DATI INVALSI COME STRUMENTO PER MIGLIORARE LA DIDATTICA DELLA MATEMATICA NELLA SCUOLA PRIMARIA

IV Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca e la didattica"

a cura di
Patrizia Falzetti

FrancoAngeli
OPEN ACCESS

INVALSI

INVALSI PER LA RICERCA
STUDI E RICERCHE

INVALSI PER LA RICERCA

La collana Open Access INVALSI PER LA RICERCA si pone come obiettivo la diffusione degli esiti delle attività di ricerca promosse dall'Istituto, favorendo lo scambio di esperienze e conoscenze con il mondo accademico e scolastico.
La collana è articolata in tre sezioni: "Studi e ricerche", i cui contributi sono sottoposti a revisione in doppio cieco, "Percorsi e strumenti", di taglio più divulgativo o di approfondimento, sottoposta a singolo referaggio, e "Rapporti di ricerca e sperimentazioni", le cui pubblicazioni riguardano le attività di ricerca e sperimentazione dell'Istituto e non sono sottoposte a revisione.

ISBN 9788835125235

Il presente volume è pubblicato in open access, ossia il file dell'intero lavoro è liberamente scaricabile dalla piattaforma **FrancoAngeli Open Access** (http://bit.ly/francoangeli-oa).

FrancoAngeli Open Access è la piattaforma per pubblicare articoli e monografie, rispettando gli standard etici e qualitativi e la messa a disposizione dei contenuti ad accesso aperto. Oltre a garantire il deposito nei maggiori archivi e repository internazionali OA, la sua integrazione con tutto il ricco catalogo di riviste e collane FrancoAngeli massimizza la visibilità, favorisce facilità di ricerca per l'utente e possibilità di impatto per l'autore.

Per saperne di più:
http://www.francoangeli.it/come_pubblicare/pubblicare_19.asp

ISBN 9788835125235

I DATI INVALSI COME STRUMENTO PER MIGLIORARE LA DIDATTICA DELLA MATEMATICA NELLA SCUOLA PRIMARIA

IV Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca e la didattica"

a cura di
Patrizia Falzetti

INVALSI

FrancoAngeli
OPEN ACCESS
ISBN 9788835125235

Le opinioni espresse nei lavori sono riconducibili esclusivamente agli autori e non impegnano in alcun modo l'Istituto. Nel citare i contributi contenuti nel volume non è, pertanto, corretto attribuirne le argomentazioni all'INVALSI o ai suoi vertici.

Grafica di copertina: Alessandro Petrini

ISBN 9788835125235

Indice

ISBN 9788835125235

ISBN 9788835125235

Introduzione

di Patrizia Falzetti

La scuola primaria ha come obiettivo quello di fornire ai bambini capacità di scrittura, lettura e delle solide basi in Matematica che permetteranno loro di affrontare nuove discipline. Consapevoli dell'importanza degli insegnamenti del primo ciclo di istruzione, si è pensato di raccogliere in questo volume alcuni studi presentati in occasione della quarta edizione del Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca e la didattica", tenutosi a Roma nel novembre del 2019. L'obiettivo che accomuna tali lavori è quello di fornire degli strumenti per migliorare la didattica della Matematica nella scuola primaria. Attraverso i dati che l'Istituto mette a disposizione i ricercatori e i docenti hanno potuto indagare le caratteristiche del sistema scolastico e proporre interventi di sostegno e potenziamento.

I lavori non si sono serviti esclusivamente dei risultati finali ottenuti nelle prove INVALSI, un ulteriore elemento considerato, comune a quattro dei sei capitoli del libro, ha riguardato anche i quesiti somministrati durante le Rilevazioni nazionali. Nel primo capitolo gli autori riflettono sul loro uso didattico: dopo averne riproposti alcuni, già somministrati nell'anno precedente allo stesso grado scolastico, hanno intervistato degli alunni della classe seconda della scuola primaria con l'intento di valorizzare e documentare le loro modalità argomentative in ambito matematico. Nel capitolo tre sono stati studiati i quesiti a "doppia richiesta" in un arco temporale che va dal 2009 al 2018. A seguito di quest'analisi è stata realizzata un'indagine a cui hanno preso parte alunni di classe quarta della scuola primaria. Nel capitolo cinque, invece, viene presentata una riflessione sul modo in cui alunni della scuola primaria possono affrontare un quesito sul riconoscimento di figure, nello specifico un disegno all'interno del quale si devono individuare dei triangoli. Nel sesto capitolo gli autori presentano una ricerca focalizzata sulle difficoltà linguistiche che gli studenti incontrano nella risoluzione dei quesiti INVAL-

ISBN 9788835125235

SI. Indagano la dimensione “risolvere problemi”, analizzano quali difficoltà emergono nella scuola primaria e come queste si sviluppano o si modificano nel passaggio dalla classe seconda alla classe quinta. I capitoli restanti, il due e il quattro, propongono alcuni suggerimenti circa l’insegnamento. Il secondo capitolo introduce l’uso del gioco matematico. Le due autrici conducono una ricerca-azione con degli alunni delle seconde classi della scuola primaria il cui scopo è indagare l’importanza dei giochi matematici come strumento fondamentale per tutti i protagonisti dell’insegnamento/apprendimento e il loro impatto sui risultati delle prove INVALSI. Nel quarto capitolo, invece, l’autrice si serve delle prove e dei risultati del campione nazionale per una ricerca su quattro coorti con l’intento di osservare gli eventuali cambiamenti che avvengono dal grado 2 al grado 5. I risultati ottenuti fanno ipotizzare che la metodologia didattica di tipo “tradizionale”, nella scuola come in altri luoghi di formazione, non risulti adeguata ai cambiamenti generazionali che stanno intervenendo, alle esigenze di competenze di cittadinanza e alle richieste del mondo del lavoro.

Ci auguriamo che la lettura del volume dia prova di come l’unione tra la ricerca e l’esperienza sul campo possa essere un arricchimento costante per il mondo scolastico e di come i dati INVALSI possano essere utilizzati per dar vita a nuovi progetti, capaci di aiutare gli alunni nel percorso di studio.

ISBN 9788835125235

1. Ragionare matematicamente: educare alla razionalità nella scuola primaria. L'uso delle prove INVALSI di Matematica 2019 di grado 2 nella didattica curricolare

di Chiara Saletti, Fabio Brunelli

Gli autori da alcuni anni riflettono sull'uso didattico dei quesiti INVALSI. In questo contributo hanno scelto alcuni quesiti della prova INVALSI di Matematica del 2019 di grado 2 e li hanno proposti, a inizio anno scolastico 2019/20, a una classe seconda. I quesiti sono stati somministrati a coppie e senza particolari limiti di tempo. Agli allievi è stato chiesto di spiegare il loro procedimento motivando le loro risposte. Successivamente gli allievi sono stati intervistati a coppie, sempre con l'intento di valorizzare e documentare le loro modalità argomentative in ambito matematico.

La tradizione dell'insegnamento della Matematica in Italia è ancora legata al ricordare definizioni e a eseguire calcoli. Riteniamo pertanto utile una riflessione su una didattica curricolare che coinvolga maggiormente lo studente e lo abitui a fornire argomenti a supporto di una strategia o soluzione, cioè a ragionare e argomentare in Matematica, per favorire lo sviluppo e il potenziamento di un'educazione alla razionalità.

The authors have been considering since few years the didactic use of INVALSI tests. In this paper we have chosen some questions from the INVALSI Mathematics test of 2019 grade 2 and proposed them, at the beginning of the 2019/20 s.y., to student of second grade. Questions were administered in pairs and without particular time limits. Students were asked to explain their proceedings, giving reasons for their answers. Subsequently, students were interviewed in pairs with the aim of enhancing and documenting their argumentative methods in Mathematical field. Italian tradition of teaching Mathematics is still linked to remembering definition and performing calculations. We therefore consider useful a reflection on a curricular teaching that involves students and accustoms them to supply Mathematical arguments to support a strategy or solution, that is to reason and argue in Math-

ISBN 9788835125235

ematics, to support the development and the strengthening of an education to rationality.

1. Introduzione

L'educazione all'argomentazione nell'ambito della Matematica ha radici lontane. Nella prima metà dell'Ottocento sia Pestalozzi sia Fröbel proposero per la Matematica un ruolo maggiore fin dall'insegnamento elementare. Ritenevano infatti che la Matematica non dovesse più ridursi al semplice "far di conto" per le esigenze della vita pratica, bensì dovesse consistere in una riflessione consapevole sul numero, sulla misura, sulla geometria, sul ragionamento logico come elemento fondamentale dello sviluppo intellettuale dei bambini.

Tuttavia, nei nostri primi anni di insegnamento (rispettivamente anni Settanta e anni Ottanta del Novecento) nella scuola italiana prevaleva ancora l'idea che il bambino fino a undici anni si trovasse nell'età delle operazioni concrete, ancora cognitivamente non completamente strutturato, e pertanto non in grado di utilizzare informazioni verbali astratte.

Notevoli sono stati i progressi della didattica della Matematica negli ultimi quarant'anni (Pellerey, 1992). Mariolina Bartolini Bussi, che collaborava, in quegli anni, con le scuole dell'infanzia di Modena e Reggio Emilia nel 1992 si esprimeva così:

> Nel 1983, ipotizzare una riflessione metacognitiva a tre anni sembrava impossibile. Si è osservato invece che è possibile: se un bambino rappresenta, può anche riflettere su quello che ha fatto… un risultato molto alto, con bambini da tre a cinque anni!

Il pensiero della Bartolini Bussi e quello di altri ricercatori è stato recepito dai Programmi per la Scuola Elementare del 1985:

> L'educazione matematica contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti: di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e deduzione, di controllo e quindi di verifica o smentita…
>
> La vasta esperienza compiuta ha però dimostrato che non è possibile giungere all'astrazione matematica senza percorrere un lungo itinerario che collega l'osservazione della realtà, l'attività di matematizzazione, la risoluzione dei problemi, la conquista dei primi livelli di formalizzazione. La più recente ricerca didattica, attraverso un'attenta analisi dei processi cognitivi in cui si articola l'apprendimento della Matematica, ne ha rilevato la grande complessità, la gradualità di crescita e linee di sviluppo non univoche. In questo contesto si è constatato che anche gli algoritmi (cioè, i procedimenti ordinati) di calcolo e lo studio delle figure geometriche hanno

ISBN 9788835125235

una valenza formativa ben al di là delle utilizzazioni pratiche che un tempo giustificavano il loro inserimento nei programmi.

Il cambio di prospettiva è stato confermato nel 1991 dagli Orientamenti per la scuola dell'infanzia. Nella parte "Il campo di esperienza lo spazio, l'ordine, la misura" leggiamo:

> Questo campo di esperienza si rivolge in modo specifico alle capacità di raggruppamento, ordinamento, quantificazione e misurazione di fatti e fenomeni della realtà, e alle abilità necessarie per interpretarla e per intervenire consapevolmente su di essa. A questo scopo, le abilità matematiche riguardano in primo luogo la soluzione di problemi mediante l'acquisizione di strumenti che possono diventare a loro volta oggetto di riflessione e di analisi.

Gli Orientamenti del 2012 portano ancora avanti questa nuova visione "alta" sia della Matematica sia dell'alunno. Ecco la parte introduttiva alla Matematica:

> Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il "pensare" e il "fare"… contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri.

Un documento ministeriale che a nostro parere non ha avuto sufficiente risonanza nella scuola è costituito dalle "Indicazioni nazionali e nuovi scenari" del 2017. Ci interessa questo passaggio:

> La Matematica, tuttavia, permette anche di sviluppare competenze trasversali importanti… Tali competenze sono rilevanti per la formazione di una cittadinanza attiva e consapevole, in cui ogni persona è disponibile all'ascolto attento e critico dell'altro e a un confronto basato sul riferimento ad argomenti pertinenti e rilevanti. In particolare, l'educazione all'argomentazione può costituire un antidoto contro il proliferare d'informazioni false o incontrollate.

L'educazione all'argomentazione passa, quindi, da competenza interna alla Matematica a competenza trasversale del cittadino in un'epoca come la nostra dove quotidianamente siamo tutti esposti a notizie false e a teorie pseudoscientifiche.

Pietro Di Martino, in un'intervista rilasciata a Daniele Gouthier e apparsa sul numero 4 di *Scienze magazine* del febbraio 2015, sostiene che in classe si lascia poco spazio all'argomentazione, da lui considerata competenza fon-

ISBN 9788835125235

damentale per gli allievi e necessaria agli insegnanti per capire e interpretare gli errori dei ragazzi:

> L'obiettivo di insegnare ad argomentare nell'ambito dell'educazione matematica in genere è visto come secondario rispetto a obiettivi più legati a contenuti specifici. Io la penso diversamente e, quel che è più importante, "la pensano diversamente" anche le nuove Indicazioni nazionali, che pongono lo sviluppo della competenza argomentativa tra i traguardi fondamentali dell'educazione matematica. Di sicuro lavorare sull'argomentazione matematica è difficile. Argomentare è una competenza trasversale, che mette in gioco competenze linguistiche: ci si può dunque scontrare con difficoltà in questo ambito, amplificate dal fatto che il linguaggio matematico ha le sue peculiarità. Ci sono parole del contesto quotidiano che sono usate anche in quello matematico, ma non sempre con lo stesso significato. […] La parola "alcuni" nel linguaggio quotidiano è usata per dire "più di uno, ma non tutti". In Matematica invece può significare anche uno, oppure tutti. Su un libro di Matematica per la scuola primaria per introdurre "nessuno, tutti, alcuni" ho trovato uno schema dal quale emergeva con forza la difficoltà a gestire quest'ambiguità tra il senso del termine "alcuni" nel quotidiano e il suo significato matematico. Nei tipici quesiti (secondo me molto discutibili, proprio perché giocano sul filo di quest'ambiguità) che chiedono di associare frasi di significato equivalente, la presenza dell'aggettivo "alcuni" è garanzia di un'alta percentuale di errori. […] Far argomentare in classe è importantissimo anche per dare occasione di ascoltare le argomentazioni altrui e coglierne i punti deboli e i punti forti. Gli insegnanti di tutti i livelli scolari dovrebbero dedicare un apposito tempo all'argomentare in Matematica: non è tempo perso, è tempo dedicato a una delle competenze fondamentali per la crescita dell'allievo, competenza che, se ben sviluppata, è cruciale per qualsiasi tipo di studio. Tra l'altro l'argomentare, lo spiegarsi il perché delle cose, fortifica molto anche la conoscenza degli aspetti più specifici di contenuto, che altrimenti vengono dimenticati in maniera rapida…

Inizialmente la nostra riflessione è partita dalla competenza Argomentare. Ben presto, tuttavia, ci siamo imbattuti nella competenza Risolvere problemi. Se è vero che è possibile argomentare su una formula o su un algoritmo, è anche vero che tutti i quesiti INVALSI hanno un prevalente taglio problematico e noi stessi li abbiamo proposti ai ragazzi come problemi da risolvere e spiegare. I risultati e le nostre conclusioni si collocano quindi a cavallo tra queste due, per noi, fondamentali competenze matematiche: l'Argomentare e il Risolvere problemi.

Conoscere è una dimensione fondamentale delle competenze e sottesa a ognuna di esse. Infatti, non è possibile risolvere problemi o argomentare riguardo a fatti che non si conoscono.

I quesiti che abbiamo scelto e che sono afferenti alla dimensione Conoscere (D3 Alberto e i numeri, D6 Retta dei numeri 1, D16 Retta dei numeri 2,

ISBN 9788835125235

D18 La bicicletta) sono stati proposti agli alunni come problem solving e a essi è stato chiesto di argomentare riguardo ai procedimenti seguiti.

2. La nostra indagine

La nostra indagine qualitativa vede coinvolta una classe seconda di un comprensivo di Firenze con un ESCS alto. Si tratta di una classe eterogenea di 26 alunni (15 femmine e 11 maschi) che vede la presenza di alunni stranieri bilingui (circa 1/4 della totalità). L'ambito logico-matematico, fin dalla prima, è assegnato a docenti non titolari senza continuità fra la prima e la seconda classe.

Per quanto riguarda le modalità di somministrazione abbiamo suddiviso la classe, causa assenze di due alunni, in 12 coppie eterogenee all'interno e abbiamo concesso loro tutto il tempo necessario per giungere alla soluzione, chiedendo di argomentare per iscritto, direttamente sui fogli protocollo, le varie fasi risolutive. Alla prova sono seguite interviste individuali o a coppie nelle quali abbiamo chiesto ulteriori chiarimenti sia sulle loro risposte corrette, sia su quelle errate. Solo la seconda fase della sperimentazione, quella cioè relativa alle interviste, è stata da noi documentata con registrazioni.

3. Gli item scelti

Per il nostro studio abbiamo scelto dieci quesiti, quelli che ci apparivano più interessanti e che coprivano i quattro ambiti di contenuto. Nella tabella che segue abbiamo raccolto le sigle dei quesiti, facendo riferimento anche alla dimensione di competenza alla quale ciascuno di essi afferisce. A ogni quesito abbiamo dato un soprannome.

Tab. 1 – I quesiti scelti suddivisi per ambito e dimensione

Dimensioni delle competenze	*Numeri*	*Figure*	*Dati e previsioni*
Risolvere problemi	D17 I bastoncini	D9 Le piastrelle	D19 Grafico attività D24 Il tempo
Argomentare		D11 Il percorso	D4 Il campeggio
Conoscere	D3 Alberto e i numeri D6 Retta dei numeri 1 D16 Retta dei numeri 2 D18 La bicicletta		

ISBN 9788835125235

4. Analisi dei quesiti e risultati della classe

4.1. D3 Alberto e i numeri

D3. **Alberto pensa un numero, aggiunge 25 e ottiene 43.**
Quale numero ha pensato?

A. ☐ 18

B. ☐ 68

C. ☐ 28

Fig. 1 – Il testo dell'item D3 di grado 2 del 2019

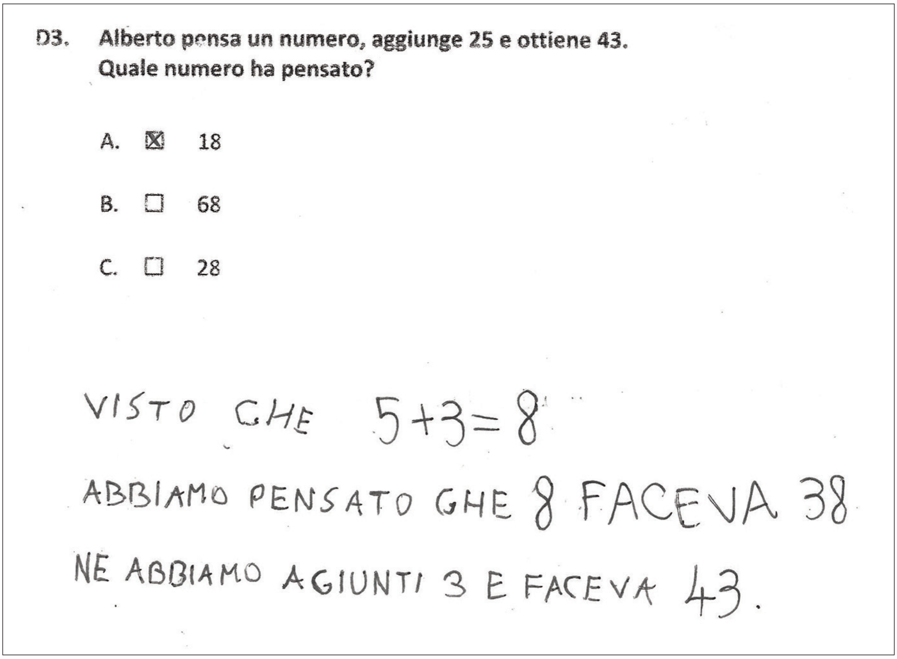
L'ambito del quesito è Numeri e la dimensione è Conoscere; scopo della domanda è calcolare la differenza tra due numeri dati attraverso un completamento. Il quesito, al quale ha risposto correttamente il 51,1% del campione nazionale, richiede di trovare il complementare a 43, dato il numero 25. Lo studente può procedere facendo la sottrazione tra 43 e 25 e trovando la differenza, oppure per completamento contando da 25 fino a 43. È possibile anche procedere per tentativi a partire dalle tre opzioni di risposta, cercando la somma data (43).

Una coppia sceglie la risposta B e durante l'intervista motiva la scelta dicendo: "abbiamo fatto un'operazione e ci è venuto in mente, poi l'abbiamo messa in colonna e abbiamo fatto 25+43… comincio dalle decine e 2+4 fa 6 e poi passo alle unità e 5+3 fa 8, quindi 68!". L'alunna continua spiegandoci che "18 era sbagliato perché nel problema non c'è il meno perché l'addizione è un po' più facile da fare". In un video successivo le sottoponiamo un problema simile con numeri più piccoli (Alberto pensa un numero, aggiunge 2 e ottiene 9. Quale numero ha pensato?) sollecitandola a usare tranquillamente le mani per fare i calcoli; la sua risposta è 11.

La bambina effettua un errore di procedura nell'operazione in colonna, parte infatti dalle decine e non dalle unità. Inoltre, cade nel classico errore di risolvere con l'addizione un problema solo per il fatto che nel testo è presente la parola "aggiunge", questo secondo la deleteria tradizione didattica di risolvere i problemi in base alle "parole chiave" presenti nel testo.

ISBN 9788835125235

Un'altra coppia ha dato risposta corretta e, nonostante l'argomentazione criptica, in fase di intervista una delle due alunne chiarisce la strategia utilizzata: "Se aggiungo 25 al numero misterioso ottengo 43 così per tornare al numero misterioso devo fare la sottrazione". Alla nostra domanda se addizione e sottrazione siano sorelle, cugine o se invece litigano, risponde: "Litigano! Perché una toglie i numeri e l'altra li aggiunge". Di seguito il protocollo della coppia.



D3. **Alberto pensa un numero, aggiunge 25 e ottiene 43.**
Quale numero ha pensato?

A. ☒ 18

B. ☐ 68

C. ☐ 28

VISTO CHE 5+3=8

ABBIAMO PENSATO CHE 8 FACEVA 38

NE ABBIAMO AGIUNTI 3 E FACEVA 43.

Fig. 2 – Il protocollo della seconda coppia dell'item D3 di grado 2 del 2019

Nella nostra classe il quesito è stato risolto con successo da 7 gruppi, mentre 5 hanno dato risposta errata.

ISBN 9788835125235

4.2. D4 Il campeggio

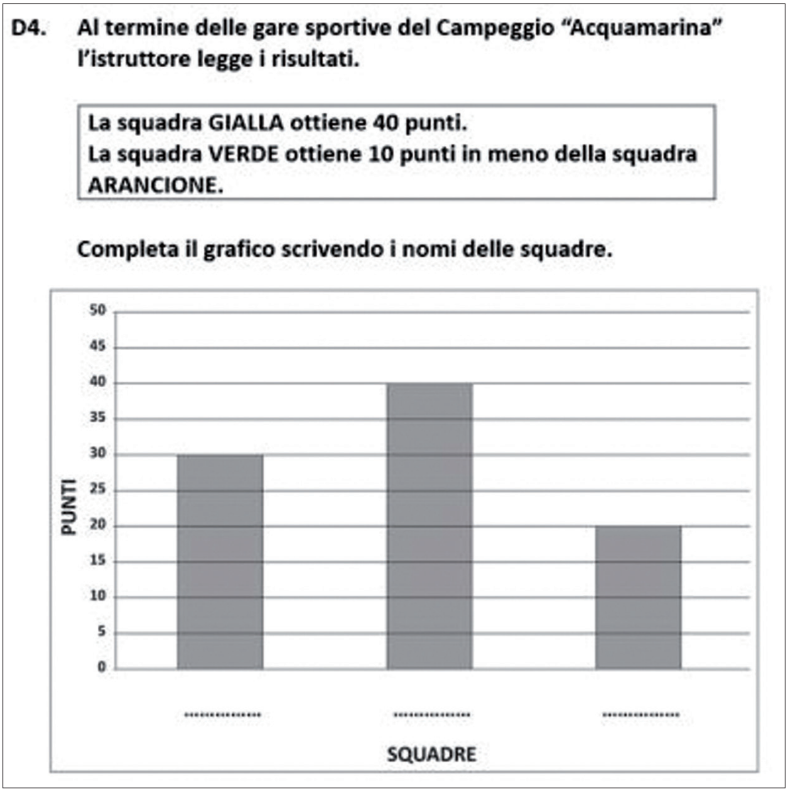


Fig. 3 – Il testo dell'item D4 di grado 2 del 2019

L'ambito è Dati e previsioni, la dimensione è Argomentare. Scopo della domanda è completare un grafico mettendo in relazione i dati forniti da un testo; lo studente, infatti, deve completare le etichette che identificano ciascuna colonna del grafico, con scala non unitaria, usando le informazioni fornite dal testo. Al quesito ha risposto correttamente il 57% del campione nazionale e 9 coppie della nostra classe.

Nel caso della nostra classe il quesito ha avuto una buona riuscita con 9 coppie che hanno dato risposta esatta e 3 risposta errata, ma in fase di intervista sono venute a galla alcune criticità, come nel caso di due coppie. Per entrambe i maggiori problemi, dovuti forse a una lettura superficiale e settoriale del testo e del grafico, risultano essere l'errata interpretazione della scala del grafico. Le coppie fanno corrispondere la prima informazione del testo (40 punti) con la terza colonna del grafico "alta 4", collegata all'attribu-

ISBN 9788835125235

zione del valore unitario alla scala del grafico: “Un mattoncino vale 1 e due mattoncini valgono 4”. Dall’altro la non comprensione del significato “10 punti in meno”, vero e proprio nodo logico irrisolto per una delle due coppie, fa invertire le colonne corrispondenti alle squadre Verde e Arancione.

4.3. D6 Retta dei numeri 1

Fig.4 – Il testo dell’item D6 di grado 2 del 2019

L’ambito prevalente è Numeri, la dimensione è Conoscere. Scopo della domanda è individuare la metrica in una retta numerica e trovare il numero corretto in una determinata posizione. Per poter rispondere è necessario individuare correttamente l’ampiezza dell’intervallo, in questo caso non unitario, che intercorre tra le due tacche consecutive della retta data. Al quesito il 52,6% del campione nazionale ha risposto correttamente.

La classe da noi esaminata ha risolto il quesito positivamente con ben 10 coppie che hanno dato risposta corretta mentre solo 2 coppie hanno dato risposta errata.

Una coppia che ha risposto correttamente, durante l’intervista spiega la strategia risolutiva: “Abbiamo contato da riga a riga e ogni volta saltiamo di 2 e il numero era 14”. In questo caso i due bambini hanno ipotizzato valore 2 per l’intervallo. Altri due studenti, che hanno risposto correttamente 14, ci spiegano che “La metà di 10 e 18 è 14”. Decifrando il loro pensiero ipotizziamo che abbiano considerato la distanza tra 10 e 18, per poi dimezzarla e aggiungere 4 a 10 o togliere 4 da 18.

Due bambine, infine, assegnano valore 1 anziché valore 2 all’intervallo fra una tacca e l’altra e inseriscono erroneamente 12.

È consuetudine nella scuola dell’infanzia allestire calendari di classe per registrare le presenze dei bambini o il meteo del giorno. Tali calendari costituiscono una prima rappresentazione della linea dei numeri. Nella scuola primaria non sempre questo strumento viene utilizzato nell’introdu-

ISBN 9788835125235

zione dei numeri naturali. Talvolta nelle classi prime si predilige dedicare tempo e attenzione all'insiemistica e a classificazioni logiche di vario tipo, piuttosto che impossessarsi fisicamente e intellettualmente della successione dei numeri naturali (D'Amore, 2002). Una conseguenza di questa carenza è che i ragazzi di tutti i livelli scolastici incontrano difficoltà nei quesiti dove è richiesto di posizionare correttamente numeri, interi, decimali, relativi, …

4.4. D9 Le piastrelle

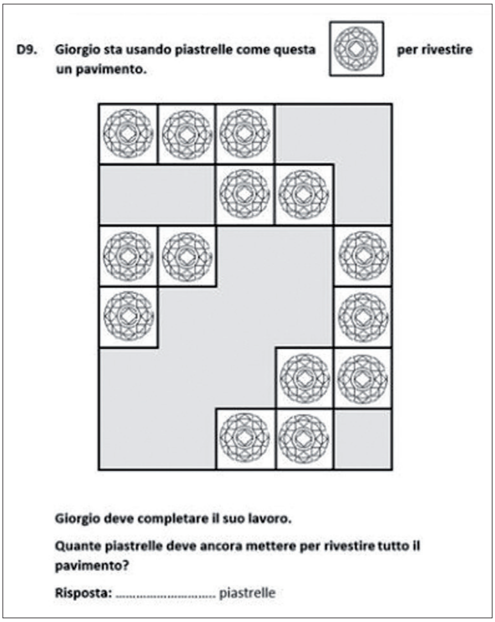


Fig. 5 – Il testo dell'item D9 di grado 2 del 2019

Ambito prevalente è Spazio e figure, la dimensione è Risolvere problemi. Scopo della domanda è individuare il numero di elementi necessari a completare la tassellazione di una porzione di piano. La domanda richiede allo studente di operare un conteggio che, data la struttura del disegno, lo dovrebbe invitare a evitare la conta uno a uno: egli, infatti, può percepire visivamente gli spazi mancanti come gruppi di due, tre o quattro elementi. Al quesito il 55,7% del campione nazionale ha risposto correttamente.

La nostra classe ha evidenziato 10 risposte corrette e solo 2 errate. Due studenti per far ciò hanno tracciato delle linee per rendere ancor più evidenti

ISBN 9788835125235

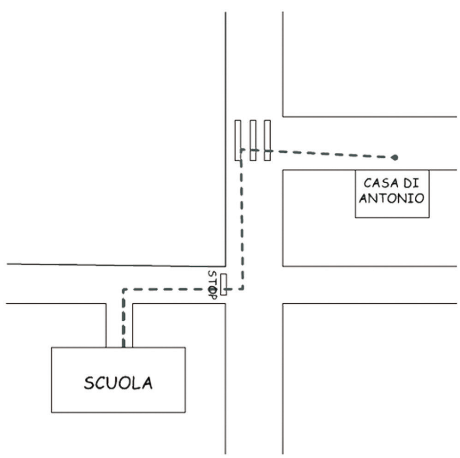
elementi singoli o blocchi, infatti in fase di intervista affermano che: "Noi abbiamo disegnato le piastrelle e le abbiamo contate".

Un'altra strategia usata da una coppia per rispondere correttamente è stata quella di numerare le piastrelle mancanti, seguendo una disposizione spazialmente ordinata, senza disegnare i margini delle piastrelle mancanti. In fase di intervista infatti affermano: "Abbiamo scritto i numeri facendo una riga immaginaria".

Abbiamo osservato che diversi alunni contano le piastrelle mancanti del problema non in modo ordinato, tuttavia questo non ha sempre impedito loro di dare risposte corrette.

4.5. D11 Il percorso

D11. Antonio disegna il percorso da scuola a casa sua.



Completa la descrizione del percorso di Antonio utilizzando una delle due parole scritte sotto ai puntini.

Esco da scuola, cammino fino all'incrocio, svolto a ....
(DESTRA/SINISTRA)
e proseguo fino allo STOP.

Poi svolto a .... e proseguo fino alle strisce pedonali.
(DESTRA/SINISTRA)

Infine svolto a .... e proseguo fino a casa mia.
(DESTRA/SINISTRA)

Fig. 6 – Il testo dell'item D11 di grado 2 del 2019

ISBN 9788835125235

Ambito del quesito è Spazio e figure e la dimensione è Argomentare. Lo scopo della domanda è far corrispondere una descrizione verbale alla rappresentazione di un percorso. Allo studente viene richiesto di completare la descrizione verbale di un percorso, di cui è fornita una rappresentazione bidimensionale corrispondente alla vista dall'alto. Per far ciò il bambino deve decentrare il proprio punto di vista e assumere, in ciascun punto di svolta, quello del bambino che sta descrivendo il percorso da scuola a casa. La direzione della prima e della terza svolta corrisponde al punto di vista dello studente che guarda il disegno; la seconda invece risulta più complessa perché occorre cambiare il punto di vista o ruotare il disegno. Il mancato decentramento può portare a rispondere erroneamente "destra" per tutti i punti di svolta, perché lo studente assume il proprio punto di vista e regola l'indicazione "destra/sinistra" rispetto a sé.

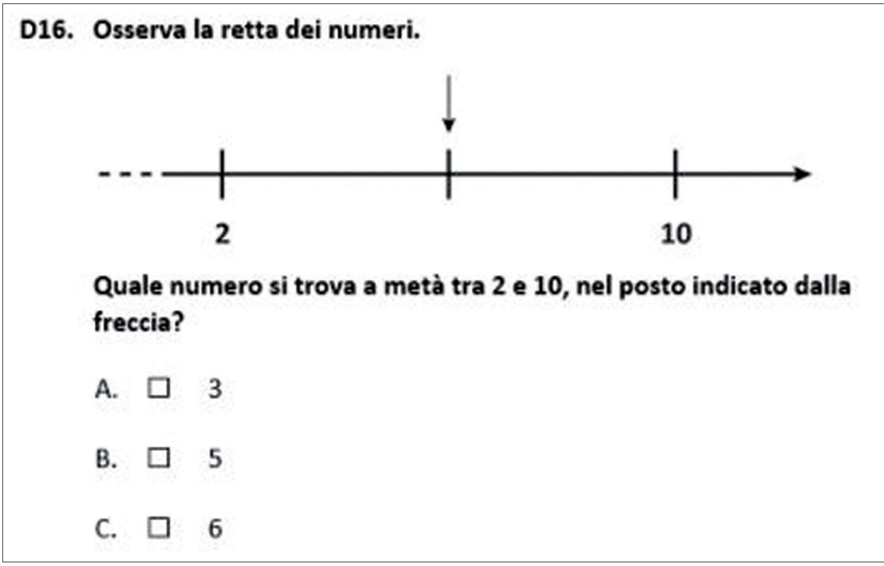
Nella classe presa in considerazione, questo è stato uno dei quesiti che ha messo maggiormente in difficoltà le coppie, di cui 6 hanno dato risposta esatta e 6 risposta errata, perfettamente in linea con i risultati del campione nazionale che vede il 50,4% di risposte corrette.

Una prima difficoltà potrebbe essere insita nell'interpretazione della parola "incrocio". Nelle interviste abbiamo osservato che qualche alunno saltava il primo incrocio (a forma di T) e veniva subito attratto dal secondo incrocio (a forma di croce).

Una seconda difficoltà è quella della lateralizzazione. Abbiamo chiesto ai bambini di alzare alternativamente il braccio sinistro e quello destro. Molti eseguono correttamente. Diversi sbagliano. Alcuni hanno bisogno di prendere in mano una matita in atteggiamento di scrittura per ricordarsi quale sia la loro mano destra ("così ci ha insegnato la maestra"). È noto che queste difficoltà talvolta permangono in età adulta (Baccaglini-Frank, Ramploud e Bartolini Bussi, 2012).

ISBN 9788835125235

4.6. D16 Retta dei numeri 2


D16. Osserva la retta dei numeri.

Quale numero si trova a metà tra 2 e 10, nel posto indicato dalla freccia?

A. ☐ 3

B. ☐ 5

C. ☐ 6

Fig. 7 – Il testo dell'item D16 di grado 2 del 2019

Ambito del quesito è Numeri e la dimensione prevalente è Conoscere. Lo scopo della domanda è individuare una metrica in una retta numerica e trovare il numero corretto in una determinata posizione. In buona sostanza il quesito richiede di posizionare un numero sulla retta in cui l'unità di misura si può dedurre dai numeri già presenti. Nel testo viene esplicitato che il numero da individuare si trova a metà tra i numeri 2 e 10. Il bambino può individuare l'ampiezza dell'intervallo (4) procedendo per tentativi ed errori, oppure calcolando la metà della distanza tra 10 e 2.

L'opzione di risposta A è stata scelta solo da una coppia, che attribuisce all'intervallo valore unitario e contano a partire da 2. Durante l'intervista abbiamo chiesto ai due bambini di completare la linea dei numeri con quelli mancanti. Il risultato è stato che da una parte non vengono posizionati numeri, mentre dall'altra i numeri sono ammassati, come si vede dalla figura.

L'opzione di riposta B, invece, fa riferimento a coloro che si focalizzano sulla locuzione "a metà" e pensano alla metà di 10.

Nell'intervista con due studenti emerge prepotentemente la difficoltà di individuare la sottrazione come operazione utile per trovare quanti numeri occorre aggiungere a due per arrivare a dieci.

ISBN 9788835125235

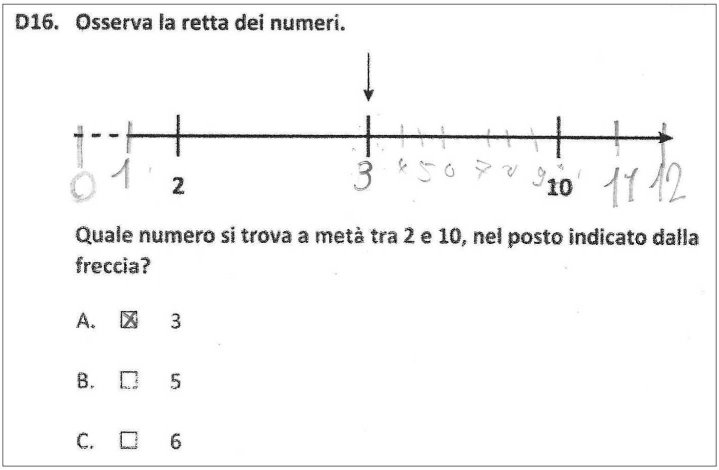


Fig. 8 – Il protocollo della coppia relativo all'item D 16 di grado 2 del 2019

Nel caso della classe, come del resto per il campione nazionale (50%), le risposte esatte sono state 6, così come le errate, e il distrattore che ha avuto maggior successo è stato proprio l'opzione B (Di Martino, 2015).

4.7. D17 I bastoncini

D17. Laura ha 9 bastoncini di diversa lunghezza.

Taglia a metà il bastoncino più lungo.

Quanti bastoncini ha ora Laura?

A. ☐ 8

B. ☐ 10

C. ☐ 11

Fig. 9 – Il testo dell'item D17 di grado 2 del 2019

L'ambito prevalente del quesito è Numeri e la dimensione è Risolvere problemi. Scopo della domanda è risolvere un problema riconoscendo che fare la metà di un elemento significa dividere in due parti solo quell'elemento. La difficoltà sta nel riconoscere che, dividendo a metà un elemento di un

ISBN 9788835125235

insieme, la numerosità dell'insieme aumenta di uno. Al quesito il 44,2% del campione nazionale ha risposto correttamente.

Nella nostra classe 7 coppie su 12 hanno dato risposta esatta. In fase di intervista un'alunna, molto sicura di sé afferma: "Dieci, perché se io taglio una cosa a metà ne ottengo due di cose e erano nove le cose, più un'altra dieci!" mentre la compagna sembra non seguire il ragionamento.

Le altre 5 coppie hanno dato risposta errata; di queste, 2 hanno scelto l'opzione A: in questo caso i bambini ci hanno confermato durante le interviste di aver interpretato il dividere a metà come una diminuzione della numerosità e quindi anziché aggiungere un elemento a quelli iniziali, lo hanno sottratto.

Le altre 3 coppie hanno scelto l'opzione C: questo è il caso di due studenti che pensano che entrambe le parti dell'elemento diviso a metà vadano sommate alla quantità iniziale. Tale ragionamento ci viene confermato nell'intervista: "Ah ho capito… 11-1 fa 10: ne taglia uno dall'11 che fa 10… taglia il più lungo che è 11…" e alla nostra domanda: "E se avesse tagliato il più corto?" la coppia risponde: "Avrei messo 7!" Solo dopo aver chiesto alla bambina di mettere le mani aperte sul banco con 9 dita come se fossero bastoncini, e togliere 1 dito che poi avrebbe dovuto dividere a metà, arrivano alla risposta esatta, ma che fatica!

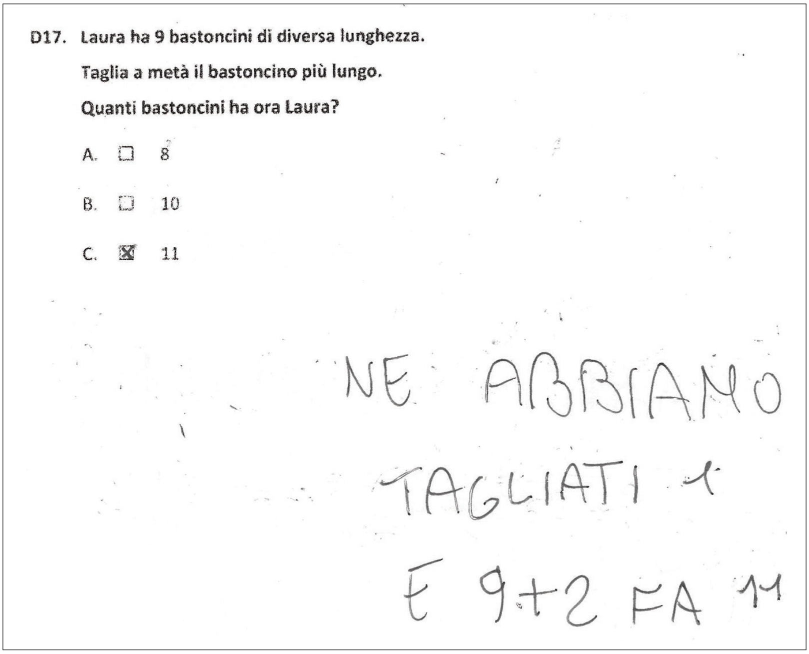


Fig. 10 – Il protocollo della coppia relativo all'item D18 di grado 2 del 2019

ISBN 9788835125235

4.8. D18 La bicicletta

D18. Alessandro vuole comprare una bicicletta che costa DUECENTOSETTE euro.

Quale cartellino mostra il prezzo della bicicletta?

270 €	207 €	2007 €
Cartellino 1	Cartellino 2	Cartellino 3

A. ☐ Il cartellino 1

B. ☐ Il cartellino 2

C. ☐ Il cartellino 3

Fig. 11 – Il testo dell'item D18 di grado 2 del 2019

Ambito prevalente del quesito è Numeri e la dimensione è Conoscere. Scopo della domanda è riconoscere la scrittura in cifre di un numero espresso in parole.

Al quesito 10 coppie su 12 hanno dato risposta corretta, mentre il campione nazionale fornisce il 50% di risposte corrette, motivando in più modi le loro risposte. Una prima coppia semplicemente dice: "Sapevamo il nome del numero perché Alessandro lo dice (nel testo del problema) e abbiamo visto sotto il cartellino il numero". Mentre una seconda coppia afferma che "Visto che se scriviamo 270 è duecentosettanta non andava bene, nell'altro cartellino c'era 207 e questo sì che andava bene!".

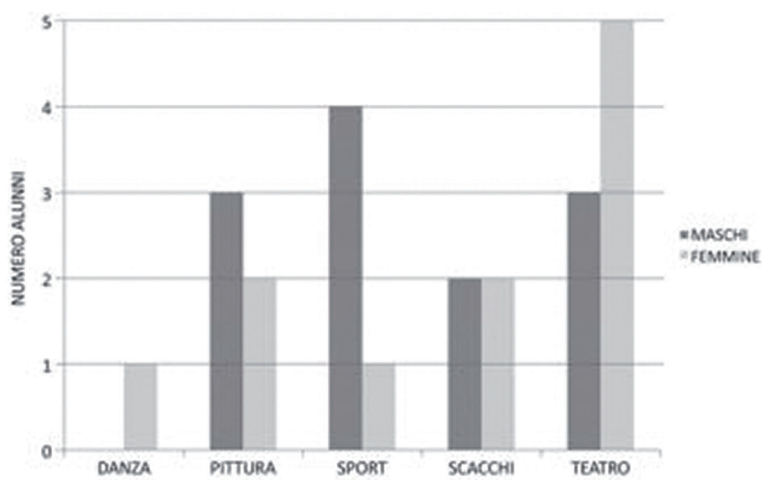
In buona sostanza tutti i bambini intervistati che hanno dato risposta corretta sono stati in grado, dato un numero espresso in parole, di riconoscere il corrispondente numero espresso in cifre. Non così per una delle due coppie che ha dato risposta errata scegliendo l'opzione C. In entrambi i casi ci resta

ISBN 9788835125235

il dubbio che l'errore sia dovuto, soprattutto nel caso della seconda coppia che afferma "abbiamo letto tante volte", alla trascrizione letterale in cifre di ciò che è espresso in parola "200 e 7", cioè 2007.

4.9. D19 Le attività

D19. Tutti gli alunni di una classe esprimono le loro preferenze sulle attività organizzate dalla scuola.
Ogni alunno esprime una sola preferenza.

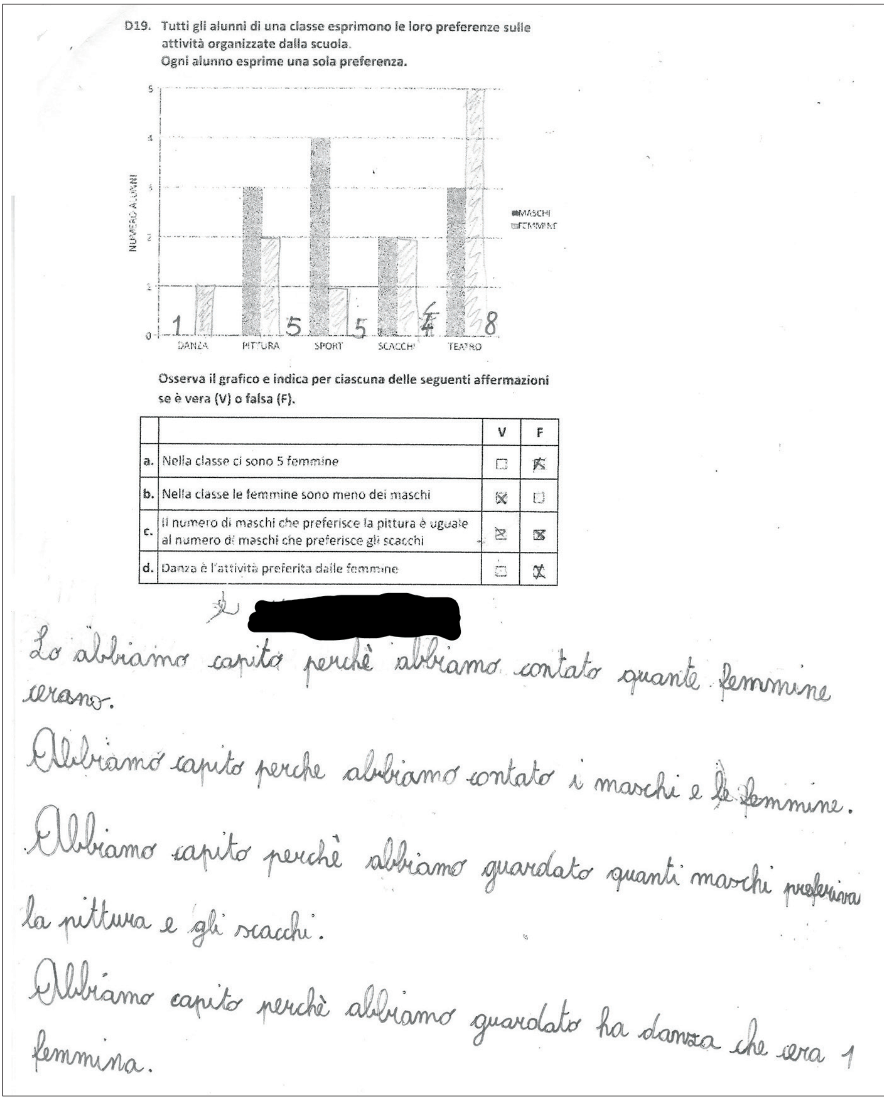


Osserva il grafico e indica per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera (V) o falsa (F).

		V	F
a.	Nella classe ci sono 5 femmine	☐	☐
b.	Nella classe le femmine sono meno dei maschi	☐	☐
c.	Il numero di maschi che preferisce la pittura è uguale al numero di maschi che preferisce gli scacchi	☐	☐
d.	Danza è l'attività preferita dalle femmine	☐	☐

Fig. 12 – Il testo dell'item D19 di grado 2 del 2019

ISBN 9788835125235



D19. Tutti gli alunni di una classe esprimono le loro preferenze sulle attività organizzate dalla scuola.
Ogni alunno esprime una sola preferenza.

Osserva il grafico e indica per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera (V) o falsa (F).

		V	F
a.	Nella classe ci sono 5 femmine	☐	☒
b.	Nella classe le femmine sono meno dei maschi	☒	☐
c.	Il numero di maschi che preferisce la pittura è uguale al numero di maschi che preferisce gli scacchi	☒	☒
d.	Danza è l'attività preferita dalle femmine	☐	☒

[redacted]

Lo abbiamo capito perchè abbiamo contato quante femmine erano.

Abbiamo capito perche abbiamo contato i maschi e le femmine.

Abbiamo capito perchè abbiamo guardato quanti maschi preferiva la pittura e gli scacchi.

Abbiamo capito perchè abbiamo guardato ha danza che era 1 femmina.

Fig. 13 – Il protocollo della coppia relativo dell'item D19 di grado 2 del 2019

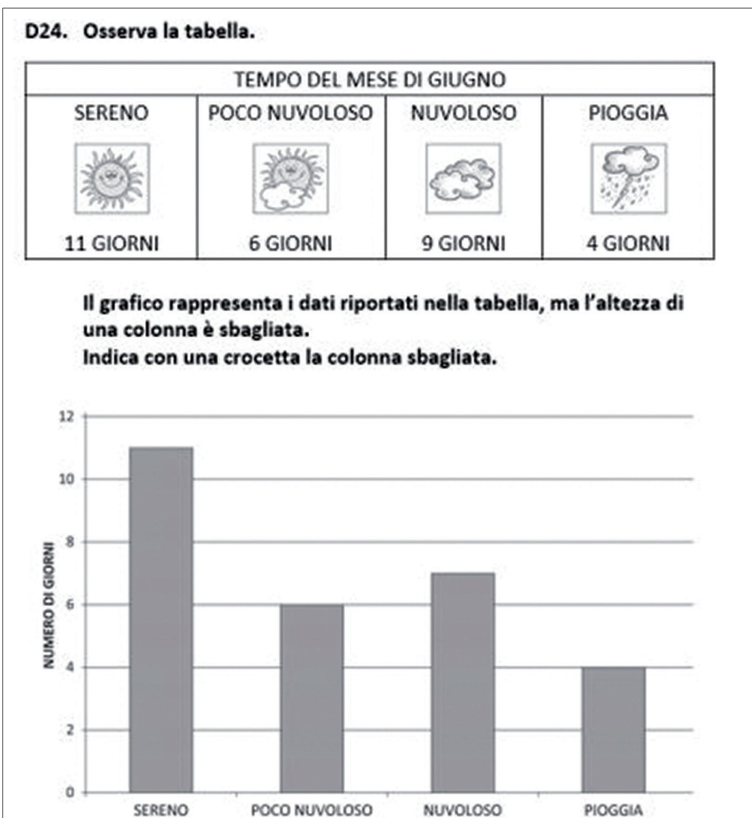
L'ambito prevalente del quesito è Dati e previsioni e la dimensione è Risolvere problemi; lo scopo della domanda è leggere e interpretare le informazioni rappresentate in un diagramma a barre. Il bambino per rispondere correttamente deve interpretare il diagramma a barre abbinate che rappresenta le preferenze di una classe relative alle attività della scuola, diversificate per genere (maschi e femmine).

ISBN 9788835125235

Tre delle cinque coppie che hanno dato risposte errate, sbagliando la prima e la quarta affermazione, hanno preso in considerazione le singole colonne, senza aggregare i dati.

Interessante il protocollo di una coppia nel quale appare evidente il contratto didattico: in un problema bisogna fare delle operazioni, preferibilmente somme perché sono più facili, per far vedere alla maestra che siamo bravi. In realtà i numeri che i due studenti scrivono accanto alle colonne, cioè la somma maschi più femmine, non ha utilità alcuna per la risoluzione del quesito. Addirittura questa somma potrebbe avere potere fuorviante, ma fortunatamente viene ignorata dalla coppia, come dimostrano le loro parole nell'intervista.

4.10. D24 Il tempo


D24. Osserva la tabella.

TEMPO DEL MESE DI GIUGNO			
SERENO	POCO NUVOLOSO	NUVOLOSO	PIOGGIA
11 GIORNI	6 GIORNI	9 GIORNI	4 GIORNI

Il grafico rappresenta i dati riportati nella tabella, ma l'altezza di una colonna è sbagliata.
Indica con una crocetta la colonna sbagliata.

Fig. 14 – Il testo dell'item D24 di grado 2 del 2019

ISBN 9788835125235

L’ambito prevalente è sempre Dati e previsioni e la dimensione è Risolvere problemi. Lo scopo della domanda è quello di individuare l’errore in un grafico a colonna che riporta i dati di una tabella. Per riconoscere la colonna non corretta nel grafico, il bambino deve confrontare ogni dato numerico fornito in tabella con la corrispondente barra del grafico, e tenere conto della scala non unitaria utilizzata. Una difficoltà potrebbe essere determinata dal fatto che la colonna da individuare ha una lunghezza intermedia rispetto alla griglia proposta. Il quesito è stato risolto correttamente dal 67,5% del campione nazionale e nella nostra classe da 6 coppie su 12.

Una coppia durante l’intervista mostra ancora una volta una delle due alunne che argomenta correttamente, anche se con qualche esitazione, nel leggere il valore preciso sull’asse y. La compagna tace e dà l’impressione di non seguire. Così, mentre osserva la tabella la prima bambina afferma: “È sbagliato *nuvoloso* perché… qui sono nove giorni e qui sei giorni e mezzo… sette giorni”.

In diverse interviste abbiamo riscontrato qualche difficoltà a leggere le unità di misura sull’asse y, già evidenziata negli item D4 e D19.

5. Conclusioni

Le Nuove Indicazioni pongono lo sviluppo della competenza argomentativa tra i traguardi fondamentali dell’educazione matematica, pertanto una didattica fondata sulla valorizzazione di procedimenti e argomentazione è auspicabile fin dagli anni della scuola dell’infanzia.

L’argomentazione diventa una competenza cruciale, perché viene intesa come il portare argomenti a favore o a sfavore di una posizione, ma anche utilizzare nel nostro caso argomenti che devono essere prodotti in “matematichese”: utilizzare cioè un linguaggio specifico, che nel corso del prosieguo degli anni andrà a incrementarsi di volta in volta.

Abituare il bambino all’argomentazione, a spiegarsi il perché delle cose, lasciare al bambino il tempo di perdere tempo, per dirla come diceva Emma Castelnuovo, è alquanto complicato e talvolta mette in difficoltà gli stessi insegnanti.

È lo stesso punto di vista espresso da Pietro Di Martino:

> Eppure difficilmente si costruiscono a scuola occasioni di discussione e di argomentazione proprio in Matematica. Di conseguenza, i ragazzi raramente si assumono la responsabilità di quello che fanno, dei loro errori: alla domanda “perché hai fatto così?” (tra l’altro fatta esclusivamente quando l’allievo sbaglia, come

ISBN 9788835125235

se argomentare il perché fosse importante solo se la risposta è sbagliata) le risposte più comuni sono del tipo: "perché me l'hai detto tu" […] A qualsiasi età, se gli allievi non sono abituati a essere stimolati ad argomentare, le prime volte che viene loro richiesto sono perplessi, disorientati, non capiscono l'obiettivo della richiesta. Per esempio, come dicevamo, hanno difficoltà a spiegare come hanno fatto a fare una cosa. Dobbiamo stimolarli con continuità ad argomentare, perché è solo argomentando che si impara ad argomentare: ed è un processo lento, ma continuo (Di Martino, 2015).

A conclusione del nostro lavoro siamo sempre più convinti della validità dei testi dei quesiti INVALSI. Essi non sono mai banali e possiedono il grado giusto di difficoltà per "mettere in crisi" in senso positivo i nostri alunni.

Difficile resta la valutazione. È indispensabile il colloquio individuale con lo studente che, partendo dal suo elaborato, approfondisca le sue motivazioni e i suoi ragionamenti.

Questi colloqui non sono solo valutativi ma anche e soprattutto formativi; in più di un caso, infatti, abbiamo assistito a passi avanti decisivi nella comprensione della situazione problematica da parte dell'alunno (Grugnetti, 2002).

Mentre scriviamo queste conclusioni i quotidiani nazionali riportano i risultati della rilevazione PISA 2018, che ha avuto come ambito principale la competenza in lettura, *reading literacy*. Qualcuno potrebbe chiedersi cosa c'entrano questi risultati con l'argomento del nostro contributo.

La risposta appare evidente dal titolo di Repubblica (3 dicembre 2019): "Scuola, rapporto OCSE-PISA: solo uno studente su 20 sa distinguere tra fatti e opinioni".

È importante ricordare che la competenza in Lettura – la *reading literacy* – non è certo quella del "fine dicitore", bensì si riferisce alla comprensione, all'utilizzo e alla riflessione su testi scritti al fine di raggiungere i propri obiettivi, alla capacità di sviluppare le proprie conoscenze e le proprie potenzialità e di svolgere un ruolo attivo nella società. Tradotto in Matematica significa distinguere i *dati* di un problema da un'*ipotesi risolutiva*, oppure una *congettura* da un *teorema*, cioè *argomentare*.

I livelli di Lettura che ci interessano e che sarebbero funzionali alla risoluzione e argomentazione, relativamente ai problemi di Matematica, sono i più alti, il 5 e il 6.

Il livello 5 corrisponde a queste competenze:

I lettori sono in grado di comprendere testi lunghi, deducendo quali informazioni sono rilevanti. Possono eseguire ragionamenti causali o di altro tipo basati su una profonda comprensione di testi estesi. Possono anche rispondere a domande indirette

ISBN 9788835125235

deducendo la relazione tra la domanda e una o più informazioni distribuite all'interno o tra più testi e fonti; stabilire distinzioni tra contenuto e scopo, e tra il fatto e l'opinione applicati a dichiarazioni complesse o astratte.

Il livello 6 corrisponde a queste competenze:

I lettori sono in grado di comprendere testi lunghi e astratti in cui le informazioni di interesse sono profondamente integrate e solo indirettamente collegate al compito. Sono in grado di confrontare, contrapporre e integrare informazioni che rappresentano prospettive multiple e potenzialmente conflittuali, attraverso inferenze sulle fonti di informazione, i loro interessi espliciti o acquisiti, e altri indizi sulla validità delle informazioni.

Ci interessano molto anche i "formati" dei testi che gli allievi sono chiamati a "leggere", in particolare i testi non continui (elenchi, tabelle, grafici ecc.) e i testi misti (relazioni corredate da grafici e tabelle). Si tratta proprio dei testi dei nostri problemi di Matematica, quelli buoni dei libri di testo buoni, quelli delle gare di Matematica, quelli dei nostri quesiti INVALSI.

Ci interessano molto anche i vari tipi di testi: quello descrittivo (che risponde a domande del tipo: "che cosa?"), quello narrativo (che risponde a domande del tipo: "quando?"), quello espositivo (che risponde a domande del tipo: "come?"), quello regolativo (che fornisce istruzioni) e soprattutto quello argomentativo (che risponde a domande del tipo: "perché?"). Infine il tipo più nuovo di testo che ci interessa è quello comunicativo o transazionale, che riguarda lo scambio di informazioni.

Ci sarebbe molto lavoro da fare a cavallo tra Matematica e lingua, tra comprensione e comunicazione, tra logica e intuizione.

Concludiamo con le parole di Antonella Montone (2019):

Per la Matematica, così come per le altre discipline, diventa necessaria una formazione degli insegnanti, sia in ingresso sia in itinere, indirizzata verso un nuovo modo di interpretare la disciplina, in grado di rompere gli stereotipi di disciplina arida, meccanica e fatta di formule per renderla agli occhi degli studenti interessante e utile, anche per il raggiungimento degli obiettivi della realtà quotidiana così da avvicinarli alla sua "bellezza"… Non servono ulteriori riforme, ma maggiori energie… da impiegare nella politica scolastica e nella formazione degli insegnanti.

ISBN 9788835125235

Riferimenti bibliografici

Baccaglini-Frank A., Ramploud A., Bartolini Bussi M. (2012), *Informatica zero. Un percorso formativo per gli insegnanti di scuola dell'infanzia e primaria*, Edu-Touch.

D'Amore B. (1999), *Elementi di didattica della Matematica*, Pitagora, Bologna.

D'Amore B. (2002), "Basta con le cianfrusaglie!", *La Vita Scolastica*, 8, pp. 14-18.

Di Martino P. (2015), *Laboratorio congiunto di italiano e matematica*, IC Massa, testo disponibile al sito: http://icdonmilanimassa.gov.it/attachments/article/360/2015_03_11_Massa%20secondo%20incontro%20def.pdf, data di consultazione 3/2/2021.

Di Martino P. (2015), "Matematica: l'importanza di argomentare", intervista di Daniele Gouthier in *Science magazine*, 4, febbraio, testo disponibile al sito: https://it.pearson.com/, data di consultazione 3/2/2021.

DPR 12 marzo 1985 n. 104, testo disponibile al sito: archivio.pubblica.istruzione.it/.../allegati/dpr104_85.doc, data di consultazione 3/2/2021.

Grugnetti L. (2002), "Aspetti storici ed epistemologici dell'analisi infinitesimale", in N.A. Malara, IRRE Calabria (a cura di), Educazione Matematica e sviluppo sociale, Rubettino, Soveria Mannelli.

INVALSI (2018), Quadro di riferimento delle prove INVALSI di Matematica, testo disponibile al sito: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf, data di consultazione 3/2/2021.

INVALSI (2019), *Guida alla lettura prova di matematica classe seconda scuola primaria*, testo disponibile al sito: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2019/Guida_lettura_G02_MAT_2019.pdf, data di consultazione 3/2/2021.

INVALSI (2019), *Prova di matematica classe seconda scuola primaria*, testo disponibile al sito: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2019/02_Matematica_Fasc_01.pdf, data di consultazione 3/2/2021.

Malara N. (2016), *Dimostrazione e insegnamento dell'algebra*, testo disponibile al sito: http://www.progettoaral.it/wp-content/uploads/2016/09/Malara-Dimostraziine-2009.pdf, data di consultazione 3/2/2021.

MIUR (2012), *Indicazioni nazionali di infanzia e primo ciclo*, testo disponibile al sito: http://www.miur.gov.it/-/indicazioni-nazionali-di-infanzia-e-primo-ciclo-piu-attenzione-alle-competenze-di-cittadinanza, data di consultazione 3/2/2021.

MIUR (2017), *Indicazioni nazionali e nuovi scenari*, testo disponibile al sito: https://www.miur.gov.it/documents/20182/0/Indicazioni+nazionali+e+nuovi+scenari/, data di consultazione 3/2/2021.

Montone A. (2019), "Riflessione sui risultati OCSE-PISA 2018", *MaddMaths!*, testo disponibile al sito: http://maddmaths.simai.eu/didattica/ocse-pisa-2018/, data di consultazione 3/2/2021.

Ministero della pubblica istruzione, Decreto 3 giugno 1991: *Orientamenti dell'attività educativa nelle scuole materne statali*, testo disponibile sul sito: www.gazzettaufficiale.it/eli/id/1991/06/15/091A2596/sg, data di consultazione 3/2/2021.

Pellerey M. (1992), "Tendenze nella ricerca in didattica e in psicologia della matematica", Annali della Pubblica istruzione, 5/6, pp. 532-552.

ISBN 9788835125235

2. *I giochi matematici come strumento di apprendimento di competenze diversificate e durature*

di Valentina Vaccaro, Maria Francesca Ambrogio

In questo capitolo si mostreranno i risultati ottenuti con una sperimentazione volta a indagare l'importanza dell'uso dei giochi matematici come strumento fondamentale per tutti i protagonisti dell'insegnamento/apprendimento e il loro impatto sui risultati delle prove INVALSI.

Dopo un'attenta analisi dei fenomeni messi in luce dalla rilevazione nazionale dell'INVALSI per gli studenti del grado 2, ha preso avvio la ricerca-azione che ha coinvolto una ricercatrice in didattica della Matematica, una docente e i suoi studenti della classe prima della scuola primaria. La ricerca-azione ha avuto durata biennale (2017/2018 e 2018/2019) e proseguirà negli anni successivi con lo scopo di dare un contributo al miglioramento, anche se localizzato, dell'insegnamento della Matematica. Lo studio del Quadro di riferimento di Matematica proposto dall'INVALSI e dei processi richiesti dalle domande del grado 2 ha permesso di ideare, scegliere e costruire giochi che potessero sviluppare negli allievi le competenze suggerite dalle Indicazioni nazionali del 2012 (AA.VV., 2012).

L'analisi verterà sull'innovazione metodologica provocata dall'introduzione, in tutte le fasi del percorso di insegnamento/apprendimento, dei giochi di strategia e logica ripensati in chiave didattica. Si metteranno in relazione le metodologie e gli strumenti utilizzati nell'azione didattica con i risultati ottenuti dagli allievi coinvolti nello studio nella rilevazione nazionale INVALSI di grado 2 nell'a.s. 2018/2019. Dall'analisi dei dati si è potuto constatare un netto miglioramento rispetto a quelli relativi all'a.s. 2017/2018 per lo stesso grado scolastico; il miglioramento ha interessato tutte le sezione del grado 2 dell'istituto e, in particolare, la sezione nella quale si è condotta la sperimentazione, che ottiene, infatti, un punteggio nella scala del rapporto nazionale di 216,8 con un incremento di 38,9 punti rispetto all'anno precedente (30,4 di aumento percentuale del punteggio al netto del cheating).

ISBN 9788835125235

Le docenti della stessa interclasse condividono metodologie e strumenti ma soltanto nella classe considerata sono stati utilizzati sistematicamente i giochi matematici. Riguardo il confronto con gli esiti di riferimento, relativi all'anno scolastico 2017/2018, si tratta di dati relativi alla stessa sezione ma con docenti diversi e metodologie differenti nessuna riconducibile a un uso sistematico dei giochi matematici. Particolare rilievo verrà dato alle analogie e alle differenze tra la tipologia di giochi proposti e gli item della prova standardizzata considerando le modalità di verifica e di valutazione adottati durante il percorso di apprendimento.

In this chapter, we will show the results obtained through an experimentation aimed at investigating the importance of the use of Mathematical games as a fundamental instrument for every protagonist of teaching/learning process and their impact on the INVALSI tests results. After a careful analysis of the trends highlighted by the INVALSI national main study for grade 2 students, the research-action that involved a researcher in Math Education, a teacher and her first-grade students, lasted two years (2017/2018 and 2018/2019) and will continue in the following years aiming at contributing to improve the teaching of Mathematics at least for some teachers and students. The study of the Mathematics Framework proposed by INVALSI and the processes required by the grade 2 questions made it possible to design, choose and build games that could develop in the students the skills suggested by national guidelines (AA.VV., 2012). The analysis will cover the methodologic innovation that arouses from the introduction, in every phase of the teaching-learning process, of strategy and logic games seen under a didactic point of view. We will put in relation the methodologies and instruments used in the didactic action with the results obtained in the INVALSI national main study by the second-grade primary school students of 2018/2019 school year. The results emerged from the analysis showed a clear improvement compared with the ones achieved in the 2017/2018 school year by the same grade. The improvement affected all sections of grade 2 of the institute and, in particular, the section in which the experimentation was conducted. In fact, the class involved in the experimentation obtained a rate of 216.8 in the national report range, with an increase of 38.9 points compared to the results accomplished in the previous year (corresponding to a percentage of increase of 30.4, excluding cheating).

The teachers of the same Interclass share methodologies and tools but mathematical games have been used systematically only in the class considered. Regarding the comparison with the outcomes, relating to the 2017/2018 school year, these are data relating to the same section but with different

ISBN 9788835125235

teachers and different methodologies, none of which are attributable to a sistematical use of mathematical games.

We will particularly remark similarities and differences between the kind of games proposed and the items of the standardized test, considering the testing and assessment trend adopted during the learning process.

1. Metodologia

È noto che la costruzione del pensiero razionale inizia nei primi momenti del percorso del bambino e non avviene in astratto, ma attraverso l'esercizio. È quindi necessario proporre, incentivare e cogliere tutte le situazioni che possono formare il pensiero matematico, come: esplicitare in una situazione le cose sottintese o evidenti; elencare e classificare i casi possibili; concatenare le affermazioni; decomporre le difficoltà di un problema in passi semplici, e poi ricomporre i risultati parziali ottenuti; generalizzare i propri risultati trasferendoli anche in situazioni nuove; verificare le proprie ipotesi con esempi e contro-esempi; usare il costrutto "Se… Allora…" ecc. Tutte attività del *fare* Matematica. Ma, quando si sta *facendo* Matematica? Sicuramente si *fa* Matematica quando ci si trova davanti a un problema e provando a risolverlo si organizzano le informazioni, i dati a disposizione e con un lavoro di analisi delle relazioni esistenti tra gli elementi ci si fa strada verso la soluzione. Non è questo molto simile a quello che si fa con un buon gioco di strategia o di logica? (Bolondi e Vaccaro, 2017).

Nel 1979 Lucio Lombardo Radice scrisse: «ma perché qualche volta, per controllare quello che i vostri allievi hanno imparato, non fate in classe un'ora di palestra di giochi intelligenti, invece di interrogare? […] Giocare bene significa avere gusto per la precisione, amore per la lingua, capacità di esprimersi con linguaggi non verbali; significa acquisire insieme intuizione e razionalità, abitudine alla lealtà e alla collaborazione» (Radice, 1979). In questo passaggio, l'autore suggerisce di usare il gioco come verifica e, quindi, come parte fondamentale del processo di insegnamento/apprendimento.

L'uso dei giochi permette di trasformare la classe in un laboratorio dove «la devoluzione scatta necessariamente perché l'insegnante stimola e sparisce, lasciando al bambino una grande responsabilità. La sua implicazione lo porta a esperire in prima persona, rischiando» (D'Amore, 2005).

È necessario scegliere con cura i giochi da utilizzare facendo in modo che soddisfino alcuni criteri consolidati con la pratica come, per esempio, essere rapidi e accessibili a tutti e, naturalmente, richiedere operazioni di tipo logico. Inoltre, se l'obiettivo è quello di introdurre nuovi argomenti o

ISBN 9788835125235

oggetti matematici, utilizzando i giochi, è necessario che questi permettano di presentare e sviluppare gli argomenti delle varie lezioni.

È importante ricordare che questo tipo di attività possono essere proposte già ai bambini delle prime classi perché per risolvere il problema che presentano questi giochi o, più semplicemente, per giocare con i giochi di strategia non occorre avere competenze matematiche specifiche (Marazzani, 2001).

2. La ricerca

Il lavoro di ricerca che sarà esposto nel seguito è iniziato quasi tre anni fa e non è un progetto extrascolastico, ma è il tentativo di integrare nella didattica quotidiana una metodologia innovativa spesso relegata a brevi interludi all'interno del processo di insegnamento/apprendimento: l'uso dei giochi matematici come veicolo per l'apprendimento di competenze durature.

Prima di poter utilizzare questa metodologia è necessario acquisire consapevolezza sull'uso del gioco, spesso considerato molto distante dalla scuola, come strumento di apprendimento. L'idea di introdurre il gioco all'inizio del ciclo con una classe prima primaria si è dimostrata molto efficace al fine di integrarlo completamente nelle attività didattiche. Il successo dell'azione didattica così impostata ha fatto sì che si continuasse a lavorare in tal senso anche nella classe seconda e sicuramente si proseguirà fino alla fine del ciclo.

Utilizzare in classe giochi di strategia, offre la possibilità di osservare gli allievi mentre mettono in pratica le procedure tipiche del pensiero matematico, adeguando l'insegnamento all'apprendimento di ciascuno senza rallentare o interferire con il lavoro della classe. Mentre gli studenti interagiscono, il docente è libero di valutare i processi e non solo i risultati. Per tenere traccia di ciò che accade durante le sessioni di gioco, svolte con la classe suddivisa in gruppi, si può utilizzare una tabella o si possono videoregistrare le sessioni di gioco.

Nel nostro caso è stata costruita una griglia (tab. 1) compilata utilizzando gli indicatori dei livelli di competenza per il primo ciclo di istruzione (tab. 2). Al termine del percorso sono state valutate le competenze acquisite da ogni singolo alunno e registrate su un apposito diagramma circolare «matrice per i profili di competenza» (Carpignano *et al.*, 2016) (fig. 1) e sulla base dei dati ottenuti, step by step, sono state ricalibrate le attività.

ISBN 9788835125235

Tab. 1 – Griglia di valutazione

Alunni / *Obiettivi*	*Gioele*	*Andreaa*	*Matilde*	*Fabio*	*Aurora*
1	B	B	A	B	C
2	A	B	B	C	C
3	A	A	A	B	B
4	B	A	B	B	B
5	A	A	A	A	B
6	A	B	A	C	D
7	A	B	B	B	B

Tab. 2 – Indicatori dei livelli di competenza per il primo ciclo

Legenda livelli di competenza MIUR	
A (avanzato)	L'alunno/a svolge compiti e risolve problemi complessi, mostrando padronanza nell'uso delle conoscenze e delle abilità; propone e sostiene le proprie opinioni e assume in modo responsabile decisioni consapevoli
B (intermedio)	L'alunno/a svolge compiti e risolve problemi in situazioni nuove, compie scelte consapevoli, mostrando di saper utilizzare le conoscenze e le abilità acquisite
C (base)	L'alunno/a svolge compiti semplici anche in situazioni nuove, mostrando di possedere conoscenze e abilità fondamentali e di saper applicare basilari regole e procedure apprese
D (iniziale)	L'alunno/a, se opportunamente guidato/a, svolge compiti semplici in situazioni note

La restituzione di una valutazione agli alunni favorisce l'apprendimento, ma la valutazione esterna, possibile grazie alle Rilevazioni nazionali realizzate dall'Istituto INVALSI, ha permesso di analizzare gli effetti della sperimentazione senza l'ingerenza della docente-ricercatrice nel processo di verifica e valutazione. L'accesso completo alla prova INVALSI di seconda primaria, al quadro di riferimento e a tutto il materiale rilasciato, hanno permesso un'analisi approfondita delle analogie tra i giochi proposti durante il percorso scolastico e le domande della prova. La quantità dei dati restituiti sia aggregati che sui singoli item è stata fondamentale per la rilettura critica degli errori fatti dagli alunni.

ISBN 9788835125235

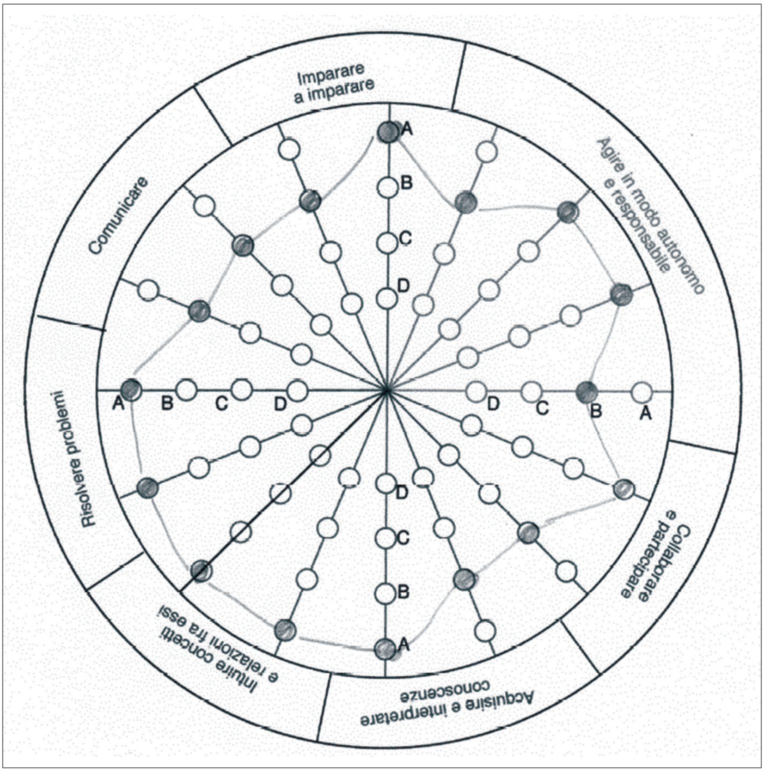


Fig. 1 – Matrice per i profili di competenza

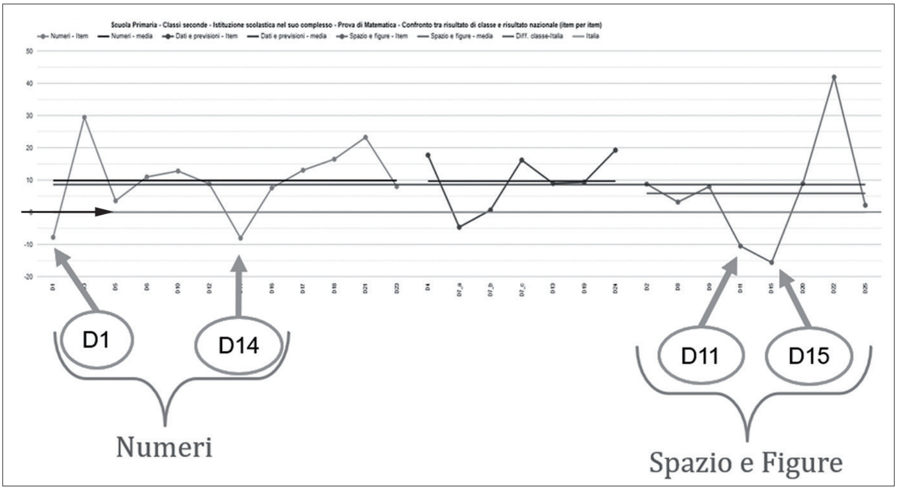


Fig. 2 – Estratto del grafico dei risultati restituiti item per item a.s. 2018/2019

ISBN 9788835125235

I dati in figura 2 sono una parte dei risultati item per item relativi alla classe interessata dalla sperimentazione; gli allievi, infatti, nell'anno scolastico 2018/2019 hanno frequentato il secondo anno di scuola primaria e preso quindi parte alla rilevazione nazionale. Dopo aver avuto i risultati della rilevazione, a distanza di alcuni mesi, agli allievi, ormai in terza, sono state riproposte alcune delle domande, presentate come nuove, lasciando che rispondessero e in seguito argomentassero eventuali errori.

Prima di considerare i risultati complessivi, si analizzano tre dei quattro item che hanno avuto risultati sotto la media nazionale, indicata, in figura 2, da una freccia orizzontale.

D14. Benedetta compra un giocattolo.

Paga con questi soldi.

Riceve una moneta da 2 euro di resto.

Quanto costa il giocattolo?

Risposta: ......13...... euro

Fig. 3 – Prova nazionale seconda primaria a.s. 2018/2019 fascicolo 1 domanda 14

I giochi proposti con scopo analogo a quello dell'item in figura 3 sono giochi di ruolo in cui gli studenti hanno materialmente operato con acquisti e vendite in situazioni reali simulate in classe.

Il punteggio registrato dalla classe è inferiore alla media nazionale di circa l'8%.

Si è deciso di analizzare i fascicoli degli studenti che sbagliano e di riproporre loro il quesito. Sette studenti tra quelli che hanno sbagliato contano solo le banconote o le banconote e la moneta ignorando la richiesta e scrivono quindi 15 o 17.

Riproposta la domanda, in un'intervista individuale realizzata dalla docente-ricercatrice per interpretare al meglio gli errori, quattro studenti tra coloro che hanno sbagliato rispondono correttamente.

ISBN 9788835125235

Fig. 4 – Prova nazionale seconda primaria a.s. 2018/2019 fascicolo 1 domanda 11

I giochi proposti con scopo analogo a quello dell'item in figura 4 sono giochi in cui gli studenti hanno lavorato su un reticolo costruito sul pavimento dell'aula. Sono state proposte attività sul reticolo a pavimento 5x5 sia per la scomposizione di numeri che per le operazioni; il reticolo è stata utilizzato, in particolar modo, quando sono stati introdotti i concetti di riporto e prestito. I numeri disposti in grandi caselle hanno sostituito il quadretto del quaderno e reso più semplice l'operazione a coloro i quali avevano bisogno di un approccio differente. Giochi sulla lateralizzazione sono stati quelli introdotti con attività di coding: Cody Roby e Cody Word. Sono stati effettuati

ISBN 9788835125235

percorsi utilizzando la robotica educativa e le frecce direzionali. Il reticolo è stato utilizzato anche per costruire gli ideogrammi utilizzando dei quadretti colorati che corrispondevano a un'unità.

Le interazioni con questo strumento sono state molteplici, con scopi differenti e in contesti diversi, e si sono protratte per entrambi gli anni di sperimentazione aumentando gradualmente la difficoltà delle richieste. Ad esempio per alcune attività lo studente doveva muoversi sul reticolo seguendo le indicazioni verbali di altri compagni; questo tipo di attività ripropone esattamente quella dell'item e poiché il punteggio registrato dalla classe è inferiore alla media nazionale di circa il 9%, si è deciso di analizzare i fascicoli degli studenti che hanno sbagliato e di riproporre il quesito per interpretare gli errori.

Solo tre studenti tra quelli che hanno sbagliato commettono l'errore classico riferendo il reticolo alla loro posizione. Tra le altre risposte errate risulta particolarmente interessante: sinistra, destra, destra e si è quindi riproposto il quesito agli alunni. Questa operazione ha permesso di capire che gli allievi identificavano come primo incrocio quello in prossimità dello stop, il quadrivio, di conseguenza rispondevano così: si svolta a sinistra, poi a destra e ancora a destra.

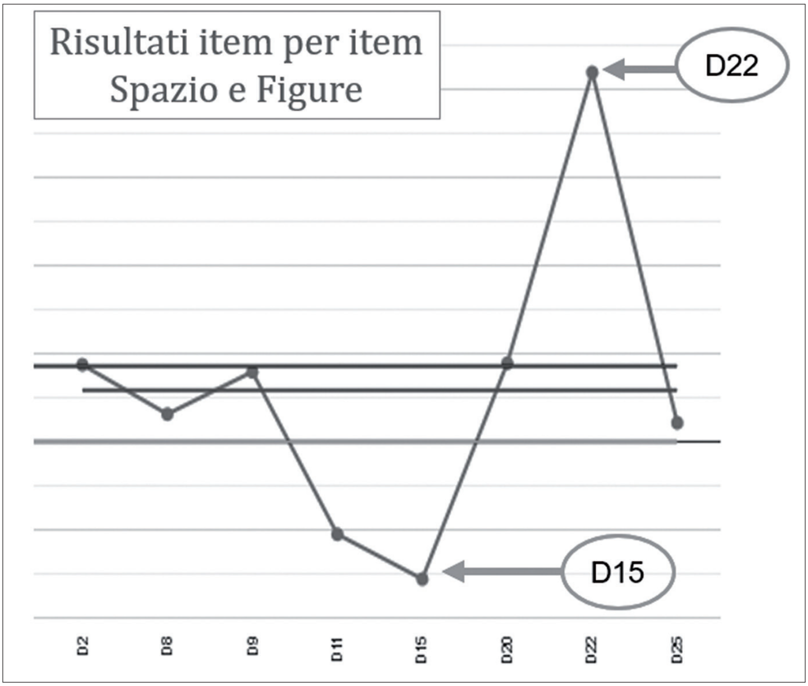


Fig. 5 – Estratto del grafico dei risultati restituiti item per item a.s. 2018/2019

ISBN 9788835125235

Particolare curiosità hanno suscitato i dati relativi a queste due domande che hanno lo stesso traguardo ("Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo"), lo stesso obiettivo ("Comunicare la posizione di oggetti nello spazio fisico, sia rispetto al soggetto, sia rispetto ad altre persone o oggetti, usando termini adeguati (sopra/sotto, davanti/dietro, destra/sinistra, dentro/fuori") e la stessa dimensione ("Conoscere"), ma hanno avuto risultati lontanissimi tra loro: l'item D15 ha avuto una percentuale di risposte corrette nella classe analizzata di 44,5% mentre l'item 22 ha avuto una percentuale di risposte corrette dell'88,2% con una differenza di 43,7 punti percentuale che diventa ancora più interessante se si leggono questi dati in riferimento alla media nazionale, infatti, l'item D15 si colloca al di sotto della media nazionale del 15,1% mentre l'item D22 la supera del 44,1%.

Fig. 6 – Prova nazionale seconda primaria a.s. 2018/2019 fascicolo 1 domanda 15

Lo scopo di questa domanda è quello di distinguere una forma posta in diverse posizioni nel piano dalla sua speculare.

I giochi utilizzati in classe assimilabili allo sviluppo di tali competenze sono molti (giochi al reticolo, giochi alla LIM, Pixel Art, attività alla LIM: ZAPLY CODE, giochi sulle impronte e sulle ombre), in particolare l'uso di supporti come la LIM (lavagna interattiva multimediale), il reticolo a pavimento e la palestra hanno permesso loro di fare esperienza di impronte nelle

ISBN 9788835125235

più svariate posizioni, ma i nove allievi che hanno sbagliato continuano a sbagliare anche quando la domanda viene loro riproposta.

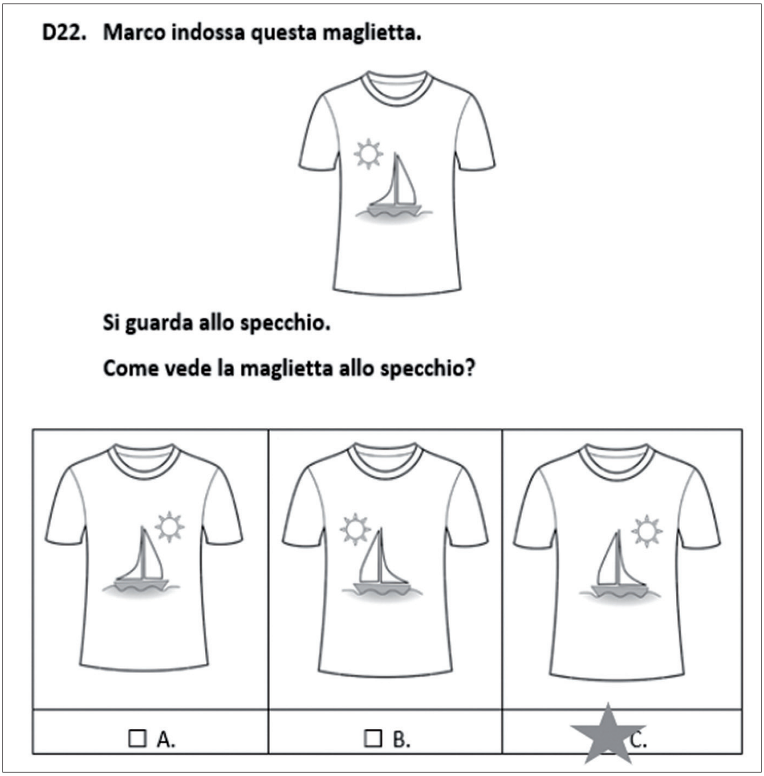


Fig. 7 – Prova nazionale seconda primaria a.s. 2018/2019 fascicolo 1 domanda 22

In questa domanda lo scopo è quello di riconoscere l'immagine speculare a un'immagine data. I giochi utilizzati in classe assimilabili allo sviluppo di tali competenze sono analoghi a quelli coinvolti nel quesito precedente, ma questa è sicuramente una formulazione con minori difficoltà, le immagini sono tutte in posizione standard così come si trovano sui libri di testo e come si è abituati a pensarle e vederle rappresentate. Sbagliano, infatti, solo due allievi che nell'intervista a posteriori rispondono correttamente. La percentuale delle risposte corrette nella classe analizzata è dell'88,2%, il doppio rispetto all'analoga percentuale relativa al dato del campione nazionale.

Si analizzeranno nel seguito altri due item, oltre quello appena visto, dei cinque che hanno avuto risultati significativamente sopra la media nazionale, indicata, in figura, da una freccia orizzontale.

ISBN 9788835125235

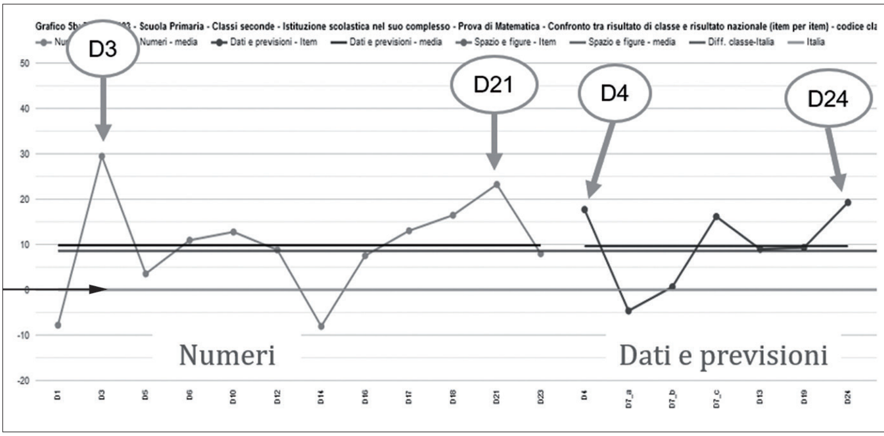


Fig. 8 – Estratto del grafico dei risultati restituiti item per item a.s. 2018/2019

È interessante notare come i giochi assimilabili allo sviluppo delle competenze richieste dalla domanda riportata in figura 9 (giochi al reticolo, La corsa al 20, Somma 15, giochi alla LIM) non la ricalcano esattamente, per cui si può affermare che gli studenti hanno dimostrato di aver acquisito le competenze richieste con questa domanda.

D3. Alberto pensa un numero, aggiunge 25 e ottiene 43. Quale numero ha pensato?

A. ★ 18

B. ☐ 68

C. ☐ 28

Fig. 9 – Prova nazionale seconda primaria a.s. 2018/2019 fascicolo 1 domanda 3

Lo scarto tra la percentuale di risposte corrette a livello nazionale e quelle della classe è particolarmente significativo: 31,3%.

Inoltre, due dei tre allievi che sbagliano hanno scelto l'opzione C (rileva un errore di calcolo nel quale lo studente sottrae due dal quattro senza tener conto del prestito di una decina alle unità) il terzo ha scelto l'opzione B (fa la somma di 25 e 43, non riconoscendo il significato del termine "aggiunge" nel contesto dato). Il procedimento è stato, quindi, recepito dalla quasi totalità della classe.

ISBN 9788835125235

D4. Al termine delle gare sportive del Campeggio "Acquamarina" l'istruttore legge i risultati.

> **La squadra GIALLA ottiene 40 punti.**
> **La squadra VERDE ottiene 10 punti in meno della squadra ARANCIONE.**

Completa il grafico scrivendo i nomi delle squadre.

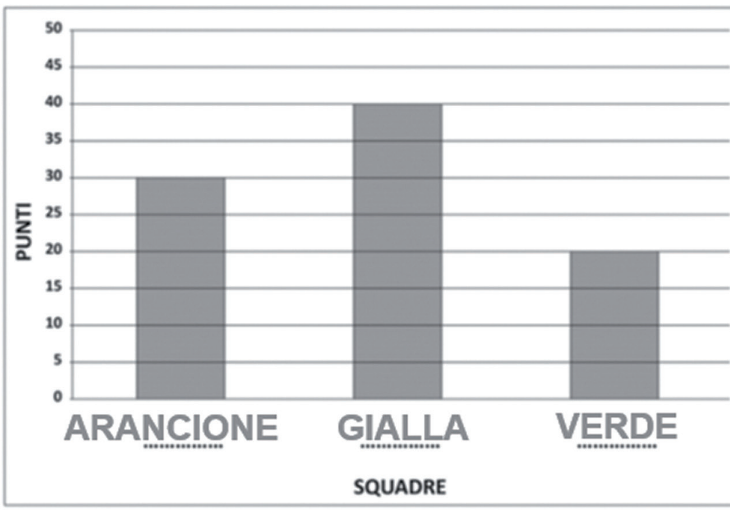


Fig. 10 – Prova nazionale seconda primaria a.s. 2018/2019 fascicolo 1 domanda 4

I giochi proposti (tutti i tipi di gioco con regole e punteggi) assimilabili allo sviluppo delle competenze richieste anche in questo caso non ricalcano esattamente la domanda.

Lo scarto tra la percentuale di risposte corrette a livello nazionale e quelle della classe non è alto come nel caso precedente, ma non è neppure trascurabile: 19,5%.

Gli errori commessi sono molto diversi tra loro: due dei quattro allievi che sbagliano scrivono Verde – Gialla – Arancione; gli altri due alunni scrivono: 30 – 40 – 20 e Verde – Tutte le squadre – Arancione. Tutti gli errori sono riconducibili a una mancata o parziale lettura/comprensione del testo del quesito.

Discutere le domande con gli allievi ha permesso di ottenere un'idea più precisa delle difficoltà avute negli item sotto la media nazionale. Sicuramente la componente psicologica e la scarsa attenzione a quesiti ritenuti più

ISBN 9788835125235

semplici hanno influito sulle performance, ma guardando la prova nel suo insieme si può constatare che il metodo utilizzato ha permesso di trattare tutti i contenuti valutati dalla rilevazione nazionale con ottimi risultati.

Tavola 1B Matematica

2018

Istituto nel suo complesso								
Classi/Istituto	Media del punteggio percentuale al netto del cheating[1a]	Percentuale di partecipazione alla prova di Matematica[1b]	Esiti degli studenti al netto del cheating nella stessa scala del rapporto nazionale[1d]	Punteggio Piemonte (47,4)[5]	Punteggio Nord ovest (47,0)[5]	Punteggio Italia (46,7)[5]	Punteggio percentuale osservato[6]	Cheating in percentuale[7]
1	40,0	78,9	187,9	↓	↓	↓	40,0	0,0
2	40,7	100,0	191,0	↓	↓	↓	40,7	0,0
3	34,8	95,2	177,9	↓	↓	↓	34,8	0,0
4	35,9	88,2	172,6	↓	↓	↓	36,0	0,1
5	35,7	83,3	178,7	↓	↓	↓	35,7	0,0
ISTITUTO	37,5	89,5	182,0	↓	↓	↓	37,5	0,0

Tavola 1B Matematica

2019

Istituto nel suo complesso								
Classi/Istituto	Media del punteggio percentuale al netto del cheating[1a]	Percentuale di partecipazione alla prova di Matematica[1b]	Esiti degli studenti al netto del cheating nella stessa scala del rapporto nazionale[1d]	Punteggio Piemonte (57,7)[5]	Punteggio Nord ovest (57,2)[5]	Punteggio Italia (56,6)[5]	Punteggio percentuale osservato[6]	Cheating in percentuale[7]
1	62,2	95,0	209,8	↑	↑	↑	62,2	0,0
2	59,1	94,7	203,6	↔	↑	↑	59,1	0,0
3	65,2	89,5	216,8	↑	↑	↑	67,5	3,4
4	64,1	100,0	216,7	↑	↑	↑	64,1	0,0
5	61,1	88,9	209,8	↑	↑	↑	61,1	0,0
ISTITUTO	62,4	93,8	211,4	↑	↑	↑	62,8	0,6

Fig. 11 – Confronto risultati delle seconde negli anni scolastici 2017/2018 e 2018/2019

Dall'analisi dei dati si è notato un netto miglioramento rispetto a quelli relativi all'a.s. 2017/2018 per lo stesso grado scolastico.

La sezione nella quale si è condotta la sperimentazione ottiene, infatti, un punteggio nella scala del rapporto nazionale di 216,8 con un incremento di 38,9 punti rispetto all'anno precedente. L'aumento percentuale è di oltre 30 punti al netto del cheating.

Il conforto della valutazione esterna con la quale è stato possibile confrontarsi, al termine di questi primi due anni, è stato determinante per la decisione di proseguire con questo tipo di attività.

Sicuramente non è semplice costruire una didattica utilizzando solo i giochi, mancano libri di testo organizzati in tal senso e la valutazione dei processi, seppur incoraggiata dai ricercatori, è ancora lontana dalla prassi scolastica.

ISBN 9788835125235

Senza generalizzare troppo, si può affermare che i risultati avuti in una classe in cui gli studenti hanno prestazioni nella media e con un background socioeconomico medio-basso ci fanno ben sperare sulla validità del metodo utilizzato.

Risultano, inoltre, particolarmente interessanti le risposte dell'alunno, con gravi problemi di natura comportamentale, che si è trasferito nella classe all'inizio del secondo anno. Nel dettaglio si vede che risponde correttamente a dodici domande.

In particolare risponde correttamente a quelle domande che hanno avuto risultati sotto la media nazionale, indicate da una freccia (tab. 3), e questo conferma l'ipotesi che gli altri studenti le abbiano sottovalutate non prestandovi la dovuta attenzione. Le domande indicate dagli asterischi sono quelle che hanno avuto un punteggio molto al di sopra della media nazionale nelle quali questo allievo ha incontrato maggiori difficoltà.

Tab. 3 – Risposte dell'alunno certificato

→	D1	29	D14	8	←
	D2	Ricopia correttamente la figura	D15	3	←
*	D3	A	D16	B	
*	D4	30 – 40 – 20	D17	A	
	D5	3	D18	B	
	D6	15	D19a	V	
	D7a	Aprile	D19b	F	
	D7b	3	D19c	F	
	D7c	6	D19d	V	
	D8	B	D20	C	
	D9	15	D21	A	*
	D10	A	D22	B	*
→	D11	DX-SX-DX	D23	A	
	D12	A	D24	Sereno	*
	D13	Inserisce solo Elena	D25	B	

ISBN 9788835125235

In ogni caso, superate le difficoltà iniziali, l'uso dei giochi ha permesso l'integrazione dell'alunno nel gruppo classe veicolando l'aggressività dello stesso verso la ricerca della strategia vincente e gli hanno fatto acquisire alcuni concetti matematici basilari di cui era deficitario, pur essendo ripetente. Questo è sicuramente un valore aggiunto che ha superato di gran lunga le aspettative sull'uso di questa metodologia. L'errore nel gioco assume una dimensione differente, accettabile; il mutato atteggiamento ci permette di accogliere il suggerimento di Popper: «evitare errori è un ideale meschino: se non osiamo affrontare problemi che siano così difficili da rendere l'errore quasi inevitabile, non vi sarà allora sviluppo della conoscenza. In effetti, è dalle nostre teorie più ardite, incluse quelle che sono erronee, che noi impariamo di più. Nessuno può evitare di fare errori; la cosa più grande è imparare da essi» (Popper, 1975).

Riferimenti bibliografici

AA.VV. (2012), *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*, testo disponibile al sito: http://www.indicazioninazionali.it/2018/08/26/indicazioni-2012/, data di consultazione 3/2/2021.

Bolondi G., Vaccaro V. (2017), "Matematica: mettiamoci in 'gioco'!", *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, 27, Supplemento 1, GRIM (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo), pp. 97-98.

Carpignano R., Cerrato G., Lanfranco D., Pera T., Roberti R.M. (2016), *Una scuola per la Competenza*, Il Baobab, l'albero della ricerca, Verbania.

D'Amore B. (2005), "Prefazione", in B. D'Amore, I. Marazzani (a cura di), *Laboratorio di matematica nella scuola primaria. Attività per creare competenze*, Pitagora, Bologna, pp. 1-10.

Lombardo Radice L. (1979), "Elogio del gioco", in *Il giocattolo più grande*, Giunti Marzocco, Firenze, testo disponibile al sito: https://mappeser.com/2015/10/12/lucio-lombardo-radice-elogio-del-gioco-in-il-giocattolo-piu-grande-giunti-marzocco-1979-p-104/, data di consultazione 3/2/2021.

Marazzani I. (2001), "Giochi di strategia", *La Vita Scolastica*, 3, pp. 41-45.

Popper K.R. (1975), "Conoscenza oggettiva", in *La teoria del pensiero oggettivo*, Armando, Roma.

ISBN 9788835125235

3. Una possibile clausola del contratto didattico per i problemi a "doppia lettura" nella scuola del I ciclo: l'effetto procedurale

di Laura Montagnoli, Chiara Pedini

Lo scopo del capitolo è offrire riflessioni didattiche per la scuola primaria nel contesto della risoluzione dei problemi, con riferimento specifico al testo e alle strategie risolutive dei problemi con doppia richiesta. In particolare si è indagato il comportamento degli alunni di fronte a un problema "a doppia lettura". Con tale espressione indichiamo le situazioni problematiche a doppia richiesta tali per cui la pianificazione della strategia risolutiva necessita di una profonda comprensione dello stimolo e delle domande, per non cadere nella tentazione di replicare acriticamente la risoluzione del primo item nel momento in cui si cerchi la risposta del secondo. Poiché molti quesiti INVALSI di grado 2 e 5 prevedono la doppia richiesta, il lavoro ha preso le mosse da un'analisi degli stessi. Ne è seguita una classificazione dei quesiti della primaria somministrati tra il 2009 e il 2018 sulla base delle relazioni tra il primo e il secondo item (richieste "a cascata", cioè strutturate in modo che la prima risposta fornisca elementi di riflessione per ottenere la seconda, problemi "a doppia lettura" oppure problemi in cui la risoluzione del secondo item rappresenta un modo per verificare la correttezza della risoluzione del primo). Ciò ha consentito di apprezzare le diverse formulazioni dei quesiti, anche con lo scopo di fornire spunti al docente di scuola primaria e di sollecitarlo a compiere una scelta più mirata dei problemi da sottoporre agli studenti, in relazioni agli scopi specifici che si prefigge. A seguito di tale analisi è stata progettata un'indagine a cui hanno preso parte 44 alunni di quarta primaria. Sono stati a essi somministrati due problemi, uno "a doppia lettura" (sulla "falsa additività" del perimetro) e uno "a cascata", entrambi collocati nel contesto della realtà. Attraverso questi due stimoli, curati nella formulazione, si vuole anche perseguire l'intento di diversificare la proposta standard, lasciando liberi gli studenti nella scelta della strategia risolutiva. L'attenzione è concentrata sull'analisi qualitativa, attraverso interviste effet-

ISBN 9788835125235

tuate dopo lo svolgimento dei due problemi, che indagano che cosa accade nel passaggio dalla prima alla seconda richiesta. Emerge che i bravi solutori hanno una buona comprensione delle specifiche situazioni e riescono a sfruttare la risposta alla prima domanda per figurarsi la risoluzione della seconda in modo critico. Le ragioni di tale successo sono riferibili oltre che alla comprensione profonda della situazione problematica anche all'ottimizzazione di calcolo rispetto alla scelta delle operazioni da svolgere. I cattivi solutori utilizzano la risposta alla prima domanda in modo non opportuno, mostrando una scarsa comprensione per una delle seguenti cause: lettura poco attenta del testo, interpretazione non esaustiva delle informazioni lette, scarso possesso degli strumenti di rappresentazione della soluzione.

The aim of this chapter is to offer didactic reflections on problem solving at a primary school level, with reference to the reading of texts and the useful strategies for a two-questions problem. We've particularly focused on the students' behaviour towards "double reading" problems. With this expression we refer to the problems in which a deeper understanding of both the text and the questions is required in order to avoid the complimentary appliance of the first solution for the purposes of finding a response to the second question. This work took shape from an analysis of many INVALSI questions of the second and fifth grade, which consist of two items. Then we classified the questions proposed by INVALSI from 2009 to 2018 regarding the relations between the first and the second item of each question ("drop-down" questions when the answer to the first item gives a line of thinking to obtain the answer to the second, "double reading" problems or with the second item resolution is a way to check the validity of the first). In this way we noticed the different formulations, providing points of reflection for the teachers in order to make them more aware of the choice of the problematic situations to submit to their students. Following this analysis and the results revealed, we designed and carried out a survey involving 44 fourth grade students. We gave them a "double reading" problem and a "drop-down" problem, both from a real-life context. With these two well formulated texts, we aimed to deviate from the standard proposal in order to appreciate each student's distinctive traits as well as the personal choice behind their strategy. The attention is placed on the qualitative data rather than the quantitative, thanks to the interviews taken after the problem solving done by the students, concerning the step between the first and the second items. The survey reveals that the good problem solvers correctly understood the specific situations and used their response to the first question to strategically plan a critical response to the second question. Furthermore they optimised the strategy in

ISBN 9788835125235

relation to their calculation ability. The bad problem solvers used their first answer in an inappropriate way, showing an insufficient understanding of the problematic situation for one of the following reasons: a careless reading of the text, an incomplete interpretation of the information presented in the text and a lack of control over the representation instruments.

1. Introduzione

I libri di testo, la prassi didattica, i questionari standardizzati, le Rilevazioni nazionali INVALSI sono enormi archivi da cui attingere problemi, sia nel senso proprio[1] di situazioni che pongono una meta da raggiungere e sfidano a trovare una strada per arrivarci, affrontando un terreno sconosciuto, sia nel senso improprio di esercizi di applicazione di conoscenze, di procedure, di abilità. Molti di questi sono problemi con più di una domanda e, spesso, l'ordine delle domande è funzionale a una certa procedura risolutiva, che è nella mente di chi ha pensato il problema. Di conseguenza non è raro riscontrare che le domande fungono da solco già tracciato per trovare le varie risposte, proprio nell'ordine in cui sono espresse le richieste.

Questo lavoro nasce dall'osservazione in classe (nella scuola secondaria di I grado) del fenomeno per cui gli alunni tendono a voler necessariamente utilizzare la risposta alla prima domanda, sfruttandola come nuovo dato con cui affrontare la risoluzione alla seconda domanda (lo stesso si dica per ogni ulteriore domanda e la successiva, se fossero più di due). Chiaramente molto spesso quest'abitudine è utile, ma vi sono problemi, che abbiamo denominato "a doppia lettura", in cui è anche possibile, e può essere più funzionale, tornare sulle informazioni iniziali (rileggere il testo o in generale lo stimolo) per affrontare la seconda richiesta. Per provare a indagare questo fenomeno, abbiamo inventato due situazioni problematiche e analizzato le risposte date da 44 alunni di classe quarta di scuola primaria (a.s. 2018/19). L'analisi delle risposte è stata sia quantitativa sia qualitativa con l'osservazione dei loro protocolli e con le interviste ai bambini.

Dei due problemi somministrati, uno era "a doppia lettura" e l'altro "a cascata", cioè con due domande legate tra loro dal fatto che la risposta alla prima era utile per affrontare la seconda sia a livello di pianificazione della procedura risolutiva sia per l'utilizzo del risultato trovato. Per entrambi i problemi, costituiti da uno stimolo testuale e due domande, la quantità di

[1] Per le definizioni di problema cui si riferisce l'abstract dell'articolo si possono consultare Polya (1945, 1979) e Duncker (1935).

ISBN 9788835125235

risposte corrette alla seconda richiesta è risultata minore rispetto al numero di risposte esatte alla prima, ma nel caso del problema “a doppia lettura” in modo più significativo. L’esiguo campione non prova alcunché, anche perché l’indagine è solamente a un primo step, tuttavia le riflessioni presenti nell’articolo possono stimolare ulteriori speculazioni negli insegnanti che siano interessati al tema.

Le interviste hanno mostrato molti diversi approcci, dai quali è emersa in modo limpido la capacità di immaginare la situazione come elemento essenziale per una corretta risoluzione.

A questa ricerca, da cui è nata la tesi di laurea della dott.ssa Pedini in Scienze della formazione primaria, abbiamo premesso un’analisi dei quesiti INVALSI di II e V grado dal 2009 al 2018, integrando successivamente con quelli del 2019, per completezza, che ha consentito una classificazione dei quesiti che avessero più di un item in merito al legame tra gli item stessi. Pur consapevoli del fatto che le domande INVALSI sono di per sé redatte in modo da rendere le risposte logicamente indipendenti, ne abbiamo ottenute quattro categorie, escludendo i quesiti in cui nel secondo item venisse chiesto di motivare la risposta fornita nell’item a (o di giustificarla, mostrare i calcoli, mostrare la procedura risolutiva ecc.): (1) quesiti con item indipendenti, (2) quesiti con item a strategia analoga, (3) quesiti con item a cascata e (4) quesiti a doppia lettura. Apriamo l’articolo con la descrizione di questa classificazione.

2. Classificazione dei quesiti INVALSI 2009/2019 di grado 2 e 5 con più di un item

La collocazione dei quesiti con più item in categorie che si distinguono in base al legame tra gli item stessi, talvolta, è risultata un compito piuttosto banale, mentre in alcuni casi ha richiesto dei passaggi interpretativi legati all’intuire quali procedure l’alunno metta in atto per la risoluzione.

Sono emerse cinque categorie, la prima delle quali è stata subito messa da parte perché poco interessante per gli scopi prefissati. I 44 quesiti del grado 2 e i 75 quesiti del grado 5, dotati di almeno due item, sono stati suddivisi come mostrato nelle tabella 1 (grado 2) e nella tabella 2 (grado 5).

ISBN 9788835125235

Tab. 1 – Classificazione dei quesiti di grado 2 con almeno due item degli anni 2009/2019 a seconda della relazione tra gli item

Grado 2	*Indipendenti*	*A strategia analoga*	*A cascata*	*A doppia lettura*
2009	6			
2010	22		6, 9	
2011	1, 5c, 9		7, 10	
2012	5, 20d	4	3, 7, 9c, 18	
2013	5ab	6c, 13c, 16d, 18	5c	
2014	4, 8, 14, 16	11c		6
2015	3c	8, 10, 17, 19	8	
2016		1, 2		
2017	2	25		4
2018	7c	21	24	
2019	7, 19			

Tab. 2 – Classificazione dei quesiti di grado 5 con almeno due item degli anni 2009/2019 a seconda della relazione tra gli item

Grado 5	*Indipendenti*	*A strategia analoga*	*A cascata*	*A doppia lettura*
2009	8, 25d	11d		
2010	9c	2, 10c, 19		
2011	17d, 21	1d, 4, 24ab, 28c, 29d		16
2012	2d, 19d	7, 20d, 21	12, 17, 25	
2013	4d, 6d, 9d, 19		18	
2014	2, 8, 17d, 24		13, 18	
2015	5c, 9c, 11d, 15d	15d, 28, 30	4, 20, 21	
2016	2c, 9d, 13d	29d	20, 31d	
2017	2c, 15c	22, 24d	10, 13	
2018	3c, 10, 11, 24		14, 21c	
2019	8, 12, 32	3, 11, 25		30

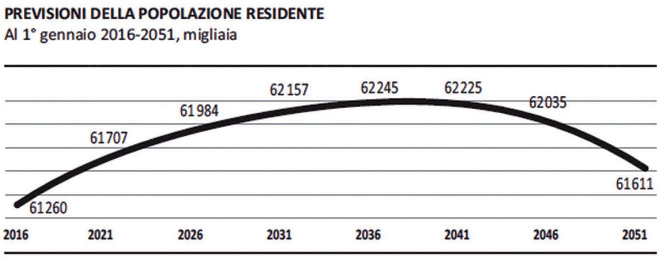
(0) Quesiti con item “di giustifica”: si tratta di situazioni con doppia domanda in cui la seconda richiesta vuole un’esplicitazione delle ragioni per cui si sia data una certa risposta alla prima (motiva, spiega, mostra i calcoli ecc.).

(1) Quesiti con item “indipendenti”: presentano uno stimolo al quale si riferiscono due o più domande diverse e non legate tra loro. Rientra in questa tipologia la quasi totalità degli item che mirano a verificare la capacità di “leggere e rappresentare relazioni e dati con diagrammi e tabelle”; tali quesiti

ISBN 9788835125235

chiedono un'analisi dello stimolo (diagramma, grafico ecc.) da più punti di vista. Un esempio è il D5 di grado 5 del 2015, riportato in figura 1. Costituiscono la maggior parte dei quesiti a più di una richiesta: 17 per il grado 2 e 30 per il grado 5.

D5. Il grafico rappresenta la previsione del numero di abitanti residenti in Italia dal 2016 al 2051.



a. A quanti abitanti corrispondono 61 260 migliaia di abitanti?

A. ☐ 61 260 abitanti

B. ☐ 612 600 abitanti

C. ☐ 6 126 000 abitanti

D. ☐ 61 260 000 abitanti

b. Quanti abitanti in più ci saranno nel 2036 rispetto al 2016?

Risposta: .... migliaia

c. Facendo riferimento al grafico, indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

		V	F
1.	Nel periodo dal 2016 al 2051 la popolazione italiana diminuisce	☐	☐
2.	Dal 2016 al 2036 la popolazione italiana aumenta	☐	☐
3.	Nel 2031 la popolazione italiana raggiunge il proprio massimo	☐	☐

Fig. 1 – Quesito D5 di grado 5 del 2015. Le diverse richieste mirano a verificare la capacità di leggere il grafico verificandone la corretta lettura di diversi aspetti

ISBN 9788835125235

(2) Quesiti con item "a strategia analoga": verificano la stessa competenza formulando una domanda simile o uguale ma relativa a dati differenti o posta in modo inverso. Ciò si verifica frequentemente per le richieste interpretative di differenti forme di rappresentazione dello stesso oggetto: generalmente un item esplora il passaggio da una forma di rappresentazione a un'altra e il secondo item inverte la richiesta. Un esempio è il quesito D25 di grado 2 del 2017 (figura 2). Sono 13 per il grado 2 e 21 per il grado 5.

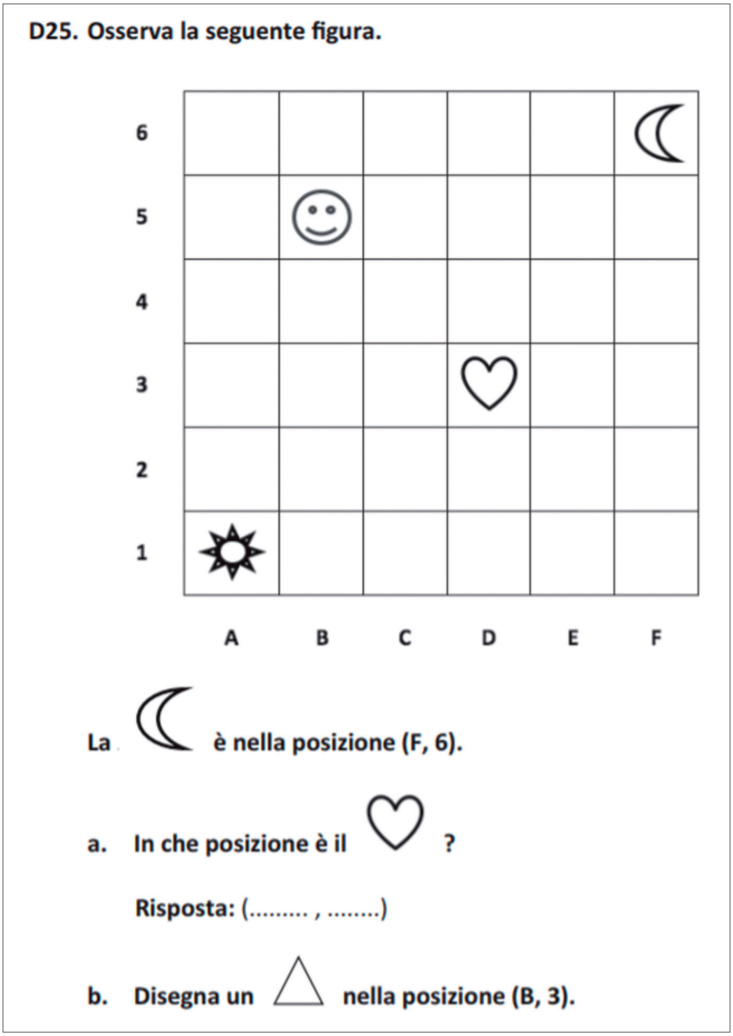
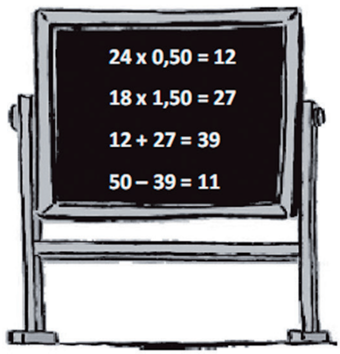


Fig. 2 – Quesito D25 di grado 2 del 2017. Pone la stessa richiesta, in modo inverso, per verificare la stessa competenza

ISBN 9788835125235

(3) Quesiti con item “a cascata”: esprimono generalmente due richieste consequenziali, in cui la prima è un passaggio necessario o intermedio per la seconda o ne è un aiuto alla comprensione oppure in cui la seconda richiede una generalizzazione della prima. Alcuni esempi sono mostrati nelle figure 3,4 e 5. Sono 12 per il grado 2 e 15 per il grado 5.

D4. La maestra ha risolto alla lavagna il problema “PANINI E PIZZETTE”.



a. Completa il testo del problema PANINI E PIZZETTE utilizzando i dati che sono scritti sulla lavagna.

PANINI E PIZZETTE

Anna prepara una festa.

Compra 18 panini che costano .... *euro* l’uno e compra .... pizzette che costano 0,50 *euro* l’una.

Anna paga con una banconota da .... *euro*.

Quanto riceve di resto Anna?

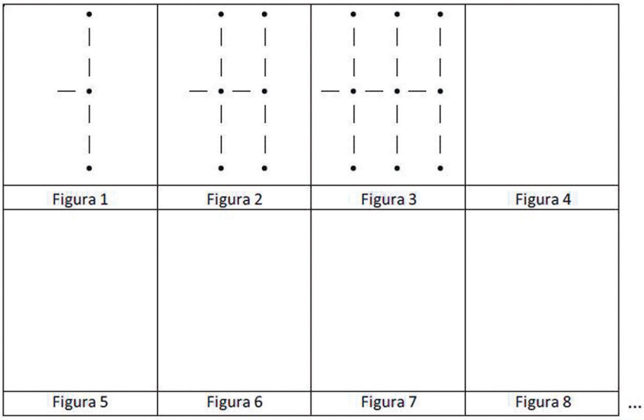
b. Dalla risoluzione del problema scritta alla lavagna trova quanto spende Anna per i panini e le pizzette.

Anna spende in tutto .... euro.

Fig. 3 – Quesito D4 di grado 5 del 2015. L’item a è un passaggio necessario per affrontare l’item b poiché occorre per riordinare le informazioni e dare loro significato. Per il campione nazionale la percentuale di risposte corrette è stata la seguente: item a 75,0%; item b 66,2%

ISBN 9788835125235

D17. Osserva la sequenza.



a. **Immagina di continuare la sequenza. Da quanti segmenti sarà composta la figura 5?**

Risposta: ……………………………………

b. **Sempre immaginando di continuare la sequenza, quale figura sarà formata da 40 segmenti?**

A. ☐ La figura 7

B. ☐ La figura 8

C. ☐ La figura 9

D. ☐ La figura 10

CONTINUA ALLA PAGINA A FIANCO

c. **La sequenza potrebbe comprendere una figura con 32 segmenti?**
Scegli una delle due risposte e completa la frase.

☐ **Sì, perché** ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

☐ **No, perché** ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Fig. 4 – Quesito D17 di grado 5 del 2012. Le tre richieste sono pensate in modo che ciascuna sia un suggerimento per la successiva. Per il campione nazionale la percentuale di risposte corrette è stata la seguente: item a 55,9%; item b 61,9%; item c 44,6%

ISBN 9788835125235

D18. **La maestra assegna ai suoi alunni questo compito: pensate due numeri diversi fra loro e sommate al più piccolo il doppio del più grande.**

a. **Riccardo pensa i numeri 3 e 5. Quale sarà il risultato del suo calcolo?**

A. ☐ 8

B. ☐ 11

C. ☐ 13

D. ☐ 16

b. **Se Riccardo chiama *a* il numero più piccolo e *b* quello più grande, come può scrivere il calcolo assegnato dalla maestra?**

A. ☐ $2\times a+2\times b$

B. ☐ $2\times a+b$

C. ☐ $a\times b\times 2$

D. ☐ $a+2\times b$

Fig. 5 – Quesito D18 di grado 5 del 2013. L'item a funge da suggerimento per l'item b, che è una generalizzazione. Per il campione nazionale la percentuale di risposte corrette è stata la seguente: item a 62,0%; item b 46,4%

D6. **I 20 alunni di una classe vogliono preparare una macedonia di fragole e banane per tutta la classe.**

Decidono di usare:

	**1 banana ogni 4 alunni**
	**3 fragole per ogni alunno**

a. **Quante banane dovranno usare in tutto per la macedonia?**

A. ☐ 4

B. ☐ 5

C. ☐ 6

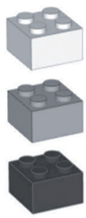
b. **Quante fragole dovranno usare in tutto per la macedonia?**

Risposta: .... fragole

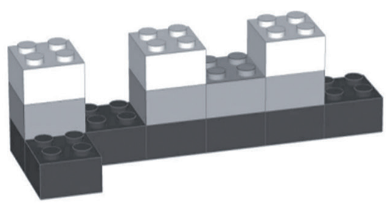
Fig. 6 – Quesito D6 di grado 2 del 2014. Il calcolo del numero di fragole richiede una procedura diversa (inversa) rispetto a quello del numero di banane, a dispetto di domande in apparenza uguali

ISBN 9788835125235

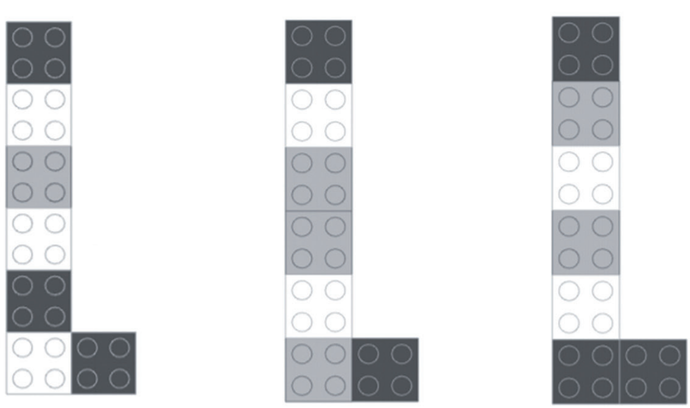
D4. Erik, per creare le sue costruzioni, utilizza questi tipi di mattoncini:



Ecco la costruzione che Erik ha fatto.



a. Come si vede la costruzione di Erik dall'alto?



☐ A ☐ B ☐ C

b. Quanti pezzi ha usato in tutto Erik?

Fig. 7 – Quesito D4 di grado 2 del 2017. Il numero di pezzi utilizzati per creare la costruzione va determinato andando a osservare nuovamente lo stimolo e non in riferimento all'item a, che rischia di ingannare il solutore

ISBN 9788835125235

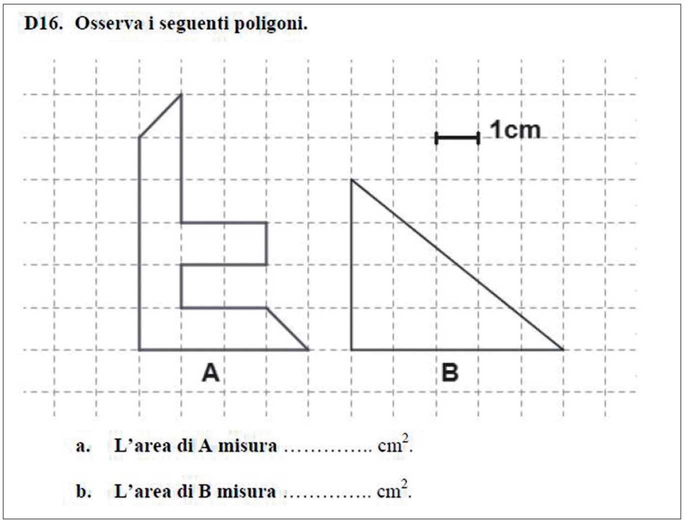


Fig. 8 – Quesito D16 di grado 5 del 2011. L'area del poligono A si può trovare contando i quadretti e sommando i "mezzi quadretti"; la stessa procedura applicata in b porta a errore poiché non ci sono quadretti tagliati a metà da associare

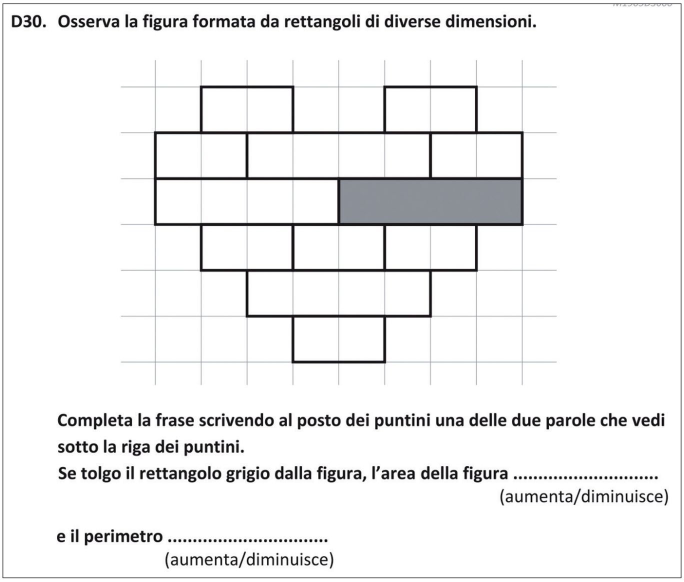


Fig. 9 – Quesito D30 di grado 5 del 2019. Consideriamo i due spazi da riempire come due item in cui il primo, che porta l'attenzione sulla diminuzione dell'area, potrebbe spingere a rispondere erroneamente al secondo, che riguarda la diminuzione del perimetro

ISBN 9788835125235

(4) Quesiti “a doppia lettura”: sono i quesiti che presentano due domande apparentemente uguali (o simili), che richiedono strategie differenti, tanto che per rispondere alla seconda è più “comodo o opportuno” rileggere lo stimolo piuttosto che appoggiarsi alla risposta alla prima domanda. Non sono consequenziali e sono pensati, in particolare rispetto alla seconda richiesta, per verificare la comprensione profonda della situazione problematica. L’iterazione acritica della stessa procedura già attuata per l’item a non porta a risolvere correttamente l’item b. Sono due per il grado 2 e due per il grado 5, riportati nelle figure 6, 7, 8, 9.

3. Presentazione dell’indagine

L’indagine è stata svolta su un gruppo di 44 alunni di classe quarta primaria nell’a.s. 2018/2019. I bambini appartenevano a tre sezioni diverse (tre gruppi, da 14, 14 e 16, rispettivamente). Non sono state suggerite agli studenti indicazioni, in modo da facilitare la risoluzione libera e per lasciare che ciascuno utilizzasse l’approccio che preferiva. L’unica consegna è stata: “In ogni problema ci sono diversi personaggi che hanno bisogno del tuo aiuto”. Riportiamo di seguito i due testi.

Problema 1. Il compleanno di Giorgia

Giorgia prepara la sala dell’oratorio per la sua festa di compleanno.

La custode le porta 4 tavoli: “Qualche giorno fa ho comprato all’Ikea questi tavoli tutti uguali con il piano d’appoggio quadrato, trattali bene!”.

Giorgia lascia un tavolo da solo per giocare a scacchi. Poi crea un’isola attaccando 3 tavoli uno di fianco all’altro per giocare a Uno.

Per abbellire i tavoli decide di comprare un nastro oro da attaccare su tutto il bordo del tavolo singolo e un nastro rosso da attaccare su tutto il bordo dell’isola.

Giorgia misura un lato del piano d’appoggio del tavolo singolo: 85 cm.

Ha bisogno del tuo aiuto per scoprire:

(a) Quanti centimetri di nastro oro deve comprare.

(b) Quanti centimetri di nastro rosso deve comprare.

Problema 2. Gli album di Marco e Andrea

Marco e il fratello Andrea decidono di aggiornare i propri album di figurine.

Si ricordano che all’unica edicola del paese ogni bustina di figurine costa 0,50 €.

ISBN 9788835125235

Marco capisce che con 10 bustine di figurine può terminare il proprio album.

Andrea è solo all'inizio del proprio album, per questo decide di usare tutti i propri risparmi. Svuota il suo salvadanaio e scopre che ha 10,70 €.

(a) Aiuta Marco a scoprire di quanti soldi ha bisogno per comprare le bustine di figurine che gli servono.

(b) Aiuta Andrea a scoprire il massimo di bustine che può comprare con i suoi risparmi.

È stato scelto di formulare i testi in modo il più possibile verosimile per aiutare i bambini a calarsi nella situazione, in riferimento al lavoro di Rosetta Zan (2016). Ciò che accomuna entrambi i testi è la presenza delle due richieste, dal momento che le informazioni ricavate per rispondere alla prima domanda non sono necessarie per rispondere alla seconda, sebbene possano essere utilizzate proficuamente solo nel caso in cui vengono concretizzate dentro una strategia risolutiva ben pianificata.

Nel primo problema, il punto che rende la risoluzione degna di attenzione è un'inevitabile tensione all'utilizzo del risultato della prima domanda. Esso è effettivamente possibile, ma con il sapiente disegno di una nuova procedura e non con l'applicazione acritica di un'analoga strategia (per es. triplicare il perimetro). Per questa ragione il problema può essere denominato "a doppia lettura". È infatti possibile risolvere correttamente il secondo punto anche riferendosi nuovamente al testo come se la prima domanda non vi fosse.

Invece, per quanto riguarda il problema 2, la situazione problematica è stata creata grazie alla mancanza di conoscenza da parte dei bambini dell'algoritmo della divisione con termini decimali, tema che non avevano mai affrontato. Quest'ultima chiede all'allievo uno sforzo di pensiero per individuare una nuova strategia. In aggiunta, le informazioni ricavate per rispondere alla prima domanda aiutano la risoluzione della seconda, per questo è stato considerato come un problema "a cascata".

Dopo la risoluzione, gli alunni, a coppie, sono stati intervistati in modo semi-strutturato. L'intento è stato quello di conoscere i seguenti elementi, non comprensibili solo attraverso la lettura delle tracce scritte lasciate sul foglio:

– comprendere con maggiore chiarezza le strategie risolutive;
– capire se l'utilizzo dei risultati ottenuti nella richiesta (a) per svolgere il punto (b) fosse strategico o meccanico;
– indagare l'eventuale cambiamento di strategia nel caso in cui lo studente volesse inizialmente utilizzare la risposta ad (a) per (b) ma avesse poi cambiato idea;
– far emergere eventuali difficoltà.

ISBN 9788835125235

Le domande poste a tutti gli alunni e per entrambi i problemi sono state "Come hai fatto a rispondere alla richiesta (a)?" e "Come hai fatto a rispondere alla richiesta (b)?". A coloro che hanno utilizzato l'informazione trovata come risposta alla domanda (a) per risolvere la richiesta (b), è stato chiesto: "Perché hai usato questo dato (indicando la risposta ad (a)) per rispondere alla seconda richiesta?". A coloro che non hanno optato per tale percorso risolutivo, è stato domandato: "Per rispondere alla seconda richiesta, hai pensato di utilizzare un'altra strategia rispetto a quella che hai svolto prima?". In caso di risposta affermativa è stato chiesto: "Perché hai cambiato strategia?".

4. Ipotesi dell'indagine

Abbiamo ipotizzato che l'item (b) del problema 1 fosse risolto correttamente da un numero inferiore di alunni rispetto all'item (b) del problema 2, essendo il secondo un problema con richieste "a cascata" mentre il primo "a doppia lettura". Immaginiamo che questa discrepanza si possa attribuire a una nuova clausola del contratto didattico: l'effetto procedurale, cioè la tendenza ad applicare una strategia risolutiva già utilizzata per rispondere a una richiesta precedente, in modo acritico, senza tornare sullo stimolo iniziale, ottenendo una risposta errata.

5. Esiti dell'indagine

Dall'analisi della frequenza delle risposte corrette e di quelle errate si è verificato ciò che è stato ipotizzato. Infatti, le risposte errate alla richiesta (b) (inferiori rispetto a quelle della (a)) sono maggiori nel problema "a doppia lettura" (1, "Il compleanno di Giorgia") rispetto a quello "a cascata" (2, "Gli album di Marco e Andrea"), come mostrano la figura 10 e la figura 11. Per comprendere se tale differenza possa essere attribuita a quello che potrebbe essere denominato effetto procedurale, abbiamo svolto un'analisi qualitativa delle strategie risolutive eseguite dagli studenti[2].

[2] Per ragioni non dipendenti dalle due autrici non è stato possibile recuperare dalla scuola di appartenenza i livelli INVALSI degli studenti che hanno partecipato all'indagine. Il focus più ravvicinato a cui è possibile pervenire è l'esito della rilevazione di seconda primaria dell'a.s. 2016/17 della provincia di Milano, svolta anche dagli alunni suddetti, che può essere utile solo per un raffronto generale. In particolare la distribuzione degli studenti risulta essere la seguente: livello 1: 26,9%; livello 2: 17,3%; livello 3: 16,9%; livello 4: 10,5%; livello 5: 28,4%.

ISBN 9788835125235

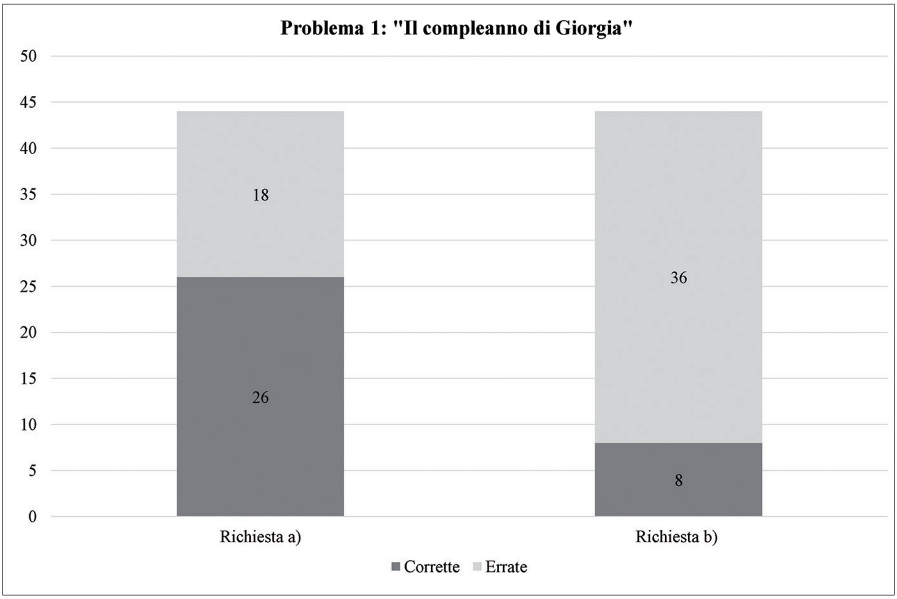


Fig. 10 – Alla domanda (a) del problema 1 hanno dato risposta corretta 26 alunni su 44, alla richiesta (b) 8

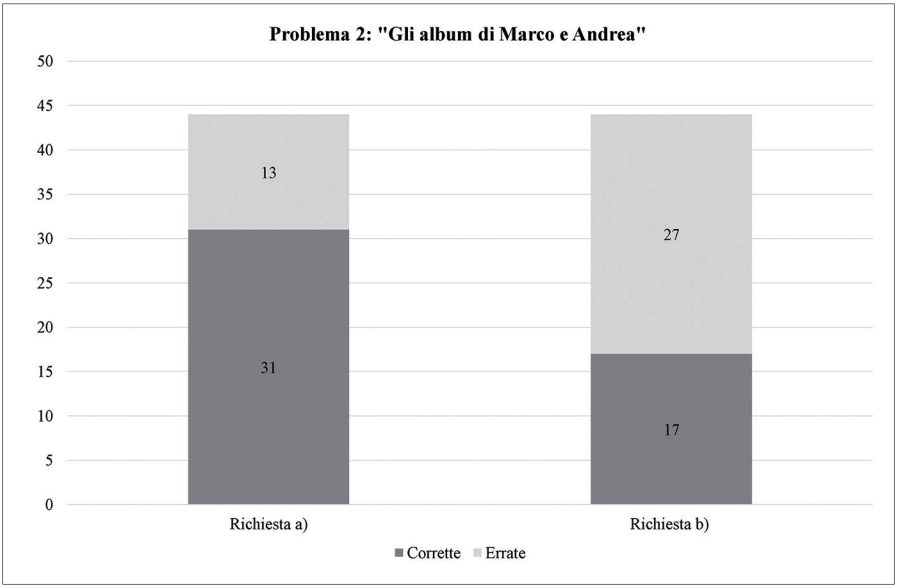


Fig. 11 – Alla domanda (a) del problema 1 hanno dato risposta corretta 31 alunni su 44, alla richiesta (b) 17

ISBN 9788835125235

Fra i 36 alunni che hanno risposto in modo errato alla richiesta (b) del problema "Il compleanno di Giorgia", 11 hanno triplicato (nel caso di un bambino quadruplicato) il dato ottenuto rispondendo alla prima domanda. In aggiunta, 8 studenti hanno risolto il problema attraverso la moltiplicazione fra la misura di un lato del quadrato e il prodotto ottenuto moltiplicando i fattori 3 (il numero dei tavoli che compongono l'isola) e 4 (il numero dei lati di ogni tavolo). Tali bambini, nonostante non abbiano considerato le informazioni acquisite dalla risposta alla domanda (a), hanno mostrato di aver applicato la stessa strategia risolutiva di coloro che hanno triplicato il perimetro del quadrato; i due protocolli sono mostrati nelle figure 12 e 13.

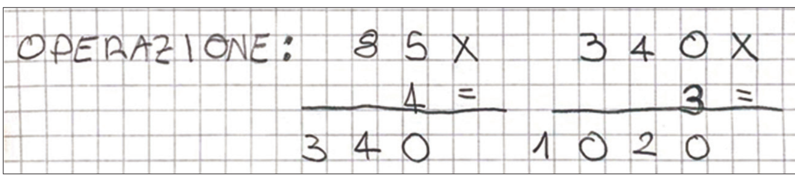


Fig. 12 – Problema 1 richiesta (b): svolgimento di M.M. che triplica il perimetro del tavolo quadrato

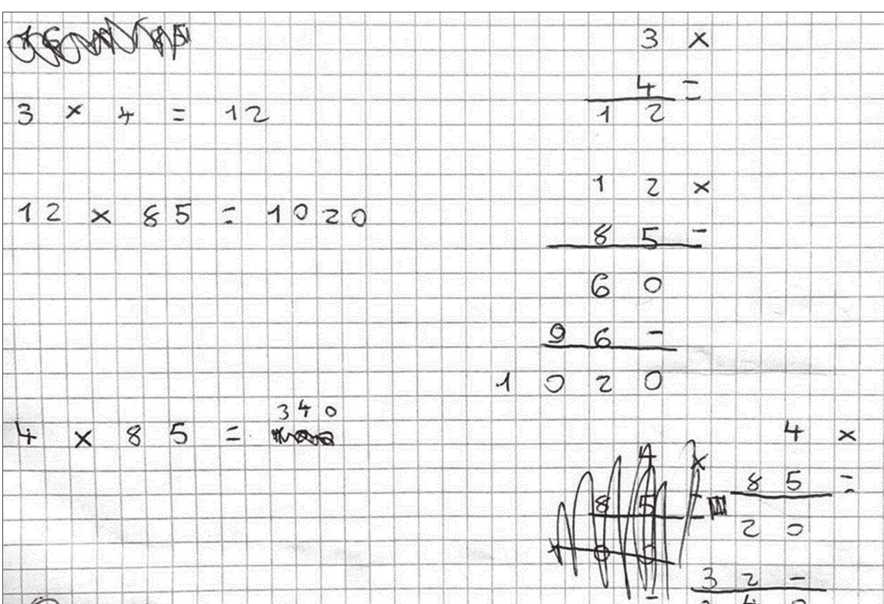


Fig. 13 – Problema 1 richiesta (b): svolgimento di F.M. che, attraverso la moltiplicazione tra 3 e 4 trova il numero totale di lati dei tavoli quadrati, successivamente moltiplica tale risultato per la lunghezza di un lato

ISBN 9788835125235

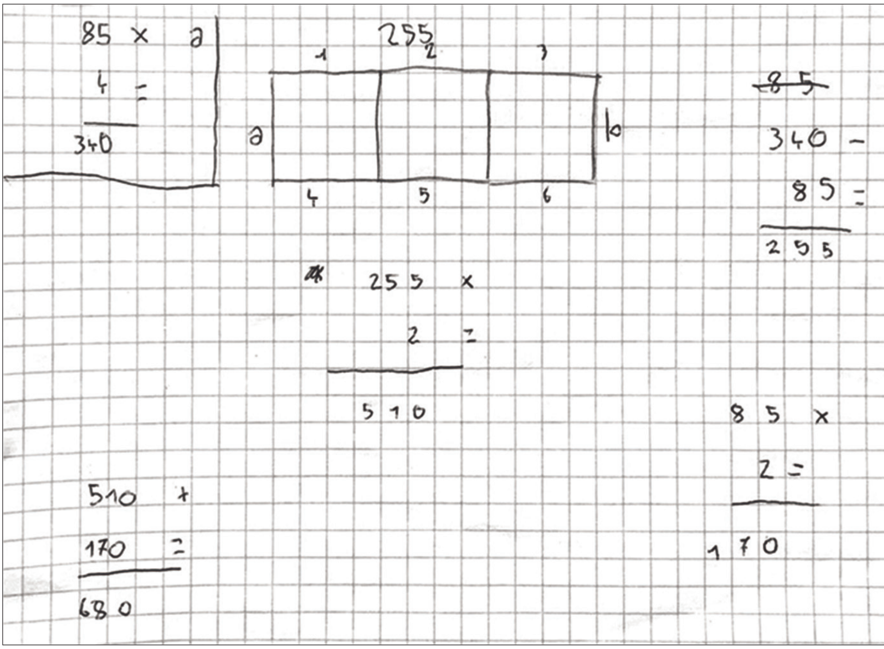


Fig. 14 – Problema 1: A.C., rispondendo a (b), utilizza il perimetro di un quadrato, poi toglie un lato, per ottenere la somma di tre lati. La sfrutta poi in questo modo: raddoppia la somma di tre lati e le aggiunge il doppio di un lato

Dunque, dall'analisi dell'intervista, la ragione per cui molti alunni hanno risposto in modo errato può essere attribuita, nella metà dei casi (i 19 alunni descritti precedentemente), all'applicazione acritica della strategia risolutiva utilizzata per rispondere alla prima domanda oppure all'utilizzo non strategico dei dati ottenuti rispondendo alla domanda (a). L'influenza dei dati ricavati dalla richiesta (a) oppure della strategia risolutiva è stata poi ulteriormente specificata. È infatti la mancanza di attenzione alla rilettura del testo iniziale del problema che ha portato a un'interpretazione delle informazioni lette e a una comprensione della situazione problematica non complete e in alcuni casi del tutto errate. In aggiunta, a supporto di tali considerazioni, fra i 21 alunni che sono stati influenzati dalla strategia risolutiva della prima domanda oppure dall'utilizzo dei dati ricavati dalla domanda (a), solo 2 hanno risposto in modo corretto. Il motivo per cui questi bravi solutori hanno utilizzato la soluzione alla domanda (a) è ricondotto alla funzionalità della strategia risolutiva e delle operazioni che si intende eseguire. Ad esempio A.C. dichiara: "Non mi piace la moltiplicazione. Mi trovo meglio a non usarla". L.R. sapeva che 340 cm corrispondeva al prodotto fra i fattori 85 cm

ISBN 9788835125235

e 4 (figura 15). Ha ottenuto questa misura evitando di eseguire nuovamente l'operazione, osservando che occorreva semplicemente calcolare il doppio di 340 cm per ottenere il perimetro dell'isola. È interessante notare come non abbia avuto la necessità di eseguire un disegno, dimostrando una forte rappresentazione mentale della disposizione corretta dei banchi (figura 15).

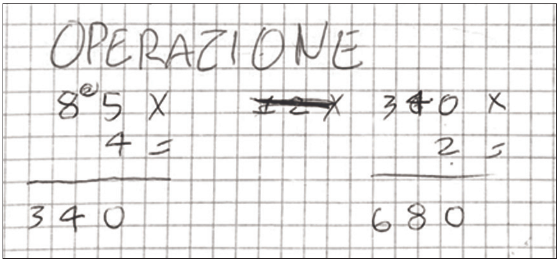


Fig. 15 – Problema 1: L.R. raddoppia il perimetro di un quadrato, rispondendo alla richiesta (b)

Riguardo il secondo problema "Gli album di Marco e Andrea", 8 fra i 17 "bravi solutori" hanno utilizzato i dati trovati rispondendo alla domanda (a) per riuscire a eseguire la strategia, data la mancata conoscenza e abilità nello svolgere l'algoritmo della divisione con i numeri decimali (la figura 16 mostra la risoluzione, corretta, di M.D.). Nell'intervista i bambini dichiarano di aver utilizzato i dati ricavati dalla risposta (a) perché non sapevano eseguire la divisione con i numeri decimali. Solo uno fra i 9 risolutori che hanno utilizzato i dati ricavati dalla risposta alla domanda (a) dà come risposta "20", dimenticandosi di aggiungere il costo di una bustina di figurine, rispondendo così in modo errato. Non sorprende come nell'intervista essi abbiano dichiarato che l'informazione ricavata rispondendo alla domanda (a) (5 €) rappresenti un aiuto nell'esecuzione del problema, che a un primo impatto risultava non risolubile. Di conseguenza, tale analisi qualitativa, in relazione a quella relativa alla frequenza di risposte corrette e di quelle errate, conferma la classificazione del problema "a cascata" che abbiamo attribuito nella fase di progettazione.

È interessante notare come la formulazione di un problema "a cascata" possa aiutare gli alunni che si trovano in difficoltà di fronte a problemi (propriamente detti) che a un primo impatto possono sembrare irrisolvibili perché proposti in un momento precedente all'apprendimento dell'algoritmo o della procedura richiesta. In quel caso il bambino metterà in gioco la propria creatività per individuare una strategia risolutiva che possa permettere di raggiungere in ogni caso la soluzione.

ISBN 9788835125235

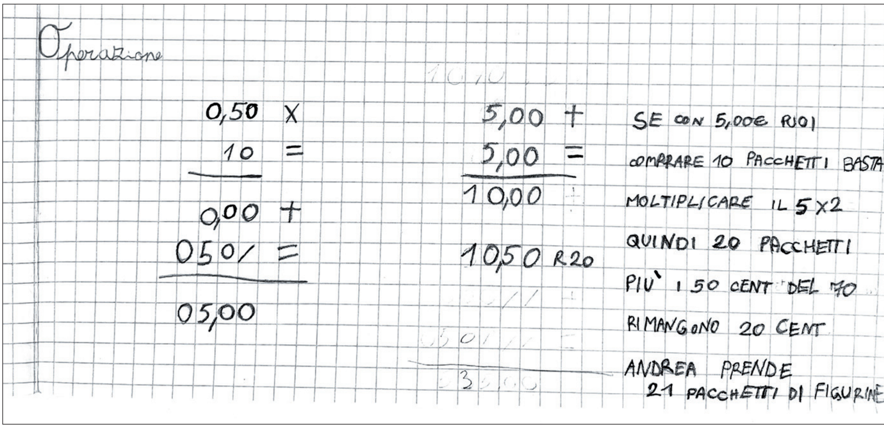


Fig. 16 – Risoluzione corretta di M.D. al secondo item del problema 2

6. Prospettive ulteriori

Questo primo studio getta la luce sull'abitudine a instradare gli alunni attraverso domande intermedie per arrivare a una richiesta finale più elaborata. Tale prassi non ha in sé nulla di negativo ed "educa" ad affrontare i problemi. Tuttavia, studiare in modo più analitico l'addestramento che da questa prassi può scaturire potrebbe aiutare i docenti a tenere l'attenzione sull'equilibrio da mantenere nel momento in cui debbano scegliere tra diversi problemi o diverse formulazioni dello stesso problema. Si potrebbe quindi, per indagare il tema più a fondo, operare uno studio con un campione più ampio e utilizzando situazioni problematiche che appartengano anche ad ambiti matematici differenti.

Ci chiediamo, inoltre, se non sia possibile formulare problemi "a doppia lettura" con una sola richiesta, quella dell'item (b), senza che essi perdano la loro peculiarità, in modo da non portare l'alunno a cadere nel tranello dell'utilizzo acritico della prima procedura per affrontare la seconda richiesta. Sarebbe forse illuminante un confronto tra le risoluzioni di un problema "a doppia lettura" con due domande e un problema della stessa tipologia in cui sia presente solo la domanda b.

ISBN 9788835125235

7. Conclusioni

Il lavoro presentato non consente generalizzazioni non foss'altro che per l'esiguo numero di studenti su cui si è lavorato. Tuttavia, possiamo affermare che:

– è piuttosto naturale nella prassi didattica porre domande che si susseguono in un crescendo di difficoltà;
– è innegabile una certa influenza della prima richiesta sulla scelta della strategia risolutiva per affrontare la seconda;
– tornare a ripensare allo stimolo iniziale non è una prassi degli alunni, che tendono ad affrontare un problema step by step e senza "salti indietro".

I dati presentati supportano queste idee, che vogliamo sottolineare primariamente per i docenti, in modo da sollecitare il loro spirito di osservazione e il loro spirito critico perché più frequentemente siano attenti al legame che sussiste tra le domande che pongono ai loro studenti.

Problemi "a doppia lettura", problemi con "item a cascata", "indipendenti" e "a strategia analoga" sono funzionali ad allenare o verificare aspetti differenti della competenza matematica per cui hanno tutti ragione di essere sfruttati.

Riferimenti bibliografici

Duncker K. (1935), *Zur Psychologie des produktiven Denkens*; trad. it. *La psicologia del pensiero produttivo*, Giunti Barbera, Firenze, 1969.

GESTINV, *Archivio interattivo delle prove INVALSI*, testo disponibile al sito: http://www.gestinv.it, data di consultazione 11/2/2021.

INVALSI, *Fascicoli e Guida alla lettura delle prove di Matematica della scuola primaria e secondaria di I grado, anni 2008/2019*, testi disponibili al sito: https://invalsi-areaprove.cineca.it nella sezione Precedenti Rilevazioni – Strumenti, data di consultazione 3/2/2021.

Polya G. (1945), *How to solve it*; trad. it. *Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico*, UTET, Torino, 2016.

Polya G. (1962), *Mathematical discovery*; trad. it. *La scoperta matematica. Capire, imparare, insegnare a risolvere problemi*, vol. I, Feltrinelli, Milano, 1971.

Zan R. (2016), *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*, Carocci Faber, Roma.

ISBN 9788835125235

4. L’analisi dei dati INVALSI di Matematica – spazio e figure – riferiti a più coorti della scuola primaria per sperimentare l’utilizzo di strumenti didattici efficaci

di Ida Spagnuolo

È noto come i dati INVALSI evidenzino il raggiungimento di traguardi anche in relazione alle Indicazioni nazionali per il curricolo. Questo contributo nasce dalla considerazione delle molteplici informazioni fornite da INVALSI a seguito delle Rilevazioni nazionali, informazioni di carattere generale e utili comunque al miglioramento della didattica a livello nazionale. Lo studio è stato quindi condotto non sui risultati conseguiti da una scuola in particolare, ma a partire dalla composizione delle prove di alcune coorti della scuola primaria – con particolare riferimento agli item relativi a Spazio e figure – al fine di evidenziare i nuclei fondanti presenti e correlati, con la dovuta evoluzione, nei due gradi scolari considerati (2 e 5). Con riferimento al campione nazionale, i dati INVALSI ci forniscono, nei due gradi della scuola primaria, le percentuali di risposte corrette e, nel caso di item a scelta multipla, anche utili informazioni sulle percentuali dei distrattori. Le coorti considerate sono state quattro e riferite agli anni 2013, 2014, 2015 e 2016 per il grado 2 e, di conseguenza, agli anni 2016, 2017, 2018 e 2019 per il grado 5. In questo modo, utilizzando le prove e i risultati del campione nazionale di riferimento è stato possibile individuare, nell’ambito Spazio e figure, alcuni nuclei fondanti che si ritrovano poi – volendo estendere lo studio – anche negli esempi presenti nei gradi successivi (8, 10 e dal 2019 anche 13) analizzando in questo caso la distribuzione dei livelli di competenza raggiunti dagli studenti italiani. Dall’analisi generale sono stati estrapolati i seguenti nuclei tematici: proprietà di figure per richiesta di riconoscimento, completamento e/o costruzioni; tassellazioni, equivalenza e calcolo di aree; isoperimetria; simmetrie. Dall’analisi effettuata – relativa al medesimo nucleo/traguardo – non è sempre osservabile un aumento di competenze nel passaggio dal grado 2 al grado 5, cosa che ci si aspetterebbe nell’ottica del miglioramento. In particolare gli item con bassa percentuale di risposte cor-

ISBN 9788835125235

rette nei due gradi forniscono una buona chiave di lettura per alcuni concetti importanti di metodologia didattica. A seguito di tale analisi, questo contributo propone, pertanto, alcuni suggerimenti circa l'insegnamento di alcune tematiche, come quelle sopra elencate. In particolare l'utilizzo, oltre agli strumenti "classici" del disegno (riga, squadra e compasso), di modellini e di un software di geometria dinamica potrebbe essere sperimentato, utilizzando anche alcune attività del Progetto M@t.abel, con diverse modalità e finalità: per affrontare – con l'intera classe – uno specifico argomento cogliendo potenzialità e limiti di ciascun approccio; per comparare i diversi approcci lavorando per gruppi all'interno della classe – ovvero per classi aperte – con modalità diversificate come sopra descritte.

Analysis of INVALSI Mathematics data – Space and Figures – referring to different primary school cohorts to experiment effective teaching tools. It is known how the INVALSI data highlight the achievement of goals also according to the national guidelines for the curriculum. This contribution develops from several informations provided by INVALSI national surveys, general data suitable anyway for improving teaching nationwide. This study was therefore conducted not regarding the results achieved by a particular school, but considering the composition of the tests of some cohorts from primary school – with special reference to the items related to Space and Figures – in order to highlight the founding nuclei present and correlated, with due evolution, in the two school grades considered (2 and 5). Referring to the national sample (survey), the INVALSI data also provide us for the two grades of primary school, the percentages of correct answers and, for multiple-choice items, useful informations on distractor percentages. Four cohorts were considered, regarding the years 2013, 2014, 2015 and 2016 for grade 2 and, consequently, the years 2016, 2017, 2018 and 2019 for grade 5. In this way, using the evidence and results of the reference national sample, some founding could be identified in the area of Space and Figures and also, eventually extending the study, in the examples present in the following grades (8, 10 and, starting from 2019, 13 too), in this case analyzing the distribution of the competence levels achieved by Italian students. The following thematic nuclei have been extrapolated from the general analysis: property of figures for recognition, completion and/or construction requests; tessellations, equivalence and calculation of areas; isoperimetric inequality; symmetries. Analysing the same nucleus/goal it was not always possible to observe a skill increase from grade 2 to grade 5, which would be expected in a perspective of improvement. In particular, items with a low percentage of correct answers in the two grades provide a good interpretation for

ISBN 9788835125235

some key concepts in teaching methodology. Following this analysis, our contribution offers suggestions regarding the teaching of some topics, as those listed above. Particularly, in addition to the "classic" tools of drawing (ruler, square and compass), the use of models and a dynamic geometry software, also using some activities of the Project M@t.abel, could be tested with different methods and purposes: to address, in a whole class, a specific topic, seizing potential and limits of each approach; to compare different approaches working for groups in single or open classes utilizing diversified methods as previously explained.

1. Introduzione

L'INVALSI, nell'ambito delle Rilevazioni nazionali, fornisce sia numerosi strumenti come i QdR, le prove e/o esempi di prove e le Guide alla lettura, sia i risultati della rilevazione stessa, corredati dai Rapporti nazionali e, per i gradi scolari per i quali sono previste le prove CBT, da descrittori quantitativi – sintetici e analitici – dei livelli di competenza raggiunti.

È noto come la restituzione dei risultati alle scuole, prima ancora che ai singoli studenti attraverso le certificazioni ove previste, possa essere utilizzata a più livelli proprio in relazione a due differenti tipologie:

- i *risultati assoluti* che forniscono, specialmente se riferiti a un'area geografica e addirittura a tutta la nazione, dati importanti sulle competenze e traguardi raggiunti dagli studenti al termine di uno specifico percorso scolare, in coerenza con quanto esplicitato dai profili in uscita presenti nelle Indicazioni nazionali e Linee guida, a prescindere dal contesto e dalle differenti situazioni di partenza;
- i *risultati contestualizzati* che forniscono informazioni importanti anche alle singole istituzioni scolastiche in termini di autovalutazione al fine di comprendere l'efficacia delle strategie didattiche messe in campo e gli investimenti effettuati o da programmare nell'ottica del miglioramento.

La lettura dei risultati contestualizzati non dovrà tuttavia prescindere da quelli assoluti che rappresentano un necessario dato di riferimento.

Questo contributo prende in considerazione i risultati assoluti – ossia quelli del campione a livello nazionale – registrati da più coorti della scuola primaria per riflettere sulla didattica e sui relativi strumenti per renderla maggiormente efficace. In effetti lo studio longitudinale dei risultati appare necessario sia per seguire l'evoluzione delle competenze in determinati ambiti (Branchetti *et al.*, 2015) ma anche per realizzare attività didattiche utili nella formazione (Martignone, 2016).

ISBN 9788835125235

Le semplici analisi e riflessioni che seguono si riferiscono all'ambito Spazio e figure ma la metodologia dello studio empirico può essere utilizzata anche per gli altri ambiti di contenuto.

Le fasi dello studio sono state le seguenti:

1) scelta delle quattro coorti da analizzare (seconda e quinta primaria);
2) analisi degli item e selezione secondo un criterio per "somiglianza concettuale e spesso anche strutturale"[1], scelta che ha portato all'individuazione dei contenuti maggiormente ricorrenti negli item selezionati;
3) individuazione di traguardi e obiettivi presenti nelle Indicazioni nazionali relativamente agli item selezionati;
4) analisi dei risultati assoluti per ciascun contenuto e per ciascuna coorte esaminata per un confronto in continuità.

In seguito ai risultati di questo studio, viene proposto un possibile percorso didattico – da sperimentare – che preveda l'utilizzo di differenti pratiche per misurarne l'efficacia.

2. Prima parte: lo studio

La scelta delle quattro coorti parte – a ritroso – dalle rilevazioni più recenti ed è sintetizzata nella tabella che segue:

Tab. 1 – Coorti considerate

Classe seconda	*Classe quinta*
2016	2019
2015	2018
2014	2017
2013	2016

L'analisi degli item relativi a Spazio e figure presenti nei fascicoli delle classi riportate nella precedente tabella, ha messo in evidenza alcuni contenuti maggiormente ricorrenti, con le dovute implementazioni, nei due gradi scolari considerati:

[1] M. Panero nel contributo "Un'analisi longitudinale dei dati INVALSI di Matematica di una stessa coorte di allievi alla primaria", presentato in occasione del II seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca", evidenzia proprio come alcuni item esaminati nell'ottica di uno studio longitudinale da lei condotto, condividono lo stesso contenuto o sono risolvibili attivando processi analoghi.

ISBN 9788835125235

– proprietà, riconoscimenti e completamenti di figure;
– calcolo di aree, tassellazioni, ed equivalenze;
– calcolo e confronto di percorsi e perimetri;
– isoperimetria;
– isometrie.

Dalle Indicazioni nazionali è stato poi possibile individuare un traguardo generale al termine della scuola primaria e alcuni obiettivi.

Traguardo: "descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, *a relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo*, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo".

Obiettivi:
– riprodurre una figura in base a una descrizione, utilizzando gli strumenti opportuni (carta a quadretti, riga e compasso, squadre, software di geometria);
– riconoscere, denominare e descrivere figure geometriche, identificando elementi significativi e simmetrie, anche al fine di farle riprodurre da altri;
– utilizzare il piano cartesiano per localizzare punti.

È stato possibile quindi effettuare un confronto tra alcuni obiettivi di apprendimento, ovvero il loro approfondimento nel corso della primaria, come riportato nella tabella che segue.

Tab. 2 – Comparazione obiettivi di apprendimento

Al termine della classe…	
Terza primaria	*Quinta primaria*
Eseguire/descrivere e/o dare istruzioni di un semplice percorso…	Riprodurre una figura in base a una descrizione, utilizzando gli strumenti opportuni…
Riconoscere e denominare figure geometriche. Disegnare figure geometriche e costruire modelli materiali.	Descrivere, denominare e classificare figure geometriche. Utilizzare modelli materiali…
Misurare e confrontare.	Calcolare il perimetro di una figura e l'area di figure anche per scomposizione.

Il confronto può essere esteso, in continuità, anche alla classe terza della scuola secondaria di I grado.

ISBN 9788835125235

Tab. 3 – Comparazione obiettivi di apprendimento

Al termine della classe…	
Quinta primaria	*Terza secondaria di I grado*
Riprodurre una figura in base a una descrizione, utilizzando gli strumenti opportuni…	Riprodurre/descrivere ad altri figure e disegni geometrici, con accuratezza e opportuni strumenti…
Descrivere, denominare e classificare figure geometriche. Utilizzare modelli materiali…	Conoscere definizioni e proprietà delle principali figure piane. Riconoscere/riprodurre figure piane simili in vari contesti.
Calcolare il perimetro di una figura e l'area di figure anche per scomposizione.	Determinare l'area di semplici figure scomponendole in figure elementari, per esempio triangoli.

Selezionati gli item, l'attenzione si è focalizzata sui risultati. In questa fase è stato necessario utilizzare diversi strumenti:
– i Rapporti nazionali, per un'analisi generale;
– le Guide alla lettura, per tutte le informazioni specifiche di ciascun item quali le percentuali di risposte corrette e degli eventuali distrattori nel caso di item a scelta multipla, lo scopo della domanda, il processo prevalente e i traguardi, nonché le eventuali osservazioni sulle strategie di risposte;
– il database GESTINV[2], per l'indice di difficoltà di ciascun item.

I risultati nazionali, nelle coorti prese in considerazione, non mostrano un miglioramento – quale l'innalzamento della percentuale di risposte corrette – nel passaggio dalla seconda alla quinta classe della scuola primaria, relativamente agli stessi contenuti ma, soprattutto, agli stessi obiettivi.

2.1. Alcuni esempi e prime considerazioni

Esaminiamo ora due coppie di item relativi a "proprietà, riconoscimenti e completamenti di figure".

La prima coppia è formata dall'item D7, presente nel fascicolo di seconda primaria 2013, e dall'item D4 presente nel fascicolo di quinta primaria 2016 (coorte 2013/2016).

[2] GESTINV, è un servizio online a disposizione degli insegnanti, delle scuole, degli studenti e delle famiglie. Raccoglie e organizza i materiali delle prove INVALSI dal 2008 a oggi.

ISBN 9788835125235

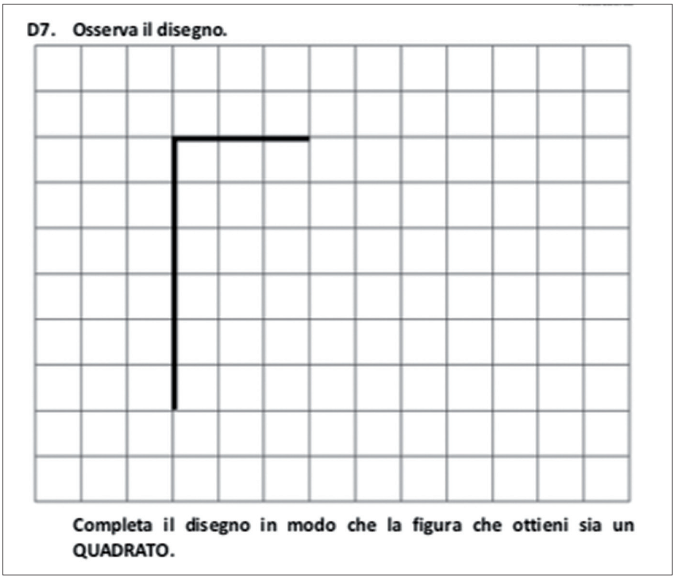


Fig. 1 – Item D7, seconda primaria 2013

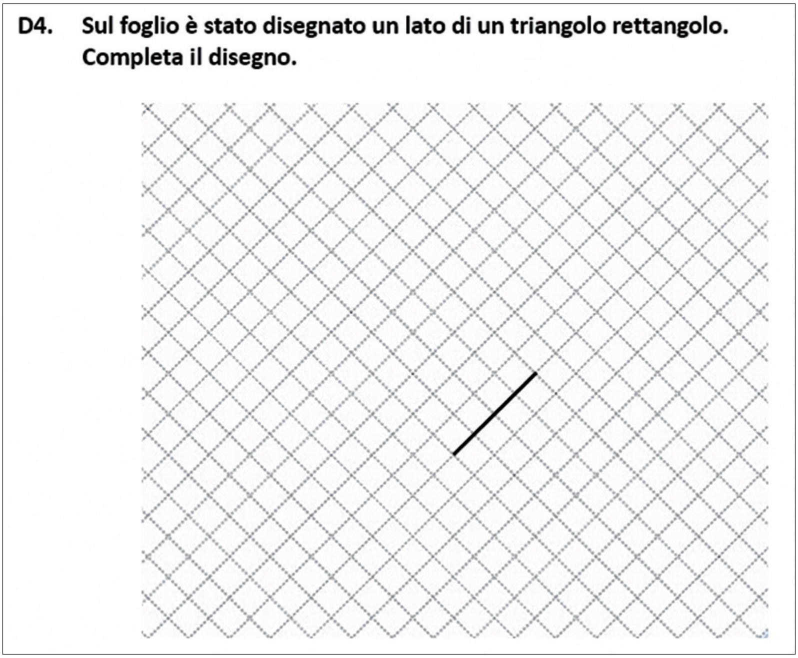


Fig. 2 – Item D4, quinta primaria 2016

ISBN 9788835125235

Nel primo item la richiesta del completamento, che utilizza una base quadrettata, vuole testare la competenza relativa a una costruzione geometrica, con l'aiuto di un righello, che utilizzi la conoscenza di alcune proprietà delle figure: in questo caso del quadrato. La percentuale di risposte corrette è pari al 66,5% e il grado di difficoltà è -0,86. Si ricorda che il grado di difficoltà Delta (s) è compreso tra -3 (molto facile) a +3 (molto difficile). Ovviamente per un'analisi più approfondita tale dato dovrebbe essere associato all'indice di discriminazione (Cor) ma ciò esula dallo studio empirico presentato.

Anche nel secondo item la richiesta del completamento utilizza una base quadrettata e vuole testare la competenza relativa a una costruzione geometrica che, con l'aiuto di un righello, utilizzi la conoscenza di alcune proprietà delle figure: in questo caso del triangolo rettangolo. Simile la percentuale di risposte corrette (68,5) e il grado di difficoltà (-0,95).

La seconda coppia è formata dall'item D22, presente nel fascicolo di seconda primaria 2016, e dall'item D6 presente nel fascicolo di quinta primaria 2019 (coorte 2016/2019).

In questi due item la richiesta è sempre di una costruzione geometrica che utilizzi la conoscenza di alcune proprietà delle figure deducibili dalla definizione stessa: rettangolo per la seconda primaria, pentagono per la quinta primaria.

Di seguito si riportano i due item.

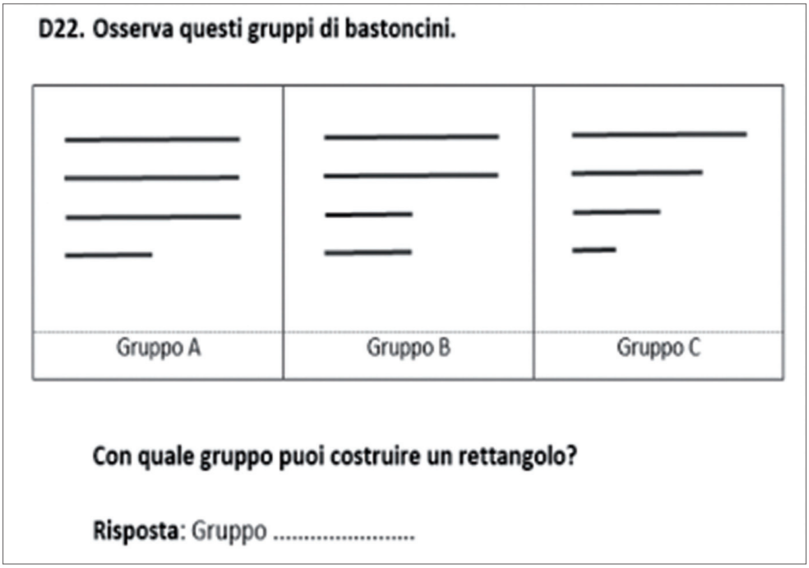


Fig. 3 – Item D22, seconda primaria 2016

ISBN 9788835125235

La percentuale di risposte corrette per l'item D22 è pari a 67,6 e il grado di difficoltà è -0,89.

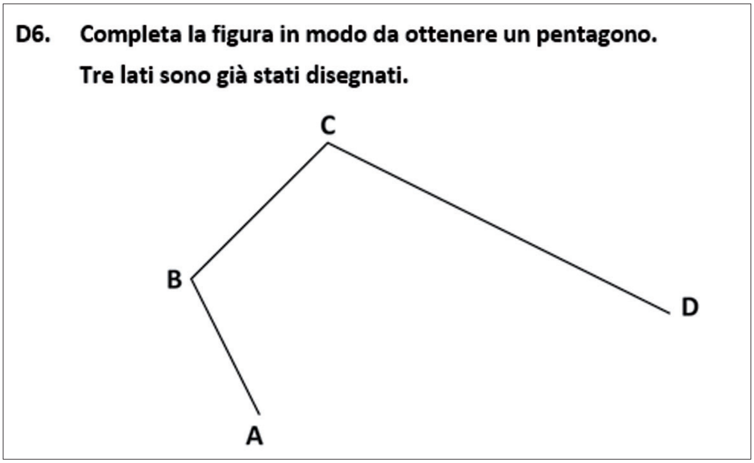


Fig. 4 – Item D6, quinta primaria 2019

La percentuale di risposte corrette per l'item D6 è pari a 62,0 e il grado di difficoltà è -0,60.

Quello che si osserva, sia nelle coorti esaminate sia nelle classi dello stesso grado a distanza di tre anni (di cui non riporto altri esempi per non appesantire la trattazione), è una sostanziale invarianza dei risultati, in termini di percentuali di risposte corrette, rispetto alle stesse competenze. E non un miglioramento come ci si sarebbe aspettato dalla riflessione sui risultati! La situazione risulta pressoché identica, a parte le differenti percentuali di risposte corrette talvolta molto basse, anche per gli altri temi esaminati: calcolo e confronto di percorsi, perimetri e calcolo di aree, isoperimetria, tassellazioni ed equivalenze, isometrie.

Tali evidenze inducono a utilizzare come chiave di lettura l'analisi sulle metodologie maggiormente utilizzate nella didattica: attività prevalentemente frontali, pochi ausili, esercizi ripetitivi.

Limitandoci in questo studio empirico all'ambito geometrico, si può ipotizzare che le attività laboratoriali che utilizzino una pluralità di ausili – carta quadrettata, riga, squadra, compasso, fili e bastoncini, modellini, software di geometria dinamica (cfr. Indicazioni nazionali) – siano necessarie per comprendere in che misura la peculiarità di ciascuno strumento influisca sull'apprendimento anche in relazione ai diversi tipi di intelligenza degli studenti.

ISBN 9788835125235

In effetti la riflessione-guida di questo contributo parte anche dalla teoria di Gardner delle intelligenze multiple. Gardner[3] ritiene che non esista una sola forma di intelligenza ma almeno sette forme di "rappresentazioni mentali", cioè sette diversi tipi di intelligenze ognuna afferente a particolari attività/abilità. Il prevalere di una sulle altre può condizionare l'apprendimento e quindi il docente non potrà agire proponendo un modello univoco ma utilizzando una pluralità di approcci.

3. Una proposta

Se la chiave di lettura precedentemente illustrata è corretta, la possibilità è quella di realizzare percorsi didattici che utilizzino strumenti diversificati per sperimentarne l'efficacia sia nello specifico disciplinare che in relazione all'intelligenza dei singoli studenti.

Si potrà quindi affrontare – con l'intera classe – un argomento specifico, utilizzando tutti gli strumenti possibili cogliendone così peculiarità, potenzialità e adeguatezza alla situazione esaminata. In questa ipotesi di lavoro ciascuno studente potrà essere messo nella condizione di acquisire competenze sfruttando al meglio lo strumento maggiormente consono alla tipologia di intelligenza prevalente.

Con altro scopo, ossia quello di comprendere potenzialità e limiti dei singoli strumenti, si potrebbe sperimentare di far lavorare gli studenti per gruppi all'interno della classe o per classi aperte. Ciascun gruppo (ovvero ciascuna classe) utilizzerà un solo strumento e si confronteranno poi le competenze raggiunte da ciascun gruppo.

A titolo di esempio si riporta di seguito un possibile percorso didattico.

"Essere uguali": cosa vuol dire?

Anche a partire dagli item delle prove INVALSI, si possono ipotizzare attività per esaminare alcune possibili risposte alla domanda precedente:

– stessa lunghezza;
– stesso perimetro;
– stessa superficie;
– stessa forma;
– stesso volume.

Riferendoci, per fissare le idee, alla proprietà "stesso perimetro", un primo riferimento può essere l'item D5 di quinta primaria del 2018 (fig. 5).

[3] Howard Gardner (Scranton, 11/07/43) è uno psicologo statunitense.

ISBN 9788835125235

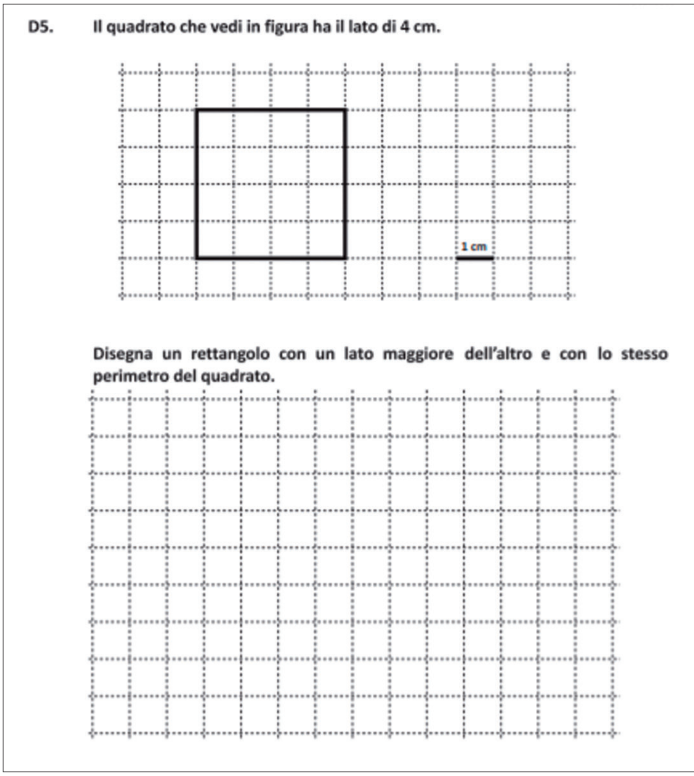


Fig. 5 – Item D5, quinta primaria 2018

La richiesta è proprio quella di disegnare un rettangolo avente lo stesso perimetro del quadrato assegnato e realizzarlo su carta quadrettata.

La percentuale di risposte corrette – del campione – è stata del 46,8 e il grado di difficoltà pari a +0,16.

Prendendo spunto proprio da questo item, e lavorando con tutta la classe con le medesime modalità, si possono ipotizzare situazioni "concrete" risolvibili grazie a una serie di attività e strumenti di seguito riportati, ovviamente senza la pretesa di essere esaustivi.

Situazione: progettare una piccola aiuola rettangolare per la successiva realizzazione avendo a disposizione, ciascuno, uno spago di uguale lunghezza.

Attività: costruire figure isoperimetriche, facendo comunque osservare come varia la misura della superficie.

Strumenti: spago, carta quadrettata, cartoncino, righello.

In seguito alla realizzazione del compito proposto e come ulteriore attività di "riflessione e scoperta", il docente mostrerà la situazione con un sof-

ISBN 9788835125235

tware di geometria dinamica. Tale ulteriore attività dovrà essere supportata da una scheda guidata con domande stimolo per gli studenti anche per una sintesi del lavoro svolto.

Con altro scopo, ossia quello di valutare limiti e potenzialità di ciascuna attività intrapresa in base agli strumenti usati, si potrebbe effettuare una sperimentazione suddividendo la classe in tre gruppi (oppure realizzare tre classi aperte) che operino, per risolvere il problema assegnato, ciascuno con una sola delle seguenti modalità:

– spago e cartoncino;
– carta quadrettata e righello;
– software di geometria dinamica utilizzato con l'ausilio del docente.

Con una verifica comune ai tre gruppi o alle tre classi aperte, il docente potrà riflettere sull'efficacia degli strumenti utilizzati e contestualizzarla.

È opportuno insistere sull'importanza di lavorare *anche* sulla variazione dell'area delle figure isoperimetriche perché fondamentale per il percorso successivo alla scuola primaria[4]. È infatti sufficiente pensare all'introduzione del grafico di una retta nella scuola secondaria di I grado ma anche ad alcuni quesiti assegnati all'esame di Stato del liceo scientifico: "Un filo metallico di lunghezza l viene utilizzato per delimitare un'aiuola rettangolare, qual è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?" (dalla prova scritta del liceo scientifico, 2006).

4. E nella scuola secondaria?

Dal 2017, con l'introduzione nella secondaria delle prove CBT, la restituzione dei risultati, anche ai singoli studenti, avviene non più in termini di punteggio raggiunto ma, in linea con molte indagini internazionali, in termini di livelli (descrittivi) quali "sa fare, conosce, è in grado di…" in un'accezione quindi positiva.

I cinque livelli, che tengono conto anche dei QdR, sono definiti sulla base dei dati del campione[5] e nella lettura dei risultati è opportuno evidenziare che il livello attribuito al singolo allievo in base al punteggio ottenuto nella prova di Italiano o Matematica descrive dunque, su basi probabilistiche, quali

[4] A tale scopo si veda anche, nell'ambito del piano M@t.abel, l'attività "Diversi tra confini uguali", testo disponibile al sito http://forum.indire.it/repository/working/export/678/, data di consultazione 3/2/2021.

[5] I livelli di competenza di Matematica, così come quelli di Italiano, descrivono anche da un punto di vista qualitativo le conoscenze e abilità e non sono definiti a priori secondo un criterio (come avviene per l'Inglese) ma sono costruiti sulle prestazioni degli studenti.

ISBN 9788835125235

abilità e conoscenze sono tipicamente possedute a quel livello della scala, in relazione ai contenuti indagati dalle prove INVALSI.

Pertanto i risultati della primaria (punteggi) non appaiono direttamente confrontabili – anche in continuità – con le performance degli studenti descritte dai cinque livelli di competenze. Tuttavia, ai fini delle chiavi di lettura esplicitate nei paragrafi precedenti, mi è sembrato opportuno riflettere su due esempi di item, dell'ambito Spazio e figure, pubblicati da INVALSI nell'a.s. 2018/19 per i gradi 8 e 10 con i relativi livelli di competenza.

In entrambi gli item, pur cambiando leggermente il contesto e la posizione dei triangoli, la richiesta è la stessa, ossia quella di individuare triangoli equivalenti dall'esame della congruenza, rispettivamente, di basi e altezze. Tuttavia i livelli di competenza raggiunti nei due gradi scolari, sono molto diversi.

Per il grado 8 l'item che segue[6] è di *livello di competenza 2*, ossia il livello per il quale "l'allievo si orienta nel piano..., *individua poligoni* isoperimetrici o riconosce poligoni *equivalenti anche al fine di calcolare un'area*". Ciò significa che tale competenza è patrimonio di gran parte degli studenti.

Domanda

Osserva la figura. L'area del triangolo ADE è 942 cm^2.

Qual è l'area del triangolo CDE ?

Fai riferimento alla figura sopra e digita la risposta alla domanda.

Risposta: ______ cm^2

Fig. 6 – Esempio di domanda grado 8 – Livello 2 – Spazio e figure

[6] A.s. 2018/19 – Esempi di domande grado 8, ambito Spazio, ambito Spazi, livello 2: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2020/Esempi_domande_grado_08.pdf, data di consultazione 3/2/2021.

ISBN 9788835125235

Di seguito l'item[7] per il grado 10. La richiesta è ancora quella di individuare triangoli equivalenti.

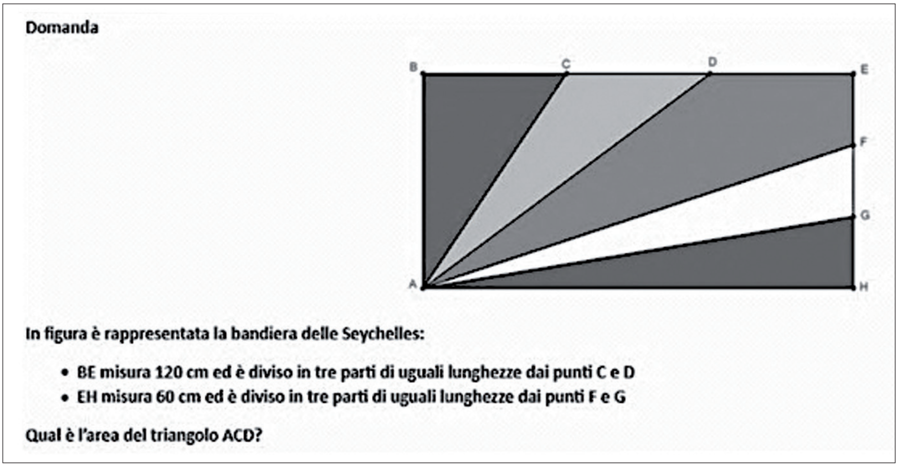


Fig. 7 – Esempio di domanda per il grado 10 – Livello 5 – Spazio e figure

Per il grado 10 il *livello di competenza di questo item è 5*, ossia "l'allievo/a conosce e *collega fra loro elementi e proprietà dei principali oggetti geometrici, operando con essi anche in situazioni non abituali*. In particolare riconosce elementi, proprietà e regolarità delle figure geometriche del piano…". Appare evidente che tale competenza non è più patrimonio di molti studenti!

5. Conclusioni

Lo studio condotto grazie all'analisi di alcuni dati messi a disposizione dall'INVALSI, ha evidenziato come alcuni concetti fondamentali della disciplina siano alla base delle competenze richieste dai profili in uscita dalla scuola primaria e secondaria di I e II grado. Inoltre una prima seppur sommaria analisi dei risultati assoluti – estesi anche alla scuola secondaria in termini di livelli di competenza – rileva un andamento "non crescente" delle performance degli studenti.

Cosa si può ipotizzare che non funzioni se le difficoltà non diminuiscono nel corso della primaria e se, in particolar modo, nel passaggio dal grado 8

[7] A.s. 2018/19 – Esempi di domande grado 10, ambito Spazio, ambito Spazi, livello 5: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2020/Esempi_domande_grado_10.pdf, data di consultazione 3/2/2021.

ISBN 9788835125235

al grado 10 gli studenti incontrano maggiori difficoltà nella risoluzione di compiti che richiedono conoscenze e competenze molto simili? E perché non sono state consolidate nel corso degli anni? Come osservano Babini e Graziani[8], i ragazzi, generalmente, commettono meno errori quando le prove (INVALSI) sono inerenti agli argomenti svolti nell'anno di somministrazione delle prove stesse perché tendono ad apprendere e a "cancellare" dalla loro memoria nel giro di pochi mesi vari concetti se non interiorizzati nel modo migliore.

È probabile quindi che la metodologia didattica di tipo "tradizionale", nella scuola come in altri luoghi di formazione, non risulti adeguata ai cambiamenti generazionali e alle successive richieste di competenze di cittadinanza e del mondo del lavoro.

Limitandoci al mondo della scuola, appare quindi necessario consolidare i concetti di base e le competenze chiave. Un lavoro in continuità tra ordini di studio diversi con reciproci scambi di esperienze unitamente a un insegnamento "a spirale" che utilizzi più strategie, strumenti e materiali, che sia frutto di continue scoperte da parte degli studenti e che quindi renda meno "ostica" la disciplina (Lockhart, 2010), potrebbe pertanto essere vincente.

Riferimenti bibliografici

AA.VV. (2001), *Matematica. Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica. Scuola primaria. Scuola secondaria di I grado*, testo disponibile al sito: http://umi.dm.unibo.it, data di consultazione 3/2/2021.

Bolondi G., Branchetti L., Ferretti F., Lemmo A. (2015), "Un approccio longitudinale per l'analisi delle prove INVALSI di matematica: cosa ci può dire sugli studenti in difficoltà", in *Concorso di idee per la ricerca*, 2016, testo disponibile al sito: http://euler.unipv.it, pp. 81-102, data di consultazione 3/2/2021.

Gardner H. (1987), *Formae mentis. Saggio sulla pluralità dell'intelligenza*, Feltrinelli, Milano.

INVALSI, *Fascicoli e Guida alla lettura delle prove di Matematica della scuola primaria, anni 2014/2019*, testi disponibili al sito: https://invalsi-areaprove.cineca.it nella sezione Precedenti Rilevazioni – Strumenti, data di consultazione 3/2/2021.

[8] I. Graziani, S. Babini nel contributo "Divertical-Math – Divertiamoci verticalmente con la Matematica dei quesiti INVALSI" presentato in occasione del II seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca".

ISBN 9788835125235

INVALSI (2018), *Quadro di riferimento per la Matematica*, testo disponibile al sito: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf, data di consultazione 3/2/2021.

INVALSI (2019), *Rapporto Prove*, testo disponibile al sito: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2019/Rapporto_prove_INVALSI_2019.pdf, data di consultazione 3/2/2021.

Lockhart P. (2010), *Contro l'ora di matematica*, Rizzoli, Milano.

Martignone F. (2016), "Un'attività di formazione per insegnanti di scuola secondaria di primo grado: analisi di prove INVALSI di Matematica", *Form@re-Open Journal per la formazione in rete*, 16, 1, pp. 70-86.

ISBN 9788835125235

5. *"Continua oltre la figura": come un quadrilatero diventa un triangolo*

di Francesca Ferrara, Marina Gilardi, Ketty Savioli

Questo capitolo presenta una riflessione sul modo in cui alunni della scuola primaria possono affrontare un quesito sul riconoscimento di figure, che nello specifico coinvolge un dato disegno all'interno del quale individuare i triangoli. Partendo dalle percentuali molto basse di risposte corrette del campione nazionale nella fase di pre-test al grado 2 di due versioni del quesito, lo studio è stato ampliato mediante l'analisi qualitativa delle risposte del pre-test e in una classe seconda pilota, nella quale sono state anche svolte interviste individuali con gli alunni, e infine attraverso la sperimentazione di nuove varianti in classi dall'infanzia alla scuola primaria. L'osservazione delle risposte, errate o corrette, e delle eventuali spiegazioni fornite dagli alunni ha evidenziato la ricchezza profonda del quesito, mettendo anche in luce la rilevanza della visualizzazione e di una tensione tra aspetti concettuali e aspetti figurali nell'ambito della competenza geometrica.

This chapter presents a reflection on the ways in which primary school learners can face a question of recognition of geometric shapes, which specifically involves a given diagram in which to identify triangles. Drawing from very low percentages of correct answers of the national sample in the grade 2 pre-test phase of two versions of the question, the study has been expanded via the qualitative analysis of answers to the pre-test, in a pilot grade 2 classroom where we also interviewed individual children, and finally through the experimentation of new variations from kindergarten to primary school. The observation of correct or incorrect answers, and of the eventual explanations provided by learners, highlighted the profound richness of the question, even shedding light on the relevance of visualization and of the tension between conceptual and figural aspects in relation to geometrical proficiency.

ISBN 9788835125235

1. Un quesito piuttosto difficile

In questo articolo presentiamo uno studio che prende spunto dall'esame delle risposte fornite a due item di Spazio e figure nell'ambito del pre-test 2018 delle prove di Matematica SNV-INVALSI del grado 2. I due item corrispondono a versioni distinte di un quesito relativo al riconoscimento di figure in un dato disegno. Il disegno è formato da una cornice rettangolare e da alcuni segmenti tracciati al suo interno, i quali individuano nuove figure geometriche: tra queste si chiede di riconoscere i triangoli. La versione 1 (che fornisce la formulazione originale del quesito) esplicita la presenza nel disegno di 4 triangoli e chiede di apporre una crocetta dentro ogni triangolo (fig. 1 a sinistra). La versione 2 elimina per contro il riferimento al numero esatto di triangoli presenti nel disegno e ne cambia la tipologia (fig. 1 a destra).

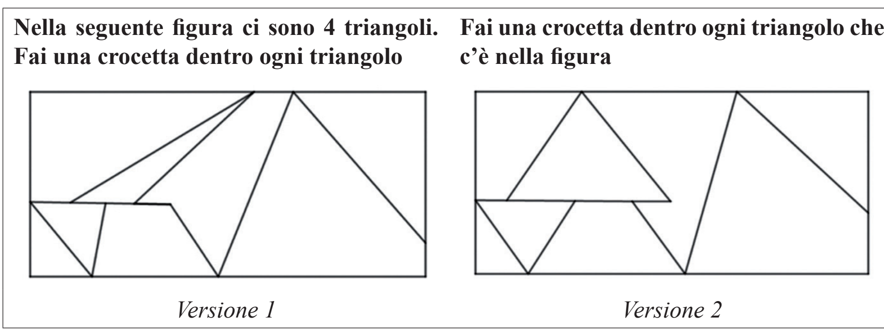


Fig. 1 – Versioni 1 e 2 del quesito sul riconoscimento dei triangoli in una data figura

Notiamo in questo nuovo item la presenza di due triangoli isosceli che sembrano simili tra loro, la scomparsa del triangolo ottusangolo e il lato verticale del quadrilatero in basso a destra allungato leggermente rispetto a quello della versione 1.

Le risposte date dal campione nazionale sperimentale rivelano un'inaspettata difficoltà per i due item che, dunque, non sono mai stati inseriti in un main study. In particolare, dei 491 studenti di seconda primaria che hanno incontrato la versione 1 del quesito, solo il 2,9% ha fornito risposte corrette e le omissioni contano una percentuale di 8,8%. Nel caso della seconda versione, il 5,4% dei 370 studenti del campione ha indicato correttamente i triangoli, mentre il 14,3% ha omesso la risposta. Si tratta di percentuali significative che ci hanno portato a indagare maggiormente la situazione. Un'osservazione dei grafici delle curve caratteristiche dei due item permette di evidenziare alcuni aspetti interessanti:

ISBN 9788835125235

- la versione 1 del quesito ha una probabilità di risposta scorretta che si aggira tra l'80% e il 99% circa, indipendentemente dal livello di abilità dei rispondenti (come mostra l'andamento in su e in giù, a "zig-zag", della linea più in alto in fig. 2);
- la versione 2 del quesito ha una probabilità di risposta scorretta più variabile, che si aggira tra il 55% e il 95%, ma indipendente anch'essa dal livello di abilità (l'andamento a "zig-zag" della linea più in alto in fig. 3 è in questo caso più marcato);
- le probabilità di risposta corretta sono catturate da linee che rimangono basse al crescere dell'abilità, in particolare nel caso del primo quesito la linea resta all'interno del 10% e per gli studenti di abilità molto bassa è quasi schiacciata sullo zero;
- per entrambi gli item, la linea che rispecchia l'andamento delle risposte scorrette appare sostanzialmente simmetrica della linea delle omissioni rispetto al valore centrale (0,5) dell'asse verticale, come a indicare una controtendenza della misura di probabilità. Per esempio, se, a livelli di abilità bassi, la probabilità di omettere la risposta alla versione 1 del quesito (fig. 2) varia tra 0,1 e 0,2, in maniera speculare rispetto alla metà, quella di rispondere in modo errato sta tra 0,8 e 0,9. A livelli di abilità molto alti, mentre la probabilità di sbagliare rientra nella fascia 0,9-1, quella di omissioni è inferiore a 0,1. In modo analogo, per la variante 2 (fig. 3), mentre la probabilità di sbagliare a livelli di abilità molto bassi si avvicina al 50% dall'alto, quella di omettere si avvicina al 50% dal basso.

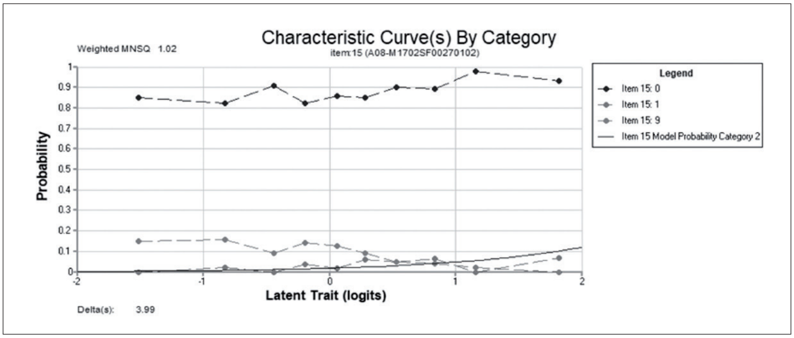


*Fig. 2 – Curva caratteristica dell'analisi dell'*Item Response Theory *(IRT) per la versione 1 del quesito*

ISBN 9788835125235

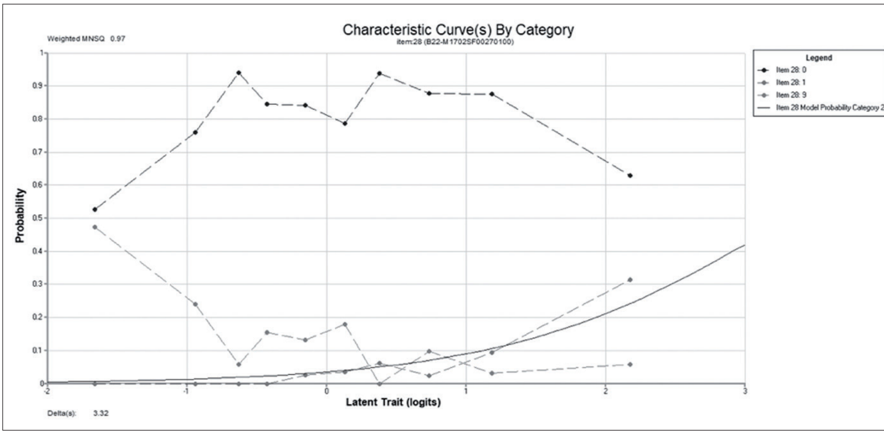


*Fig. 3 – Curva caratteristica dell'analisi dell'*Item Response Theory *(IRT) per la versione 2 del quesito*

Questo comportamento particolare, e per certi versi simile, delle curve caratteristiche ci ha indotto a domandarci quali risposte scorrette avessero fornito gli studenti. Dalle griglie di correzione del pre-test 2018 risultava una situazione paradigmatica, per cui le risposte sbagliate tendevano a selezionare nel caso di entrambe le versioni tre o più figure, tra cui compare sempre anche la figura in basso a destra, che presenta due lati obliqui lunghi, un lato verticale corto e un lato orizzontale, facilmente identificabile con la base di un triangolo. Nel seguito indichiamo tale quadrilatero con il nome di "falso triangolo". Nello specifico, per la versione 1: il 17% di coloro che hanno sbagliato ha selezionato i due triangoli in basso a sinistra, il triangolo rettangolo in alto a destra e il falso triangolo; il 16% ha selezionato il triangolo ottusangolo del disegno invece di quello rettangolo in alto, mentre il 15,6% ha aggiunto il triangolo ottusangolo al posto del triangolo rettangolo in basso a sinistra; infine, l'8,8% ha scelto il falso triangolo, il triangolo ottusangolo e il triangolo scaleno a testa in giù (fig. 4). Per quanto concerne la versione 2 del quesito, le risposte sbagliate significative mostravano per il 28,3% ancora il falso triangolo e i due triangoli isosceli adiacenti e per l'11,8% il falso triangolo oltre ai quattro triangoli presenti (fig. 4).

La scelta del quadrilatero in basso a destra caratterizza quindi una tendenza diffusa nel caso di entrambi gli item, almeno nella fase di pre-test. Stupiva inoltre il fatto che il quadrilatero in alto a sinistra non fosse selezionato con la stessa facilità pur essendo simile, per via di un lato orizzontale e di un lato verticale. Nel riflettere su queste tendenze, abbiamo ipotizzato che il falso triangolo ricordasse maggiormente il modo in cui i bambini sono soliti ve-

ISBN 9788835125235

dere o disegnare triangoli, cioè in posizione standard, con base orizzontale. Per indagare ulteriormente questo fenomeno e avvalorare o meno la nostra ipotesi, abbiamo quindi svolto uno studio pilota con l'osservazione mirata su un gruppo di 23 alunni di una classe seconda primaria, di livello medio e con una didattica tradizionale.

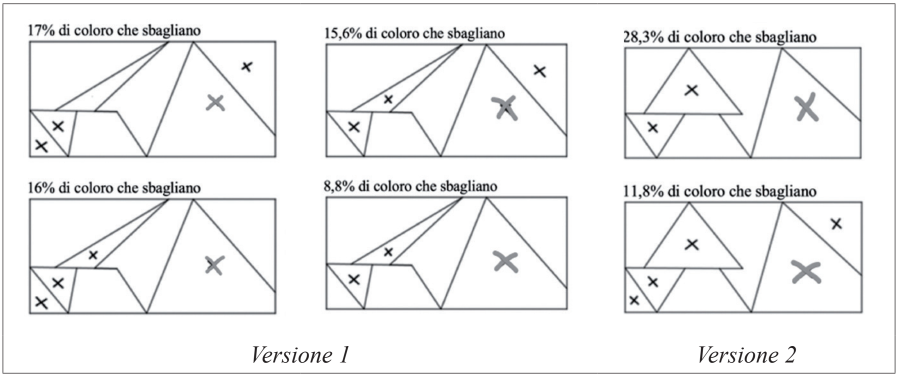


Fig. 4 – Risposte scorrette alle versioni 1 e 2 del quesito

2. Perturbiamo il problema

La classe di 23 bambini che ha partecipato allo studio pilota è stata suddivisa in due sottogruppi, che chiamiamo rispettivamente gruppi A e B. Dopo che ai bambini del gruppo A è stata sottoposta la versione 1 del quesito e ai bambini del gruppo B la versione 2, risultavano 1 sola risposta corretta per il gruppo A e 3 risposte corrette per il gruppo B e, nuovamente, la scelta onnipresente del falso triangolo nel caso delle risposte errate. Per la nostra indagine abbiamo così provato a "perturbare" il problema, producendo due nuove varianti del quesito, indicate con versione 1bis e versione 2bis (fig. 5). Le due versioni sono state semplicemente ottenute dalle precedenti mediante la composizione di due simmetrie assiali e sono state date ai gruppi in modo che questi si scambiassero, ossia il gruppo B ha avuto la variante 1bis e il gruppo A la variante 2bis.

I protocolli hanno fornito ancora soluzioni simili alle casistiche suddette, con 3 risposte corrette sempre a favore del gruppo B e 1 per il gruppo A e con l'assidua scelta del falso triangolo nella sua nuova posizione (in alto a sinistra). La sorpresa in questi nuovi quesiti è poi stata la scelta nella variante 2bis del poligono centrale, come negli esempi mostrati in fig. 6. Si tratta di un poligono con 5 lati, il quale può però essere immaginato come un triangolo coperto sul lato destro dal triangolo isoscele "a testa in giù".

ISBN 9788835125235

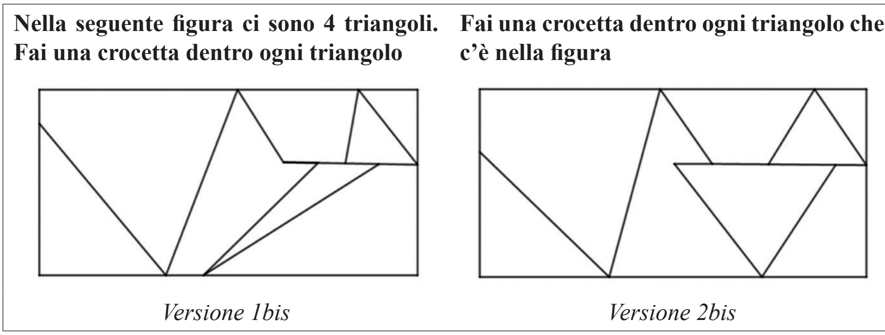


Fig. 5 – Nuove versioni 1bis e 2bis del quesito sul riconoscimento dei triangoli

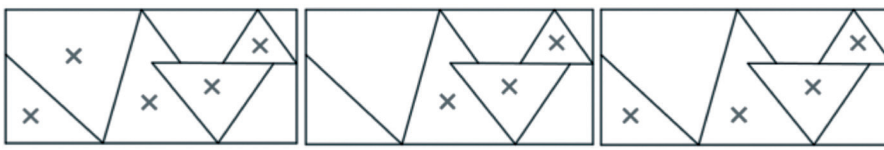


Fig. 6 – Esempi di scelte nel caso della variante 2bis del quesito

Volendo dare i numeri, nel gruppo A ben 11 bambini su 12 hanno scelto il falso triangolo nella versione 1 del quesito, mentre in 6 hanno scelto il poligono di cinque lati nella variante 2bis. Nel gruppo B, 8 bambini su 11 hanno selezionato il falso triangolo a testa in giù nella versione 1bis e 4 hanno indicato il falso triangolo nella versione 1bis. La fig. 7 mostra la totalità delle scelte operate dagli alunni in termini numerici per i quattro casi (notiamo che i quesiti svolti dai 12 bambini del gruppo A sono quelli in alto a sinistra e in basso a destra, gli altri due quesiti sono stati risolti dagli 11 bambini del gruppo B).

La possibilità di pensare il poligono di 5 lati come un triangolo che rimane coperto da un altro e la ripetitività di scelta del falso triangolo ci hanno indotto a condurre (fuori dall’aula) delle interviste individuali a ciascun bambino dei due gruppi.

Durante le interviste, è stato chiesto agli alunni di motivare la scelta dei triangoli. A titolo esplicativo, presentiamo alcune giustificazioni dei 4 bambini del gruppo B che hanno scelto il falso triangolo nelle loro soluzioni della versione 1bis del quesito (fig. 7, in alto a destra) e alcune di 4 su 6 bambini del gruppo A, i quali hanno indicato come triangolo tra gli altri il poligono di 5 lati per la versione 2bis del quesito (fig. 7, in basso a destra). Ci soffermiamo inoltre su ulteriori aspetti evidenziati dagli alunni nel riconoscere certe figure come triangoli.

ISBN 9788835125235

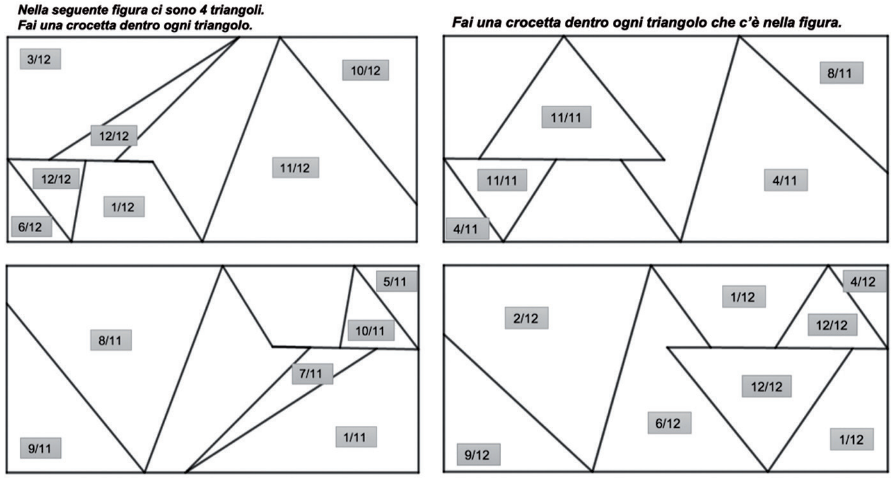


Fig. 7 – I numeri delle scelte dei bambini dei gruppi A e B nelle quattro varianti

2.1. Variante 1bis

Al falso triangolo, scelto dai quattro bambini del gruppo B, sono attribuite le seguenti considerazioni (i nomi utilizzati qui e in seguito non corrispondono ai nomi originali dei bambini, per questioni di privacy). Nadia, riferendosi all'angolo in basso a destra, sostiene che "è un triangolo: hanno finito lo spazio e lo hanno tagliato". Per Giulia "è un po' storto ed è messo di lato" e per Caterina "il triangolo andava di là", intendendo la sua prosecuzione oltre il lato destro del disegno. Luca, infine, asserisce che "è un triangolo molto grande, gigante", del quale "non si vede la chiusura", e traccia il segmento che unisce gli estremi in basso dei "lati obliqui". Altri aspetti di riconoscimento di forme riguardano d'altra parte la scelta delle seguenti figure:

– il triangolo rettangolo in alto a destra: "anche se è messo storto, ho girato il foglio e sembrava sempre un triangolo; deve avere tre lati dritti e tre punte" (Nadia); "è un triangolo obliquo" (Luca);
– il triangolo isoscele rivolto verso l'alto: "il triangolo è sempre messo così" (Nadia); "ha le punte uguali" (Giulia); "è dritto e appuntito come una piramide" (Luca);
– il triangolo isoscele rivolto verso il basso: "ha le punte uguali, anche se è messo all'ingiù non cambia" (Giulia); "non capivo se era un triangolo perché è messo in giù" (Caterina); "è all'incontrario, se lo giri è un triangolo" (Luca).

ISBN 9788835125235

2.2. Variante 2bis

Nel gruppo A, ancora 2 bambini su 12 indicano il falso triangolo. Sophia giustifica la scelta dicendo che "se lo giri è sempre un triangolo", mentre Daniele indica i due segmenti obliqui e afferma: "è un triangolo perché queste due linee sono oblique". I due bambini, assieme ad altri due compagni, scelgono anche il poligono di 5 lati, mettendo in luce che: "è un triangolo, solo che c'è questo pezzo che sporge" (indicando il lato sinistro del triangolo isoscele alla destra della figura; Sophia); "è un triangolo, è coperto da questo" (indicando di nuovo il triangolo a destra; Giorgia); "è un triangolo spezzato" (Paolo). Sono poi riconosciuti tra i triangoli anche le seguenti figure:

– il triangolo rettangolo in basso a destra: "è messo di lato, però se lo metti dritto è un triangolo" (Sophia); "ha tre punte" (Giorgia, Paolo); "è un triangolo un po' all'incontrario" (Daniele);
– il triangolo isoscele rivolto verso l'alto: "triangolo normale" (Sophia, Paolo); «sembra un tetto e ha tre punte" (Giorgia); "è un triangolo dritto" (Daniele);
– il triangolo isoscele rivolto verso il basso: "è messo al contrario, ma se lo giri è sempre un triangolo" (Sophia); "ha tre punte solo che è girato all'incontrario, ho girato la scheda ed è un triangolo" (Giorgia); "è un triangolo proprio all'incontrario, inizia dalla punta e finisce nella riga" (Daniele); "solo che è messo a testa in giù" (Paolo).

2.3. Riflessioni di ricerca didattica

Le interviste ci hanno fornito informazioni significative dal punto di vista della ricerca in didattica della Matematica, soprattutto riguardo al modo di ragionare e di affrontare il quesito da parte dei bambini. Vediamo come, nel disegno, alcune figure siano riconosciute come dei triangoli *normali* o *dritti*, altre come triangoli seppur *all'incontrario*, obliqui o *messi a testa in giù*, talvolta mediante l'aiuto del movimento materiale di rotazione del foglio. Notiamo inoltre come altre figure siano viste come triangoli *coperti* o *spezzati* o *tagliati* o che addirittura continuano al *di là* del bordo. Sulla base di queste osservazioni, abbiamo dunque iniziato a riflettere sui processi di pensiero messi in atto dagli alunni, cercando di comprendere meglio il loro approccio al riconoscimento di forme. Sappiamo per esempio dalla letteratura della ricerca il ruolo giocato dalla *visualizzazione* nell'apprendere e nel fare in Matematica. Arcavi (2003), prendendo spunto da studi precedenti, sostiene: «la visualizzazione è l'abilità, il processo e il prodotto della creazione,

ISBN 9788835125235

dell'interpretazione, dell'utilizzo di, e della riflessione su, figure, immagini, diagrammi, nelle nostre menti, su carta o mediante strumenti tecnologici, per rappresentare e comunicare informazione, pensare a e sviluppare idee precedentemente sconosciute e migliorare la comprensione» (p. 217). Arcavi cita il lavoro di Fischbein quando afferma che la visualizzazione può anche accompagnare uno sviluppo simbolico, dal momento che un'immagine visiva, in virtù della sua concretezza, può essere «un fattore essenziale per creare un sentimento di auto-evidenza e immediatezza» (Fischbein, 1987, p. 101).

Possiamo forse interpretare il triangolo "tagliato" di Nadia, quello che va "di là" di Caterina e la "chiusura" di Luca come espressione di atti creativi o interpretativi del disegno, che attribuiscono qualità sensibili a una figura in modo da identificarla con un triangolo. Lo stesso dicasi per il triangolo "coperto" di Giorgia e "spezzato" per Paolo. Il diagramma implica elementi di immediatezza: i "tre lati" e le "tre punte", l'essere "sempre messo così", l'essere "dritto", e ingredienti che sembrano produrre auto-evidenza, come il movimento del foglio o della figura (il "girare") e il cambio di punto di vista per ritrovare un triangolo che semplicemente è "a testa in giù" o "all'incontrario".

Nella situazione data, se da un lato gli aspetti *percettivi* sembrano giocare un ruolo preponderante nella scelta da parte degli alunni di ciò che è triangolo, dall'altro gli aspetti *concettuali* appaiono rivestire un ruolo quasi secondario. Possiamo domandarci: Quali triangoli hanno visto i bambini finora? E: Quale definizione di triangolo conoscono? La dimensione definitoria è sempre presente in compiti e attività di riconoscimento di figure, che si legano anche a problemi di classificazione – questione altrettanto delicata per l'insegnamento e l'apprendimento della geometria nella scuola primaria. Fischbein parla di aspetti concettuali e aspetti *figurali* in geometria e sostiene che, in genere, le teorie cognitive considerano concetti e immagini come due categorie distinte di entità mentali. Egli sottolinea però anche che, nel caso speciale del ragionamento geometrico, si ha un terzo tipo di oggetti mentali che possiedono simultaneamente proprietà concettuali e figurali (Fischbein, 1993). Il ricercatore israeliano fornisce l'esempio della dimostrazione del seguente teorema: dato un triangolo isoscele con due lati congruenti, gli angoli adiacenti al terzo lato sono congruenti. Per la dimostrazione, possiamo immaginare di procedere separando il triangolo da se stesso e ribaltandolo così da sovrapporlo a quello originario, facendo sì che i due lati congruenti si scambino andando a coincidere con i nuovi. Insomma, il triangolo ribaltato e quello originario coincideranno perfettamente e gli angoli adiacenti al terzo lato saranno uguali. Il cuore della dimostrazione è l'operazione di separazione del triangolo da sé stesso, sebbene, evidenzia Fischbein, i concetti non possano essere distaccati, ribaltati e sovrapposti. Stiamo pensando a opera-

ISBN 9788835125235

zioni apparentemente pratiche, mentre l'operazione di separare un concetto da se stesso non ha un significato concreto. Gli oggetti ai quali ci riferiamo, come lati, angoli e le operazioni con essi, hanno certo una natura concettuale, ma nello stesso tempo hanno una natura figurale intrinseca, poiché solo riferendosi alle immagini si può pensare a operazioni come la separazione e il ribaltamento. Fischbein mette dunque in rilievo una volta di più il ruolo della visualizzazione così come introdotta da Arcavi.

Tornando ai bambini dello studio pilota, è plausibile interpretare il loro approccio in modo costruttivo e, come anticipato, creativo, invece che in soli termini erronei. Per alcune figure nel nostro disegno, infatti, è impossibile essere un triangolo se le si relega alla fissità del foglio o della cornice che le contiene (e, per analogia, se si tagliasse il foglio, ovvero il disegno, seguendo i segmenti che lo compongono). Ma, se si impongono immaginazione e dinamicità (di pensiero, prima ancora che concreta, come nel caso della rotazione del foglio), allora diviene possibile pensare al fatto che il poligono di cinque lati sia davvero un triangolo coperto da un secondo triangolo, oppure al quadrilatero come ottenuto da un triangolo al quale è stato piegato o tagliato un angolo, o ancora al triangolo chiuso dentro un quadrilatero. Diviene insomma possibile trasformare le figure geometriche, rendere mobile il pensiero andando oltre i confini imposti dal disegno, vedere e capire come un quadrilatero può diventare un triangolo. L'aspetto cardine di una tale interpretazione è il movimento: il movimento di trasformazione di una figura in un'altra, che è certo un movimento cognitivo e immaginativo, il quale apporta ricchezza nella situazione, non sottrae qualità anzi le aggiunge. Un movimento che nel contempo è molteplicità di creazione e di riflessione sul diagramma e sui legami tra figure diverse. Un movimento che ha una natura generativa, perché nutre la bellezza di un quesito apparentemente semplice, ma che si trasforma (anch'esso) in qualcosa di diverso, di nuovo, che fa spazio alla natura complessa dell'apprendimento (cui forse noi non diamo mai spazio abbastanza). Movimento che cattura ed esprime l'intreccio concettuale/figurale di cui parla Fischbein, intreccio che talvolta è più un gioco di forze. Quasi tutti i bambini dei gruppi A e B, che identificano il quadrilatero o il poligono di cinque lati con un triangolo, sanno infatti riconoscere un triangolo, ciascuno con il proprio punto di vista, il proprio modo di vedere, un personale approccio al disegno. Molti, similmente gli uni con gli altri. Questi bambini sanno che cos'è un triangolo, anche se è girato, in posizione non usuale, e inventano modi di dire, di esprimere e di vedere quella particolare figura come un triangolo. Ci insegnano l'importanza di una tensione tra concettuale e figurale in geometria, per la quale conoscere un triangolo può volere anche dire riconoscerlo là dove i vincoli non permetterebbero di

ISBN 9788835125235

vederlo o trovarlo (per dettagli sull'importanza di una Matematica in movimento e dell'idea di movimento nel pensiero matematico, nella sua essenza e intensità, rimandiamo a Ferrara, Ferrari e Savioli, 2019; Roth, 2015).

Queste prime riflessioni sul piccolo gruppo di bambini dello studio pilota ci hanno mostrato la complessità e ricchezza assieme del quesito ma anche indotto a investigare ulteriormente le potenzialità della sua richiesta di riconoscimento. Abbiamo dunque pensato di progettare, in forma più flessibile rispetto a quella di un item valutativo, una nuova attività. L'attività è stata proposta, accanto alle quattro varianti del quesito, ai docenti dalla scuola dell'infanzia alla scuola secondaria di primo grado, nell'ambito di un corso di formazione docenti della rete AVIMES Piemonte, nell'anno scolastico 2018/2019, sul legame tra relazioni, percezioni e argomentazioni in geometria. I risultati della sperimentazione dell'attività che è derivata dalla nostra proposta sono discussi nell'ultima sezione di questo articolo.

3. Una nuova attività didattica

L'attività didattica presentata ai docenti in formazione utilizza il diagramma della versione originaria del quesito, variando la consegna che introduce il contesto di un compito assegnato dalla maestra ai suoi alunni, ossia: "mettere una crocetta su un triangolo". Il diagramma compare con il falso triangolo crocettato, secondo il testo, da Anna, protagonista con la maestra nella nuova situazione (fig. 8). L'accento è dunque posto sulla scelta del quadrilatero e si chiede al solutore se Anna abbia svolto correttamente il compito e di spiegare perché.

I docenti partecipanti al corso hanno manifestato interesse per le varie proposte, tanto che più di 1200 bambini hanno avuto modo di sperimentare il quesito attraverso una delle varianti nel periodo tra aprile e giugno 2019. In particolare, 515 alunni hanno lavorato sulla nuova attività didattica, suddivisi tra: 45 in classe prima, 259 in classe seconda, 166 in classe terza, nessuno in classe quarta e 45 in classe quinta. Le classi seconda e terza primaria hanno perciò avuto maggior successo in termini di scelta da parte dei docenti. I bambini della scuola dell'infanzia si sono invece cimentati con le versioni 2 e 2bis del quesito originario, con il supporto delle docenti.

ISBN 9788835125235

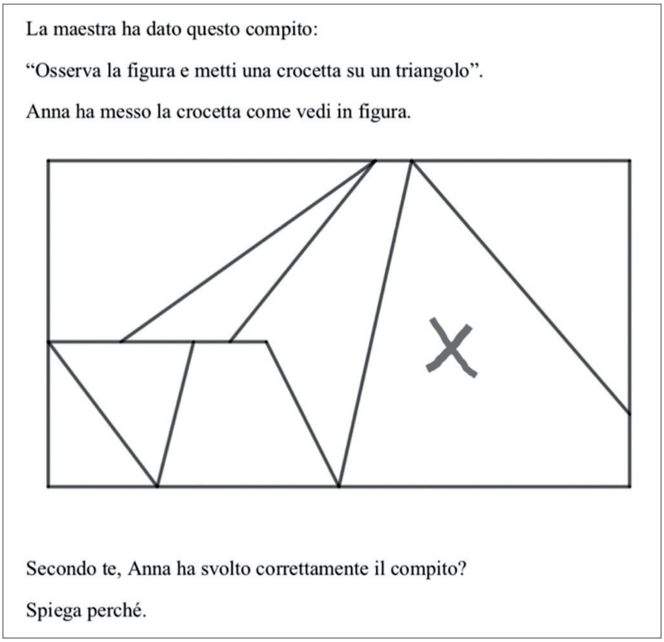


Fig. 8 – Attività didattica sul riconoscimento di un triangolo

Prendendo in esame le spiegazioni fornite dagli alunni di una classe terza, possiamo fare una prima considerazione. Indipendentemente dal Sì o dal No in risposta allo svolgimento corretto del compito da parte di Anna, questi bambini tendono a identificare il quadrilatero in basso a destra come un triangolo. Due esempi: "Sì, perché la maestra diceva di mettere solo una crocetta in un triangolo e non aveva detto che ne doveva crocettare altri, quindi ha fatto giusto Anna"; "No, perché c'erano anche altri triangoli, doveva crocettare anche gli altri se voleva fare giusto". Le risposte sembrano legarsi alla richiesta di scelta di un solo triangolo piuttosto che al riconoscimento della figura scelta come un triangolo. In questo caso non ci sono aggiunte, il quadrilatero è essenzialmente preso per un triangolo. Potrebbe trattarsi di una mera questione linguistica, nella quale incidono profondamente il controllo del testo della consegna e la sua comprensione. D'altra parte, troviamo risposte simili a quelle già citate nei protocolli delle diverse classi che hanno sperimentato l'attività. In classe prima, per esempio, abbiamo un triangolo ricavato dentro il quadrilatero con l'aggiunta di un lato in corrispondenza della risposta: "No" e della spiegazione "perché non si chiude" (fig. 9a), oppure la spiegazione che Anna ha sbagliato perché "ha messo la X in uno con 4 punte", mentre i quattro triangoli presenti nel diagramma sono anche crocettati (fig. 9b).

ISBN 9788835125235

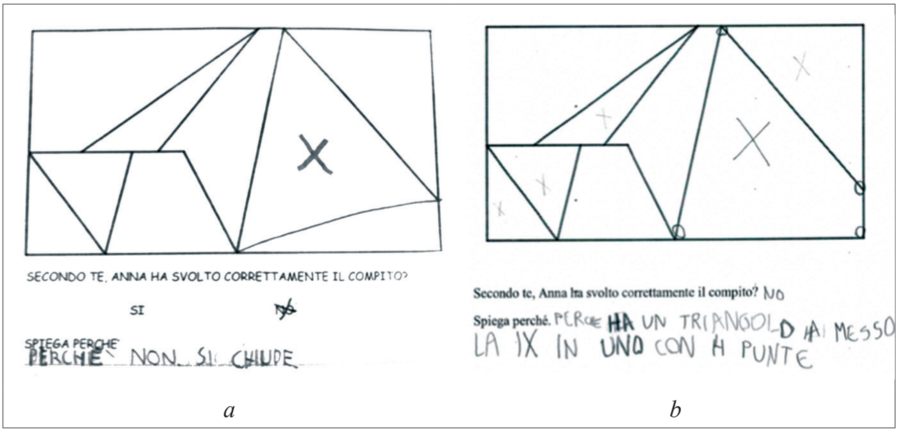


Fig. 9 – Risposte di bambini di classe prima primaria all'attività didattica

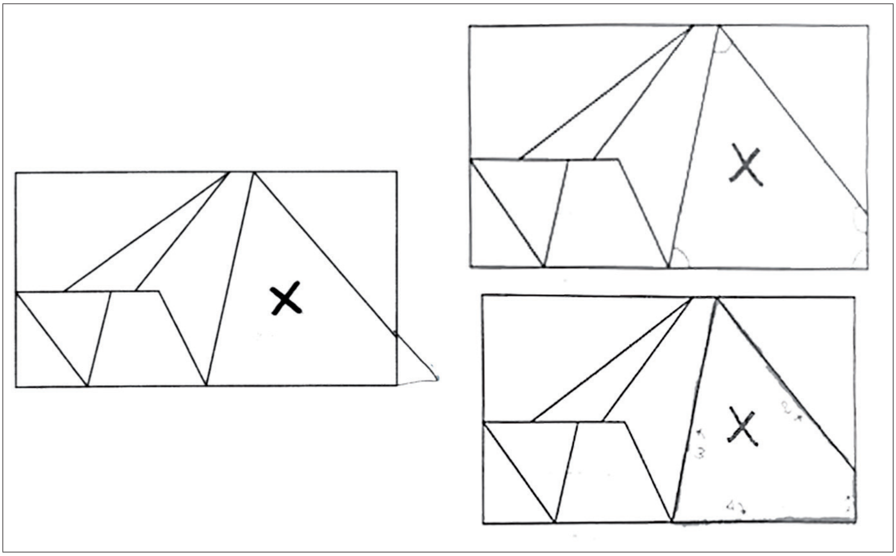
Dai bambini di seconda primaria, rivediamo aspetti figurali per il triangolo senza punta accanto alla scelta del "Sì, perché la consegna dice chiaramente che bisogna crocettare su un triangolo ed è quello che ha fatto Anna" (fig. 10a). Nelle classi terze troviamo presente più fortemente l'aspetto concettuale, come mostrano i diagrammi della fig. 10b, accompagnati dalle spiegazioni: "chiudendo in quel modo forma 4 angoli anzi che 3 che lo dice pure il nome che ne deve avere 3, TRIangolo" (le lettere maiuscole indicano enfasi; in alto); "ci sono quattro lati e quindi non è un triangolo ma è un quadrilatero. Ho fatto i lati in rosso per far capire meglio" (i lati ripassati sono quelli indicati come "in rosso"; in basso).

Ritroviamo anche nei protocolli dell'attività didattica la tensione tra concettuale e figurale di cui abbiamo parlato nella sezione precedente. In conclusione, possiamo sintetizzare alcuni elementi del modo di ragionare dei bambini nel nostro contesto che sembrano significativi per la costruzione di competenza geometrica:

– là dove il triangolo non si chiude o non continua, l'immaginazione e la visualizzazione provvedono a renderlo tale. È come se l'aspetto concettuale quasi sovrastasse quello figurale, con l'immaginazione che sfida la percezione;
– il linguaggio può avere una certa rilevanza, come nell'esempio del nome *TRIangolo*. Il controllo del testo è un altro aspetto importante, oltre che per la comprensione della consegna anche a supporto degli aspetti concettuali;
– l'attenzione sembra oscillare tra che cosa c'è di inatteso nel disegno o che cosa dovrebbe esserci (come nel caso dei tre lati e delle tre punte, elementi

ISBN 9788835125235

definitori), oppure su che cosa manca (elementi percettivi, spesso accompagnati dall'uso del "se", per esempio in: "se lo giri" o "se lo metti dritto");
– l'impossibilità che una figura, sotto determinate condizioni, sia un triangolo non elude la possibilità di pensare la figura come (parte di) un triangolo (incompleto) o di ritrovare un triangolo in essa.



a *b*

Fig. 10 – Diagrammi di bambini di classe seconda (a) e terza (b) primaria

Dobbiamo infine sempre domandarci quale immagine e concezione hanno i bambini del triangolo, nel momento in cui affrontano quesiti come quello qui discusso. Affinché costruiscano una concezione che miri il più possibile a considerare un triangolo in termini concettuali come una vera e propria famiglia è indispensabile creare occasioni di incontro con molteplicità di casi e favorire quella dinamicità che sembra appartenere al pensiero geometrico, e matematico in generale.

Un'ultima riflessione concerne i diversi obiettivi con cui il quesito è stato sperimentato dai docenti del corso di formazione a diversi livelli, come loro stessi hanno dichiarato in un questionario di fine corso. Con il loro pensiero, ci hanno mostrato che non è mai né troppo presto né troppo tardi per parlare di triangoli. Alla scuola dell'infanzia, le varianti 2 e 2bis sono servite "per indagare le pre-conoscenze e proporre una riflessione senza il timore di sbagliare". Nel caso delle classi prime della scuola primaria, in cui le scelte si sono divise tra le versioni 1 e 1bis e l'attività didattica, le docenti hanno

ISBN 9788835125235

sostenuto di volere "provare ad argomentare e a lavorare in gruppo". Nelle classi seconde, invece, in cui sono state utilizzate tutte le varianti, esse sono servite "per consolidare e ragionare". In terza primaria, infine, hanno guidato le sperimentazioni questi obiettivi: "per verificare alla fine di un percorso"; "per riconoscere e denominare poligoni"; "per fare un'autovalutazione del percorso della classe e poter intervenire e chiarire". In conclusione, anche un "semplice ma difficile" quesito di riconoscimento di figure, sperimentato con un numero elevato di discenti, ci ha rivelato una profondità di esperienze e di prospettive inaspettate alquanto interessanti dal punto di vista didattico.

Riferimenti bibliografici

Arcavi A. (2003), "The role of visual representations in the learning of mathematics", *Educational Studies in Mathematics*, 52, 3, pp. 215-241.

Ferrara F., Ferrari G., Savioli K. (2019), "Matematica in Movimento: radici, sviluppi e implicazioni di un approccio grafico al concetto di funzione tramite i sensori", *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 42A, 1, pp. 29-60.

Fischbein E. (1987), *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*, Reidel, Dordrecht.

Fischbein E. (1993), "The theory of figural concepts", *Educational Studies in Mathematics*, 24, 2, pp. 139-162.

Roth W.M. (2015), "Excess of graphical thinking: Movement, mathematics and flow", *For the Learning of Mathematics*, 35, 1, pp. 2-7.

ISBN 9788835125235

6. *I problemi verbali e il valore predittivo delle prove INVALSI*

di Roberto Capone, Alice Lemmo, Federica Filiberti

La competenza matematica viene definita come l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. In questo capitolo presenteremo una ricerca focalizzata sulle difficoltà linguistiche che gli studenti incontrano nella risoluzione dei quesiti INVALSI della dimensione risolvere problemi, su quali difficoltà emergono nella scuola primaria e su come queste si sviluppano o si modificano nel passaggio dalla classe seconda alla classe quinta. L'analisi di catene di quesiti somministrati in livelli successivi alla stessa coorte di studenti ci ha permesso di individuare specifiche difficoltà, le loro origini didattiche ed epistemologiche e di identificare precocemente gli studenti in difficoltà analizzando i risultati delle prove. L'analisi che presenteremo cerca di ricondurre le difficoltà riscontrate nel grado 5 ai comportamenti degli studenti nel grado 2. Partendo dai dati delle prove INVALSI di quinta primaria, abbiamo svolto un'analisi a ritroso sulla prova di seconda per identificare delle catene di quesiti. L'analisi ha mostrato la presenza di molte difficoltà comuni e quindi ha confermato che un lavoro precoce sui risultati delle prove di seconda può essere utile per evitare possibili futuri errori nelle prove successive. Dagli esiti si evince che gli interventi didattici hanno prodotto cambiamenti positivi nella classe sperimentale, rispetto a quella di controllo.

Mathematical competence is defined as the ability to develop and apply mathematical thinking to solve a range of problems in everyday situations. In this chapter we present a research centered on the linguistic difficulties that students experience in solving INVALSI test. We focus on the item of the dimension solving problems and we investigate on what difficulties emerge in primary school and how these develop or change in the passage from grade 2 to grade 5. The analysis of the results of the chains of questions

ISBN 9788835125235

allows us to identify specific difficulties, their didactic and epistemological origins and to identify students' difficulty at an early stage. The analysis aims to investigate the difficulties that emerge in the different school grades and, in particular, it focusses on linking the difficulties encountered in grade 5 students to those in grade 2. This analysis is based on the hypothesis that some strategies employed in previous grades are predictive of future solution strategies, which will lead students to errors in future questions. Starting from the data collected in grade 5 INVALSI tests, we carried out a backward analysis of the grade 2 test in order to identify chains of questions. The analysis shows the presence of many common difficulties in the two grades and therefore it confirms that an early work on the results of grade 2 tests can be useful to prevent possible future errors in subsequent tests. The results show that the specific educational activities have produced positive changes in the experimental class, compared to the control class.

1. Introduzione

La competenza matematica costituisce una delle otto competenze-chiave proposte dalle Raccomandazioni del Parlamento Europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006 (2006/962/CE). In particolare, tale competenza viene definita come l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane (MIUR, 2012, p. 12). Proprio per questo motivo, il processo di risoluzione di problemi è uno degli elementi chiave nella progettazione di attività di insegnamento/apprendimento della Matematica in tutti i Paesi (Ball e Bass, 2003; Kilpatrick, Swafford e Findell, 2001). Secondo Schoenfeld (1985), risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà o per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. In linea con questo pensiero, il problem solving è una delle attività in cui studenti e docenti incontrano maggiori difficoltà.

Nella pratica didattica, i problemi di Matematica sono generalmente presentati attraverso un testo scritto arricchito da altre forme di rappresentazione (per esempio, grafici, tabelle, immagini, …); per questo motivo, molto spesso in letteratura vengono chiamati problemi verbali (Verschaffel, Greer e De Corte, 2000) o problemi a righe (Zan, 2016).

In questo contributo, presenteremo una ricerca focalizzata sulle difficoltà linguistiche che gli studenti incontrano nella risoluzione dei problemi verbali. In particolare, la nostra attenzione verterà su quali difficoltà emergono nella scuola primaria e come queste si sviluppano o si modificano nel passag-

ISBN 9788835125235

gio dalla classe seconda alla classe quinta. Tali difficoltà sono state raccolte ed esaminate a partire dai risultati emersi dalle analisi dal Servizio Nazionale di Valutazione. Il nostro obiettivo è quello di propone un'analisi integrata, qualitativa e quantitativa, che possa fornire materiale per una riflessione sulle prove di valutazione standardizzata nazionale in riferimento ai problemi verbali.

2. La ricerca in didattica della Matematica sui problemi verbali

Da diversi anni, un importante ramo della ricerca in didattica della Matematica nazionale e internazionale si focalizza sullo studio delle difficoltà legate al processo di risoluzione di problemi; in particolare, l'attenzione si rivolge sui fattori che possono maggiormente influenzare gli studenti nella scelta di implementare o meno le strategie risolutive.

Molte ricerche mostrano che la maggior parte delle difficoltà che gli studenti incontrano riguardano da una parte l'implementazione di un algoritmo risolutivo (si veda per esempio Jupri e Drijver, 2016; Wijaya *et al.*, 2014; English e Watters, 2004) e dall'altra la comprensione del testo (si veda per esempio Mayer, 1982; De Corte e Verschaffel, 1985; Vilenius-Tuohimaa, Aunola e Nurmi, 2008).

In riferimento a questo secondo aspetto, molte ricerche mostrano che il testo ha una forte influenza sull'interpretazione del solutore e quindi sui processi risolutivi che mette in campo (Kintsch e Greeno, 1985). Diverse ricerche internazionali, per esempio quella presentata da Nesher (1982), mostrano che in molti casi gli studenti provano a inferire direttamente dal testo i passaggi risolutivi per determinare la soluzione del problema piuttosto che rappresentare la situazione descritta nel testo. Dagli anni Ottanta, sono state realizzate migliaia di ricerche in questo campo, quelle presentate in precedenza rappresentano solo un piccolo esempio. Daroczy e colleghi (2015) hanno proposto un'ampia review della letteratura sul tema e hanno evidenziato che sono tre le principali componenti che possono provocare delle difficoltà nel processo risolutivo dei problemi verbali:
- la complessità linguistica del testo del problema;
- la complessità numerica dei dati presentati nel problema;
- la relazione tra la componente linguistica e quella numerica del problema.

Infatti, leggere e interpretare un testo matematico non significa solo decodificare la consegna, ma implica anche la capacità di ricavare dal contesto descritto le informazioni con le quali poi lavorare. A riguardo Zan (2012) parte dall'assunto che vi è uno stretto legame tra "contesto" e "domanda" cui

ISBN 9788835125235

segue la focalizzazione della situazione problematica: più le due componenti sono tra loro collegate, maggiore sarà la comprensione. Inoltre, lo studente si ritrova ad affrontare un problema "eteroposto", ossia formulato da un individuo diverso da lui, oltre a doverne decifrare la formulazione scritta (*ibid.*). L'interpretazione delle richieste implica necessariamente le seguenti tre componenti (Gerofsky, 1996):

– la corretta contestualizzazione del problema, con tutte le sue implicazioni;
– l'individuazione di tutte le informazioni necessarie per la risoluzione;
– la messa in atto dei processi risolutivi e delle operazioni matematiche conseguenti.

Il punto di partenza del nostro lavoro è che, se le difficoltà relative a queste tre componenti vengono individuate precocemente, possono essere messe in atto strategie didattiche finalizzate alla corretta costruzione del sapere matematico.

3. I quesiti INVALSI e le catene di quesiti

I quesiti somministrati nelle rilevazioni cartacee del Servizio Nazionale di Valutazione e che vengono qui presentati sono strettamente collegati con le Indicazioni nazionali secondo un fissato Quadro di riferimento (SNV, 2018). I quesiti delle prove sono di diverse categorie (scelta multipla semplice, scelta multipla complessa, risposta univoca, risposta aperta articolata, cloze), appartenenti alle tre dimensioni (Conoscere, Risolvere problemi, Argomentare). Ogni quesito viene inoltre presentato con una classificazione relativa alle sue caratteristiche (Ambito, Scopo della domanda, Traguardi per lo sviluppo delle competenze, Obiettivi di apprendimento delle Indicazioni nazionali e Linee guida).

I risultati delle indagini INVALSI, sono analizzati facendo uso del modello di Rasch (1960). Si tratta di un modello logistico a un parametro che appartiene alla categoria dell'*Item Response Theory* (IRT) e opera una stima congiunta di due tipologie di parametri: un parametro di difficoltà per ogni domanda del test e un parametro d'abilità per ogni studente. In particolare, il modello di Rasch consente di esprimere la probabilità di scegliere la risposta corretta in un quesito in funzione della difficoltà del quesito stesso e dell'abilità dello studente misurata sull'intera prova. La relazione tra l'abilità degli studenti sull'intero test e la probabilità di rispondere correttamente a un quesito è rappresentata da una curva chiamata curva caratteristica dell'item. In modo analogo è possibile rappresentare i dati empirici e, in particolare, l'andamento di ciascuna risposta (in caso di quesiti a scelta multipla delle

ISBN 9788835125235

opzioni di risposta) in funzione dell'abilità degli studenti. Questi specifici grafici, chiamati distractor plot (DP), consentono di analizzare come gli studenti hanno risposto a una domanda in base al loro livello di abilità ottenuto sull'intero test, tenendo conto anche dell'andamento delle risposte sbagliate. I DP sono utili in fase di analisi dei dati raccolti dal Servizio Nazionale di Valutazione: le percentuali indicano solo la quantità di studenti che hanno dato una certa risposta ma non la loro abilità. Questi grafici, invece, mostrano la correlazione tra la percentuale di scelta di una certa risposta e l'abilità dello studente nella prova.

L'analisi delle prove INVALSI oggetto di questo studio è stata fatta individuando delle *catene di quesiti* (Bolondi *et al.*, 2016). Si tratta di quesiti somministrati in livelli successivi alla stessa coorte di studenti e relativi a un particolare contenuto di apprendimento e quindi riferite alla stessa dimensione e ambito della Matematica. Come mostrato da Bolondi e colleghi (*ibid.*), l'analisi dei risultati delle catene di quesiti permette da un lato di individuare specifiche difficoltà e le loro origini didattiche ed epistemologiche e dall'altro di identificare precocemente gli studenti in difficoltà. Lo studio che presenteremo mira a indagare le difficoltà che emergono nei diversi livelli e, in particolare, a cercare di ricondurre le difficoltà riscontrate nel grado 5 ai comportamenti degli studenti nel grado 2. Alla base di questo lavoro di analisi c'è l'ipotesi che, scelti opportunamente i quesiti, alcune strategie manifestate nei livelli precedenti, che hanno condotto lo studente a scegliere opzioni di risposta errate, siano predittive di future strategie risolutive che condurranno quindi all'errore in prove successive.

In questa prospettiva, ci aspettiamo che l'analisi di particolari quesiti relativi alla dimensione risolvere problemi, può permettere di evidenziare determinate difficoltà in un certo livello scolastico per indagare se queste possano essere previste dai risultati delle prove precedenti. In particolare, abbiamo scelto di analizzare i quesiti della dimensione risolvere problemi delle prove INVALSI di seconda primaria dell'anno scolastico 2008/2009 e quelle di quinta primaria dell'anno 2011/2012. Dopo un'accurata analisi statistica e un'analisi a priori delle domande, basata su teorie e risultati della ricerca in didattica della Matematica, abbiamo individuato difficoltà comuni sui due gradi scolastici legate alla comprensione del testo dei problemi verbali proposti.

A partire da quest'attività abbiamo predisposto una sperimentazione sulle classi seconde. L'obiettivo principale del lavoro è quello di suggerire una metodologia per individuare precocemente difficoltà su alcuni aspetti del processo di insegnamento/apprendimento della Matematica per intraprendere dei percorsi volti al loro superamento. In altre parole, lo scopo del nostro lavoro è

ISBN 9788835125235

di mettere in evidenza, rispetto a un particolare contenuto e dimensione matematica, alcune difficoltà che i bambini hanno incontrato e prevedere probabili esiti negativi futuri. Il potere predittivo dell'analisi dei risultati raccolti dalle catene di quesiti, ancorati alla ricerca in didattica della Matematica, permette così di ipotizzare eventuali suggerimenti didattici per intervenire sin da subito ed evitare che le difficoltà osservate in un certo grado scolastico si propaghino o addirittura aumentino nei gradi scolastici successivi.

3.1. Selezione dei quesiti

Le catene di quesiti analizzate in questo elaborato sono relative a problemi verbali risolubili attraverso una modellizzazione aritmetica.

Eseguendo un confronto approfondito tra le prove INVALSI di Matematica di grado 2 (a.s. 2008/2009) e 5 (a.s. 2011/2012) abbiamo identificato delle catene di quesiti relativi alla dimensione Risolvere problemi nell'ambito Numeri. L'insieme di quesiti selezionati è composto da 7 quesiti di grado 2 (rispettivamente n. 2, 4, 8, 9, 14, 16, 22) e 4 quesiti di grado 5 (rispettivamente n. 8, 23, 30, 32). L'analisi statistica e a priori dei questi, ci ha permesso di individuare caratteristiche comuni sui due gradi scolastici. In tabella 1 sono elencati i quesiti afferenti alla stessa catena con una breve descrizione degli aspetti che accomuna i quesiti della stessa catena.

Tab. 1 − Elenco dei quesiti afferenti alla stessa catena con una breve descrizione degli aspetti che li accomuna

Quesiti di grado 2	*Quesiti di grado 5*	*Caratteristiche comuni individuate*
2, 16, 22	23, 30	Problema verbale che richiede di riflettere sulla moltiplicazione come modello per descrivere raggruppamenti di oggetti in contesti reali
8, 9, 14	8	Problema verbale che prevede l'interpretazione di espressioni aritmetiche descritte in forma verbale in un contesto reale
4	32	Problema verbale additivo che richiede di lavorare sulla linea dei numeri in un contesto reale

Di seguito presentiamo un esempio di analisi di una catena composta solo da due quesiti; in particolare il quesito D32 della prova INVALSI di Matematica di quinta primaria (fig. 1) e il quesito D4 della prova INVALSI di Matematica di seconda primaria (fig. 2).

ISBN 9788835125235

D32. **Antonella parcheggia nel garage di un grattacielo che si trova al quarto piano sotto il livello zero (piano terra). Sale con l'ascensore per 24 piani. A quale piano Antonella uscirà dall'ascensore?**

A. ☐ 16

B. ☐ 20

C. ☐ 24

D. ☐ 28

Fig. 1 – Quesito D32 della prova INVALSI di Matematica di grado 5 a.s. 2011/2012

4. La mamma di Lucia sta facendo la spesa al supermercato. Il tabellone del banco indica che stanno servendo il numero che vedi.

La mamma ha preso il biglietto con il numero 39.

Quante tra le persone in attesa saranno servite prima di lei?

☐ A. 38

☐ B. 3

☐ C. 5

Fig. 2 – Quesito D4 della prova INVALSI di Matematica di grado 2 a.s. 2008/2009

I quesiti presentati chiedono allo studente di lavorare sulla linea dei numeri e contare in senso progressivo e regressivo.

Un altro esempio di catena è rappresentato dai quesiti D30 (fig. 3) di grado 5 e D2 (fig. 4) di grado 2. I quesiti chiedo allo studente di operare con i numeri naturali in un contesto moltiplicativo.

D30. **Marta è appassionata di fumetti. La nonna le regala 20 euro e Marta decide di spenderli per acquistare dei giornalini che costano € 2,20 l'uno. Quanti giornalini riesce a comprare al massimo?**

Risposta: ....

Fig. 3 – Quesito D30 della prova INVALSI di Matematica di grado 5 a.s. 2011/2012

ISBN 9788835125235

2. Giovanni compra delle scatole di matite come questa:

Ha in tutto 18 matite. Quante scatole ha comprato?

☐ A. 2

☐ B. 3

☐ C. 6

Fig. 4 – Quesito D2 della prova INVALSI di Matematica di grado 2 a.s. 2008/2009

3.2. Analisi a priori dei quesiti

Prima di somministrare i quesiti agli studenti abbiamo svolto un'analisi a priori delle domande a partire dai dati raccolti dal Servizio Nazionale di Valutazione relativi al campione nazionale[1]. Lo scopo di quest'analisi è delineare le possibili strategie risolutive che gli studenti potrebbero aver messo in campo e le eventuali difficoltà che potrebbero aver incontrato durante la risoluzione.

La prima catena di quesiti che andremo ad analizzare è quella costituita dai quesiti D32 (fig. 1) e D4 (fig. 2).

Il quesito D32 chiede allo studente di individuare il piano in cui si aprirà l'ascensore conoscendo il piano di partenza e il numero di piani che deve salire. A partire dalle informazioni presentate nel quesito, le possibili strategie risolutive che si potrebbero mettere in campo sono:

– contare in successione cominciando dal piano di partenza (corrispondente a 0 nel conteggio) fino a raggiungere il 24° numero della successione (-1, 0, 1 … 18, 19, 20);
– eseguire la sottrazione tra il numero di piani che l'ascensore deve salire e il piano di partenza (24-4=20);
– eseguire la somma tra numeri interi (20+(-2)=20).

[1] I dati, i grafici e le immagini dei quesiti che seguiranno sono stati estrapolati dal database delle prove INVALSI gestinv.it.

ISBN 9788835125235

Il quesito è a risposta chiusa, tra le opzioni di scelta solo una è corretta (B) scelta dal 43,5 % degli studenti del campione nazionale. Ciascuna delle altre opzioni errate è probabilmente riconducibile a delle difficoltà che potrebbero aver incontrato gli studenti.

Nello specifico, coloro che hanno risposto A (4,2% degli studenti), hanno presumibilmente svolto il ragionamento per cui, dapprima è stata fatta la differenza tra 24 e 4 (24-4=20) e successivamente, seppur giunti al risultato corretto, è stata tolta ancora una quantità pari a 4 (20-4=16). Coloro che hanno scelto l'opzione C (20,7% degli studenti) probabilmente non hanno tenuto in considerazione che Antonella ha parcheggiato al piano "-4" e non al piano terra. Infine, gli studenti che hanno selezionato l'opzione D (22,8% degli studenti), hanno riconosciuto un problema additivo (sommare al piano di partenza il numero di piani da salire) ma non hanno saputo gestire l'operazione nell'insieme dei numeri interi (24+4=28).

Il DP del quesito (fig. 5) indica la correlazione tra la percentuale di scegliere una certa opzione e l'abilità dello studente nella prova. In questo caso, possiamo osservare che la probabilità di scelta delle opzioni errate diminuisce con l'aumentare delle abilità degli studenti e viceversa per la risposta corretta. Ciò non accade per l'opzione D che ha un picco di scelta per studenti di abilità media. Questo fatto ci suggerisce che alcuni studenti di abilità media hanno individuato correttamente il modello additivo per risolvere il quesito ma non sono stati in grado di adattarlo alla situazione con i numeri interi.

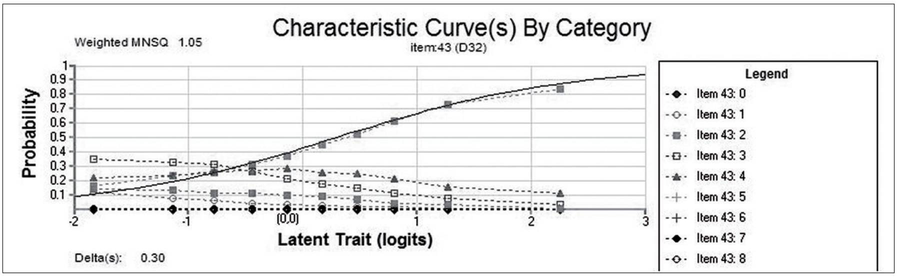


Fig. 5 – Curva caratteristica quesito D32 prova INVALSI di Matematica di grado 5 a.s. 2011/2012

Il quesito D4 presenta un'analoga situazione ma nel contesto dei numeri naturali.

Per risolvere il quesito gli studenti potrebbero aver adottato le seguenti strategie risolutive:

– contare in successione in senso progressivo partendo dal numero 35 (associato a 0) fino ad arrivare a 38 (36, 37, 38);

ISBN 9788835125235

– contare in successione in senso regressivo partendo dal numero 39 (associato a 0) fino ad arrivare a 36 (38, 37, 36);
– eseguire la sottrazione (38-35=3) (non considerando il 39 perché il proprio numero e quindi non una persona in attesa;
– eseguire la sottrazione (39-36=3) (non considerando il 35 perché è un cliente che già è servito.

Anche questo quesito è a risposta chiusa, tra le opzioni di scelta solo una è corretta (B) scelta dal 39,3% degli studenti del campione nazionale.

Le opzioni di risposta errate sono riconducibili a possibili difficoltà incontrate dagli strumenti in fase risolutiva. Per esempio, gli studenti che hanno scelto l'opzione A (33,5%) potrebbero aver riconosciuto un problema di conteggio (o additivo) ma aver considerato 0 come numero di partenza e non 35. Coloro che hanno scelto l'opzione C (22,3%) è possibile che abbiano svolto il conteggio (35, 36, 37, 38, 39) senza considerare il vincolo della persona servita e che il 39 fosse la mamma. Il DP (fig. 6) segue, anche in questo caso, un andamento classico: crescente per l'opzione corretta e decrescente per le opzioni errate ad eccezione dell'opzione C per cui compare di nuovo una leggera crescita fino a un livello medio di abilità.

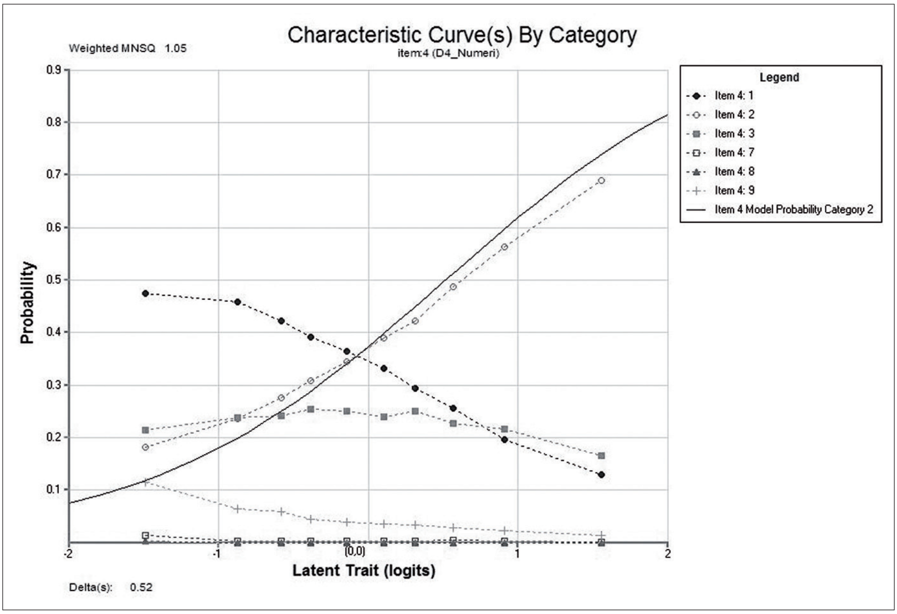


Fig. 6 – Curva caratteristica quesito D4 prova INVALSI di Matematica di grado 2 a.s. 2008/2009

ISBN 9788835125235

È interessante l'andamento analogo dei distrattori D (fig. 5) e C (fig. 6) nelle due domande rispettivamente di grado 5 e 2. Facendo un'analisi a ritroso possiamo ipotizzare che dietro alla scelta dei due distrattori ci sia una difficoltà analoga, infatti, per quando riguarda il quesito dell'ascensore, lo studente mostra di aver compreso la struttura additiva o di conteggio del quesito ma ha difficoltà a utilizzare le informazioni rispetto al modello matematico. Allo stesso modo, lo studente di grado II che ha scelto l'opzione C mostra di aver individuato la strategia di conteggio adatta per determinare la risposta ma potrebbe non essere stato in grado di adattarla al modello. Possiamo ipotizzare quindi che la difficoltà rilevata nella prova INVALSI di grado 2 possa essere collegata alla difficoltà riscontrata nel futuro grado 5. In questa prospettiva, possiamo supporre che i risultati delle prove INVALSI di seconda primaria possano essere predittivi rispetto ai risultati di quesiti appartenenti alla stessa catena di grado 5.

Il secondo esempio di catena di quesiti è quella dei quesiti D30 (fig. 3) di grado 5 e D2 (fig. 4) di grado 2. In entrambi i casi si tratta di situazioni moltiplicative.

Il quesito D30 presenta una situazione in cui una bambina ha a disposizione una certa quantità di soldi (20 euro) per comprare un prodotto di prezzo dato (giornalini a 2,20 euro). Si chiede di individuare la quantità massima di prodotto acquistabile.

Per determinare la risposta al quesito lo studente può attivare diverse strategie; per esempio:

– determinare il quoziente tra soldi posseduti e prezzo ($20:2=9,\overline{09}$) e considerare solo la parte intera (9 giornalini);
– determinare un multiplo del prezzo dei giornalini che arrotondi per difetto i soldi posseduti (2,20x9=19,80);
– sottrarre successivamente il prezzo dei giornalini ai soldi posseduti e contare quante volte è possibile (20-2,20=17,80; 17,80-2,20=15,60; … 2,40-2,20=0,20);
– sommare ripetutamente il prezzo dei giornalini fino ad arrotondare per difetto i soldi posseduti e contare il numero di addendi (2,20+2,20+2,20= 19,80).

In questo caso il quesito è a risposta aperta quindi non possiamo ipotizzare difficoltà in base alla risposta data poiché INVALSI restituisce solo la percentuale di studenti che hanno fornito risposte corrette (35,2%), errate (49,9%) e mancanti o non valide (14,9%).

A priori, però possiamo pensare a possibili difficoltà legate all'approssimazione. Per esempio, indipendentemente dalla strategia scelta, gli studenti potrebbero aver risposto 10 giornalini arrotondando per difetto il risultato ottenuto. Oppure, gli studenti che hanno risposto 10 potrebbero aver scelto

ISBN 9788835125235

di arrotondare il prezzo dei giornalini a 2 euro trascurando poi questo arrotondamento nel risultato finale. In aggiunta, il fatto che gli studenti fossero obbligati a operare con i numeri razionali potrebbe averli portati a commettere errori algoritmici nella gestione dei numeri decimali.

In questo caso il DP (fig. 7) non fornisce informazioni particolarmente rilevanti poiché l'andamento delle curve è segue l'andamento statistico auspicato.

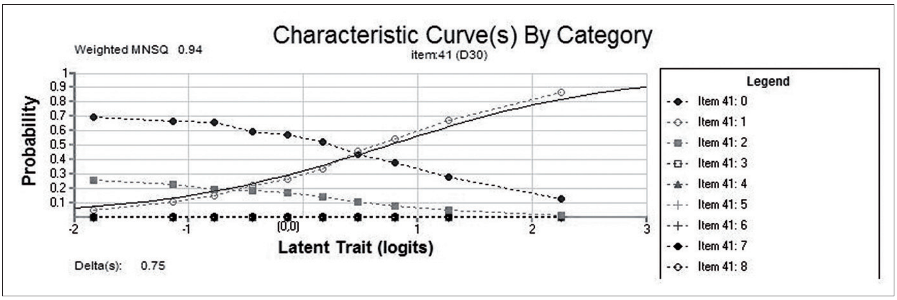


Fig. 7 – Curva caratteristica quesito D30 prova INVALSI di Matematica di grado 5 a.s. 2011/2012

Anche la domanda D2 fa riferimento a un problema moltiplicativo. Infatti, lo studente deve individuare il numero di scatole di matite necessarie a contenere un certo numero di matite dato (18) e conoscendo il numero di matite per ogni scatola (6).

Le strategie risolutive che potrebbero essere state adottate dagli studenti potrebbero essere:

– addizionare successivamente il numero di matite per scatola fino a ottenere il numero di matite totali e contare il numero di addendi (6+6+6=18);
– sottrarre ripetutamente il numero di matite per ogni scatola al numero totale di matite e contare quante volte si è sottratto (18-6-6-6=0);
– dividere il numero totale di matite per il numero di matite per scatola (18: 6=3);
– determinare il multiplo del numero di matite per scatola equivalente al numero di matite totali (6x3=18).

Questa volta il quesito è a risposta multipla quindi conosciamo le risposte degli studenti e a partire da queste possiamo ipotizzare le difficoltà che potrebbero aver incontrato. La risposta corretta era l'opzione B che ha raccolto il 52,9% di scelta.

L'opzione A (19,7% si scelte) potrebbe essere ricollegata a un errore algoritmico indipendentemente dalla strategia utilizzata oppure a un'errata approssimazione dei dati numerici. L'opzione C (23,5% di scelte), invece,

ISBN 9788835125235

potrebbe essere dovuto alla confusione tra il numero di matite per scatola (6) e il numero di scatole (3).

Il DP (fig. 8) ha un andamento decrescente per le opzioni errate e crescente per la corretta. C'è da notare che nonostante l'andamento decrescente, le due curve partono da valori inziali molto alti, ciò significa che gli studenti con basso livello di abilità nella prova hanno avuto altissima probabilità di scegliere un'opzione errata.

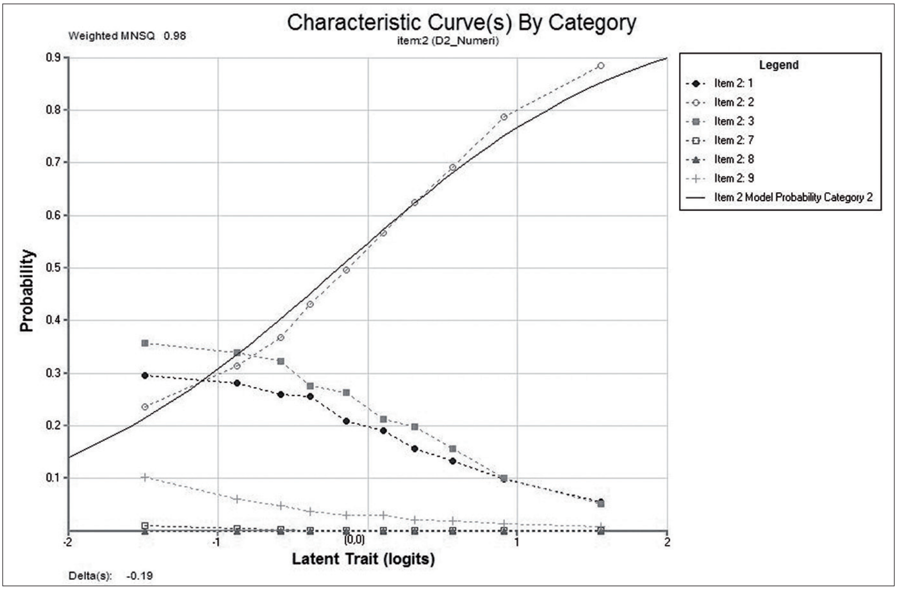


Fig. 8 – Curva caratteristica quesito D2 prova INVALSI di Matematica di grado 2 a.s. 2008/2009

Le difficoltà incontrate dagli studenti in questo quesito potrebbero essere predittive rispetto alle difficoltà che hanno successivamente incontrato nel quesito di grado 5. In effetti, entrambi i quesiti chiedevano di sviluppare le stesse strategie risolutive con l'unica differenza nell'insieme dei numeri da considerare: nel grado 2 interi, mentre nel grado 5 razionali.

4. La sperimentazione

La premessa metodologica per lo svolgimento del lavoro di ricerca in questione è stata l'omogeneità del campione riguardante: il numero di alunni coinvolti per ogni classe, il rapporto tra il numero di alunni e quello delle

ISBN 9788835125235

alunne, la loro età anagrafica e, soprattutto, il grado di competenza matematica posseduta.

Il campione di studenti coinvolto nella sperimentazione era costituito da due classi seconde della scuola primaria dell'istituto comprensivo "Colozza" di Campobasso. La classe seconda A è stata la classe sperimentale mentre la seconda B la classe di controllo. La classe sperimentale era formata da 22 studenti (10 maschi e 12 femmine), di cui 21 di 7 anni e una bambina di 6 anni, la classe di controllo era costituita anch'essa da 22 studenti (13 maschi e 9 femmine), tutti di 7 anni.

A entrambe le classi è stato inizialmente somministrato un pre-test composto dai sette quesiti selezionati presi direttamente dalla prova INVALSI di Matematica di seconda primaria dell'anno scolastico 2008/2009. Per arricchire la raccolta dei dati abbiamo scelto di lasciare tra un quesito e l'altro uno spazio bianco in cui gli studenti dovevano esplicitare una motivazione della risposta data. Gli studenti potevano scegliere liberamente il modo in cui farlo (per es. tramite passaggi matematici scritti, verbalizzazione dei procedimenti eseguiti, disegni, schemi o altro).

Per approfondire l'analisi delle risposte fornite al pre-test e validare le nostre ipotesi abbiamo dedicato la prima parte dell'intervento didattico a una discussione guidata sulle risposte fornite ai quesiti del pre-test con un'alta percentuale di risposte errate. Tale discussione è stata proposta a coppie di studenti ponendo a ciascuna diade alcune *domande-guida*:

1) Cosa chiede la domanda?
2) Qual è la risposta corretta?
3) Come hai fatto a rispondere?
4) Che difficoltà hai incontrato?
5) Se doveste riscrivere il testo del quesito in modo più semplice e di facile risoluzione come fareste?

Le coppie di studenti erano state individuate dall'insegnante in modo da permettere un lavoro cooperativo.

Successivamente è stato svolto un secondo intervento didattico ovvero un'attività laboratoriale, anch'essa in coppia, con lo scopo di risolvere nuovi quesiti di Matematica creati appositamente ed equivalenti[2] a quelli del pre-test.

Al termine della sperimentazione è stato somministrato a entrambe le classi campione un post-test, composto da nuovi quesiti, anch'essi creati di proposito ed equivalenti a quelli del pre-test, allo scopo di verificare se gli

[2] Con il temine *equivalenti* ci riferiamo a quesiti afferenti allo stesso ambito (numeri) e alla stessa dimensione (risolvere problemi). Si tratta di quesiti legati ai precedenti per: struttura testuale, contenuti matematici e risolubili attraverso analoghe strategie risolutive.

ISBN 9788835125235

interventi didattici avevano prodotto alcuni cambiamenti positivi nella classe sperimentale, rispetto a quella di controllo.

5. I risultati

A seguito della somministrazione del pre-test, svolto da entrambe le classi campione, ne sono stati raccolti, analizzati e messi a confronto i dati. Nei due grafici presentati in figura 9 sono riportate le percentuali di risposte corrette degli studenti delle due classi.

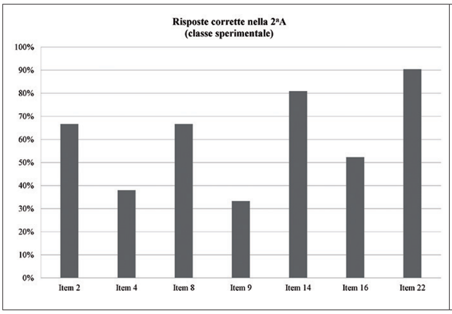


Fig. 9a – Risultati ottenuti nel pre-test dalla classe sperimentale

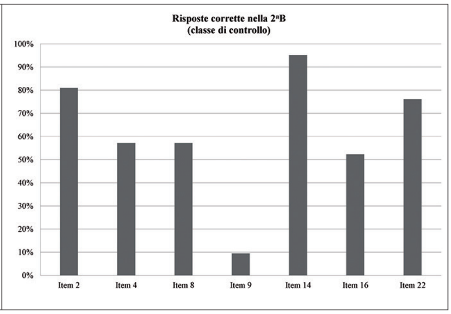


Fig. 9b – Risultati ottenuti nel pre-test dalla classe di controllo

Facendo un confronto tra le prestazioni al pre-test della classe sperimentale e quelle della classe di controllo i risultati sono pressoché simili (tranne per l'item n. 9), a conferma dell'omogeneità di partenza dei livelli di conoscenze e competenze matematiche dei due campioni.

Ciò che è stato possibile dedurre è che le performance degli studenti della classe sperimentale e quelli della classe di controllo sono mediamente positive e pressoché simili tra loro e ai risultati raccolti dal Servizio Nazionale di Valutazione.

Successivamente è stato svolto il primo intervento didattico ossia la discussione in aula sui singoli quesiti del pre-test con gli studenti della classe sperimentale, suddivisi in coppie, attraverso le domande-guida. Il lavoro di gruppo prima e la discussione condivisa con la classe poi, ha permesso di far emergere le difficoltà e quindi confermare e consolidare le ipotesi a priori che erano state formulate. È stato possibile dedurre infatti in quali punti della prova gli studenti hanno avuto maggiori difficoltà e dove invece la risoluzione dei quesiti si è dimostrata loro più semplice. In aggiunta, il lavoro di rielaborazione del testo dei quesiti (domanda 5) ha permesso di

ISBN 9788835125235

attivare una prima attività focalizzata sulla comprensione del testo dei problemi verbali.

Sulla base della discussione condotta è stato pensato e predisposto il secondo intervento didattico ossia l'attività laboratoriale, sempre in coppie. Anche in questo secondo intervento la scelta di lavorare in coppia e in gruppo è nata dal voler promuovere il confronto e lo scambio reciproco di idee su temi matematici di vario genere nella convinzione che, in particolare quando ci si approccia a discipline scientifiche, è proprio dal confronto che nascono nuove idee e visioni alternative. Durante tutta l'attività i bambini sono rimasti concentrati, intenti nella risoluzione dei quesiti e vi è stata una continua interazione tra di loro tipica di un laboratorio didattico. Durante lo svolgimento dei quesiti, in particolare tra uno e l'altro, veniva lasciato ai bambini il tempo necessario per la risoluzione e, prima di procedere alla successiva somministrazione, si aspettava che tutti avessero finito. Proprio per questo, in ogni pagina del fascicolo sono stati inseriti dei disegni in bianco e nero che coloro che avevano terminato potevano colorare, evitando così di annoiarsi o disturbare in attesa che gli altri concludessero il lavoro. Durante tutta la durata dell'attività, ci si è limitati a osservare la situazione didattica dando soltanto pochi e semplici orientamenti su come approcciarsi alla prova, senza però dare alcuna indicazione procedurale né di calcolo.

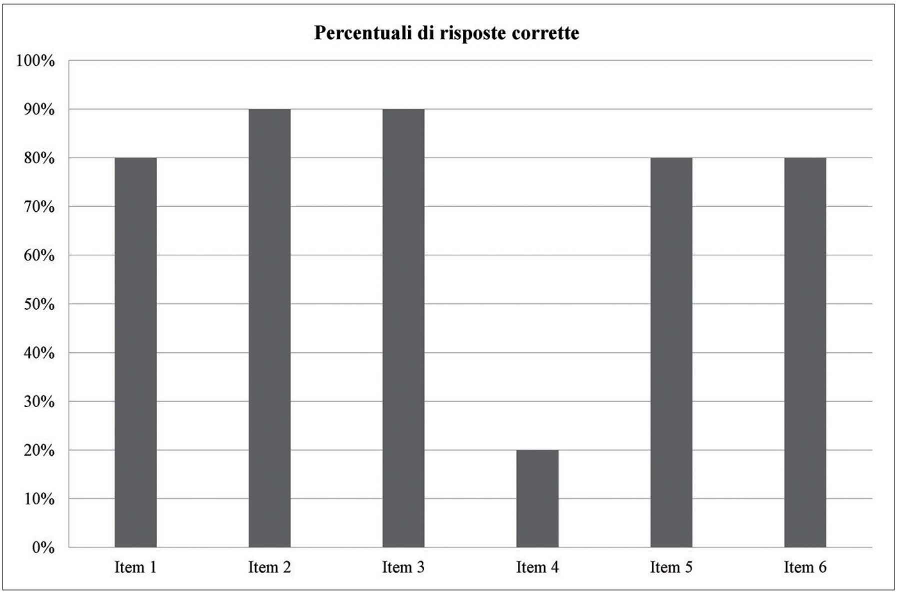


Fig. 10 – Percentuali di risposte corrette dei quesiti presentati nell'attività laboratoriale svolta dal campione sperimentale

ISBN 9788835125235

Il grafico presentato in figura 10 rappresenta i risultati dell'attività laboratoriale, i cui valori fanno riferimento alle percentuali di risposte corrette fornite. I quesiti sono presentati nell'ordine rispetto agli item del pre-test per cui sono equivalenti.

I risultati sono stati molto positivi, ad eccezione di un unico quesito che ha riscosso un basso numero di risposte corrette.

Infine, si è tornati a lavorare su entrambe le classi del campione somministrando il post-test i cui risultati hanno mostrato come le prestazioni degli studenti del campione sperimentale, a seguito dei due interventi didattici, sono migliorate rispetto a quelle del pre-test (fig. 11).

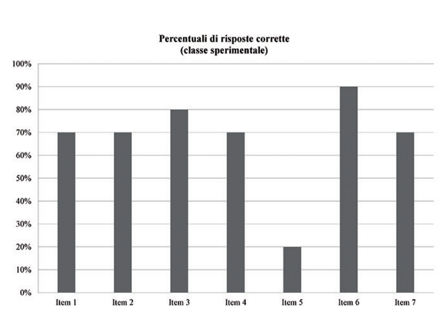


Fig. 11a – Risultati ottenuti nel post-test dalla classe sperimentale

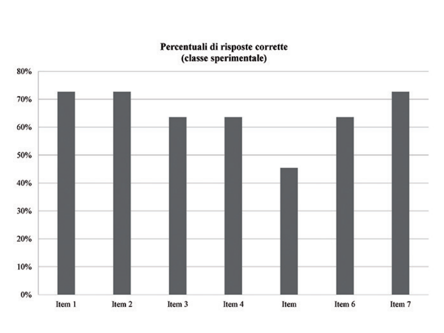


Fig. 11b – Risultati ottenuti nel post-test dalla classe di controllo

I dati mostrano come vi sia stato un generale miglioramento delle performance dei bambini del campione sperimentale, in particolare per i quesiti n. 4, n. 8 e n. 9 del pre-test equivalenti ai quesiti n. 2, n. 3 e n. 4 del post-test. Osservando i risultati relativi agli item n. 2 e n. 14 del pre-test possiamo affermare che vi è stato un miglioramento, anche se lieve. Interessante è soffermarsi sulle percentuali relative ai quesiti n. 16 e n. 22 del pre-test in quanto, diversamente dai risultati dei precedenti quesiti della medesima prova, mostrano un calo delle prestazioni. Nel quesito n. 16, equivalente al n. 7 del post-test, si può pensare che alcuni bambini possano aver riscontrato difficoltà nel calcolo o nell'individuazione della corretta operazione da svolgere. Soffermandosi invece ad analizzare i dati relativi al quesito n. 16 del pre-test, equivalente al n. 5 del post-test, possiamo rilevare un calo nelle prestazioni.

Per quanto riguarda la classe di controllo, rispetto al pre-test, gli studenti hanno comunque mostrato un miglioramento, seppur live, delle *performance*, pur in assenza di interventi didattici mirati: si può pensare infatti che ciò sia stato dovuto al consolidamento di alcune conoscenze e competenze

ISBN 9788835125235

disciplinari da parte dei bambini a seguito delle ordinarie lezioni di Matematica fatte dalla loro maestra nell'intervallo di tempo intercorrente tra le due somministrazioni.

In ultima analisi, riteniamo interessante discutere il caso del quesito n. 5 del post-test. Analizzando il quesito è stato notato, a una rilettura più attenta, che sia nel testo che nella domanda erano stati utilizzati, in un modo forse semanticamente fraintendibile, i termini "librerie" e "libreria" per cui i bambini avevano probabilmente inteso per librerie i quattro scaffali contenenti i libri, e per libreria il singolo scaffale e non l'insieme dei quattro. Questo fraintendimento ha portato gli studenti a scegliere delle strategie risolutive errate al contrario degli studenti della classe di controllo. Questo risultato è in realtà molto positivo poiché gli studenti della classe sperimentale hanno mostrato di possedere un'accurata capacità di lettura del testo del problema verbale. Al contrario, gli studenti della classe di controllo hanno mostrato un comportamento stereotipato nell'approccio al problema non preoccupandosi delle ambiguità linguistiche del testo.

6. Conclusioni

Il motivo conduttore dell'intero lavoro è l'analisi verticale delle catene di quesiti delle prove INVALSI di Matematica della dimensione *risolvere problemi.* Le catene di quesiti sono un insieme di domande appartenenti a prove INVALSI di Matematica di anni differenti e diversi gradi scolastici tutti relativi a un certo contenuto matematico e riferite a una stessa dimensione. Le catene di quesiti analizzate in questo elaborato sono relative a problemi verbali risolubili attraverso una modellizzazione aritmetica. Tale analisi è risultata utile per porre in evidenza le difficoltà che i bambini hanno incontrato e prevedere probabili esiti negativi futuri. Il potere predittivo delle catene di quesiti permette così di ipotizzare eventuali suggerimenti didattici per intervenire sin da subito ed evitare che le difficoltà osservate in un certo grado scolastico si propaghino o addirittura aumentino nei gradi scolastici successivi. Nel nostro caso specifico, sono state comparate a ritroso la prova INVALSI di quinta primaria dell'a.s. 2011/2012 con quella di seconda primaria dell'a.s. 2008/2009, somministrate alla stessa coorte di studenti. La comparazione ha permesso di far notare che alcune difficolta riscontrate nel grado V, già emergono in alcuni quesiti di grado II.

Sulla base di tali evidenze è stato impostato l'intero lavoro sperimentale che ha coinvolto due classi seconde della scuola primaria "Colozza" di Campobasso. A entrambe le classi è stato inizialmente somministrato un

ISBN 9788835125235

pre-test, costruito con alcuni quesiti presi direttamente dalla prova INVALSI di seconda, per valutare le competenze e conoscenze di partenza. In seguito, ci si è concentrati solo sul campione sperimentale, facendo una discussione guidata con gli studenti sugli esiti della prova per indagare se le difficoltà riscontrate fossero in effetti concordi con le ipotesi sperimentali di partenza. Successivamente è stata svolta un'attività laboratoriale in coppia per risolvere nuovi quesiti di Matematica equivalenti a quelli del pre-test. Al termine della sperimentazione è stato somministrato a entrambe le classi campione un post-test, con nuovi quesiti equivalenti a quelli dell'attività laboratoriale, allo scopo di verificare se gli interventi didattici avevano prodotto alcuni cambiamenti positivi nella classe sperimentale, rispetto a quella di controllo.

A conferma dell'ipotesi di partenza, vi è stato un discreto miglioramento nel campione sperimentale a seguito probabilmente degli interventi didattici fatti nel periodo intercorso tra la somministrazione del pre-test e del post-test. Tale miglioramento non è stato rilevato se non in forma lieve nelle performance degli studenti del campione di controllo che non avevano fatto alcun tipo di intervento didattico integrativo. Ipotizziamo che il piccolo miglioramento sia dovuto all'ordinaria attività didattica svolta nel periodo intercorrente tra le due somministrazioni. In generale, riflettendo sulle difficoltà che gli studenti hanno mostrato e di cui si è parlato in vari momenti, si può ipotizzare che esse siano state dovute soprattutto alla mancata o errata interpretazione del testo del problema, con conseguente compromissione dell'intero processo di risoluzione.

La sperimentazione e in particolare la discussione ha in effetti messo in risalto la coerenza tra le ipotesi costruite a priori e gli effettivi ostacoli che gli studenti hanno incontrato nella prova. Questo aspetto ha avvalorato l'ipotesi di partenza per cui le difficoltà incontrate dagli studenti nel grado V potessero essere ricondotte a difficoltà precedentemente emerse nel grado 2. Il fatto che il percorso sperimentale abbai avuto un effetto positivo sugli studenti della classe seconda, ci permette di ipotizzare che una precoce individuazione delle difficoltà e un intervento mirato potrebbero aiutare a superare futuri ostacoli nella comprensione del testo dei problemi verbali. Tale ipotesi andrebbe consolidata proponendo una successiva sperimentazione alla stessa coorte di studenti quando frequenterà la classe quinta primaria.

Nonostante questo studio parta da una base prettamente quantitativa, le interviste e il successivo intervento didattico hanno una prospettiva qualitativa e quindi coinvolgono una coorte molto ristretta di studenti. Per ovviare a questo limite di ricerca, si può pensare di svolgere più sperimentazioni analoghe su un campione numericamente significativo per convalidare o meno quanto emerso in questa sede.

ISBN 9788835125235

Una possibile prospettiva futuro per questo studio potrebbe essere quella di estendere una simile ricerca anche alle altre dimensioni previste nelle prove INVALSI di Matematica, come "Conoscere" o "Argomentare" per osservare se anche in questi nuovi contesti le prove di grado 2 possono essere uno strumento per evidenziare delle difficoltà precocemente e intervenire di conseguenza. In altro modo, si potrebbe procedere considerando la stessa catena di quesiti estendendola a più gradi scolastici, organizzando, anche in questo caso, interventi didattici mirati. Questo punto di vista ci appare particolarmente interessante soprattutto nell'ottica di verificare se certe difficoltà continuano a mantenersi, si evolvono o si superano nel tempo.

Riferimenti bibliografici

Ball D., Bass H. (2003), "Making mathematics reasonable in school", in J. Kilpatrick, W. G. Martin, D. Schifter, *A research companion to Principles and standards for mathematics*, NCTM, Reston, pp. 27-44.

Bolondi G., Branchetti L., Ferretti F., Lemmo A., Maffia A., Martignone F., Santi G. (2016), "Un approccio longitudinale per l'analisi delle prove INVALSI di matematica: cosa ci può dire sugli studenti in difficoltà?", in P. Falzetti, *Concorso di idee per la ricerca*, FrancoAngeli, Milano, pp. 81-102.

D'Amore B. (2000), "Lingua, matematica e didattica", *La matematica e la sua didattica*, 1, pp. 28-47.

Daroczy G., Wolska M., Meurers W.D., Nuerk H. C. (2015), "Word problems: A review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty", *Frontiers in Psychology*, 6, p. 348.

De Corte E., Verschaffel L. (1985), "Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems", *The Journal of Mathematical Behavior*, 4, pp. 3-21.

Duval R. (1991), "Interaction des différents niveaux de représentation dans la compréhension de textes", *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 1, pp. 136-193.

English L.D., Watters J.J. (2004), "Mathematical Modeling in the Early School Years", *Mathematics Education Research Journal*, 16, 3, pp. 59-80.

Gerofsky S. (1996), "A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education", *For the Learning of Mathematics*, 16, 2, pp. 36-45.

Jupri A., Drijvers P.H.M. (2016), "Student difficulties in mathematizing word problems in algebra", *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 12, 9, pp. 2481-2502.

Kilpatrick J., Swafford J., Findell B. (2001), *Adding it up: helping children learn mathematics*, National Academy Press, Washington.

Kintsch W., Greeno J.G. (1985), "Understanding and solving word arithmetic problems", *Psychological Review*, 92, 1, p. 109.

ISBN 9788835125235

Mayer R. (1982), "The psychology of mathematical problem solving", in F.L. Lester, J. Garofalo (*eds.*), *Mathematical problem solving. Issues in research*, The Franklin Institute Press, Philadelphia, pp. 1-13.

MIUR (2012), *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*, testo disponibile al sito: http://www.indicazioninazionali.it/2018/08/26/indicazioni-2012/, data di consultazione 3/2/2021.

Nesher P. (1982), "Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems", in T.P. Carpenter, J.M. Moser, T.A. Romberg, *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah (NJ), pp. 25-38.

Rasch G. (1960), *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*, Danish Institute for Educational Research, Copenhagen.

Schoenfeld A.H. (1985), *Mathematical problem solving*, Academic Press, New York.

Verschaffel L., Greer B., De Corte E. (2000), *Making sense of word problems*, Swets & Zeitlinger, Lisse (NL).

Vilenius-Tuohimaa P.M., Aunola K., Nurmi J. (2008), "The association between mathematical word problems and reading comprehension", *Educational Psychology*, 28, 4, pp. 409-426.

Wijaya A., Van den Heuvel-Panhuizen M., Doorman M., Robitzsch A. (2014), "Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors", *The Mathematics Enthusiast*, 11, 3, pp. 555-584.

Zan R. (2016), *I problemi di matematica: difficoltà di comprensione e formulazione del testo*, Carrocci, Roma.

ISBN 9788835125235

Gli autori

Maria Francesca Ambrogio è docente di ruolo nella scuola primaria dell'IC Santena (Torino) dal 2017 con una cattedra in Matematica e Scienze. Si è fatta promotrice e ha realizzato numerosi progetti nelle materie STEM.

Fabio Brunelli, laureato in Matematica, ha insegnato Matematica e Scienze in una scuola secondaria di primo grado. Ha collaborato con INDIRE come autore di materiali, come esperto nel progetto MPI – INVALSI. Nel luglio 2016 ha partecipato alla Scuola autori INVALSI. Tiene corsi di formazione in istituti comprensivi.

Roberto Capone è laureato in Ingegneria Chimica, Matematica e Psicologia, PhD in Matematica, Fisica e applicazioni. Attualmente è docente di Matematica presso il Convitto Nazionale di Avellino e docente di Matematica II presso l'Università di Salerno. La sua ricerca è focalizzata su tre principali filoni: la formazione docenti, l'interdisciplinarità, la didattica per competenze.

Francesca Ferrara è professoressa associata in didattica della Matematica presso il Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università degli Studi di Torino. Si occupa di progetti di ricerca didattica, di formazione docenti e di terza missione, è autrice di numerosi capitoli di libro e articoli su riviste nazionali e internazionali. È membro del Comitato Scientifico della Società Europea di Ricerca in didattica della Matematica.

Federica Filiberti è un'insegnante della scuola dell'infanzia, laureata con lode in Scienze della formazione primaria con una tesi dal titolo "Registri semiotici e prove INVALSI: Analisi in verticale di catene di quesiti", specializzanda del Corso per le attività di sostegno, indirizzo scuola primaria.

ISBN 9788835125235

Marina Gilardi è docente di scuola primaria. Ha partecipato ai seminari per la stesura di Matematica 2001, a cura del MIUR e della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica. Formatrice AVIMES Piemonte su valutazione e miglioramento, collabora con INVALSI per la valutazione degli apprendimenti.

Alice Lemmo, PhD, è ricercatrice in didattica della Matematica presso l'Università dell'Aquila. I suoi principali interessi di ricerca riguardano la valutazione computerizzata e le implicazioni che la scelta dell'ambiente di somministrazione ha sulla valutazione in Matematica.

Laura Montagnoli, laureata in Matematica e dottore di ricerca in Formazione della persona, è docente a contratto di Matematica elementare e Geometria elementare presso l'Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano. È insegnante di Matematica e Scienze nella scuola secondaria di primo grado e formatrice.

Chiara Pedini, laureata in Scienze della formazione primaria all'Università Cattolica del Sacro Cuore di Milano e insegnante della scuola primaria.

Chiara Saletti, laureata in Materie Letterarie nel 1995, è docente di scuola primaria presso l'Istituto Comprensivo "Masaccio" di Firenze e autrice di testi scolastici. Inserita nell'elenco ordinario INVALSI degli Esperti SNV e Valu.E., si occupa di valutazione a livello provinciale e regionale, con formazione acquisita presso l'INVALSI e il Politecnico di Milano.

Ketty Savioli è docente di scuola primaria con una laurea in Matematica presso l'Università di Torino. Referente di progetti su didattica e valutazione, collabora con INVALSI e TIMSS per la misurazione degli apprendimenti. È membro della Commissione italiana per l'Insegnamento della Matematica.

Ida Spagnuolo, docente di Matematica e Fisica in quiescenza. Dal 1999 si occupa di formazione dei docenti in vari contesti: SSIS, TFA, M@t.abel, PON – per i risultati PISA/INVALSI. Ha collaborato alle attività dei Piani Lauree Scientifiche, partecipa alla "Scuola autori" INVALSI, è valutatore nei NEV.

Valentina Vaccaro è dottoranda in Matematica presso l'Università di Oviedo e dal 2018 è collaboratore tecnico di ricerca presso INVALSI. Svolge attività di ricerca e formazione in didattica della Matematica. I suoi interessi di ricerca riguardano l'uso delle nuove tecnologie e dei giochi nell'insegnamento/apprendimento della Matematica.

ISBN 9788835125235

ISBN 9788835125235

ISBN 9788835125235

La scuola primaria ha come obiettivo quello di fornire ai bambini capacità di scrittura, lettura e delle solide basi in Matematica che permetteranno loro di affrontare nuove discipline. Consapevoli dell'importanza degli insegnamenti del primo ciclo di istruzione, si è pensato di raccogliere in questo volume alcuni studi presentati in occasione della quarta edizione del Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca e la didattica", tenutosi a Roma nel novembre del 2019. L'obiettivo che accomuna tali studi è quello di fornire degli strumenti per migliorare la didattica della Matematica nella scuola primaria. Attraverso i dati che l'Istituto mette a disposizione i ricercatori e i docenti hanno potuto indagare le caratteristiche del sistema scolastico e proporre interventi di sostegno e potenziamento.

Patrizia Falzetti è Responsabile del Servizio Statistico dell'INVALSI, che gestisce l'acquisizione, l'analisi e la restituzione dei dati riguardanti le rilevazioni nazionali e internazionali sugli apprendimenti alle singole istituzioni scolastiche, agli *stakeholders* e alla comunità scientifica.

FrancoAngeli
La passione per le conoscenze