

# I DATI INVALSI PER INDAGARE E MIGLIORARE L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

III Seminario "I dati INVALSI:  
uno strumento per la ricerca"

a cura di  
Patrizia Falzetti

**FrancoAngeli**  
OPEN  ACCESS

  
2014-2020

  
INVALSI

INVALSI PER LA RICERCA  
STUDI E RICERCHE



## INVALSI PER LA RICERCA

La collana Open Access INVALSI PER LA RICERCA si pone come obiettivo la diffusione degli esiti delle attività di ricerca promosse dall'Istituto, favorendo lo scambio di esperienze e conoscenze con il mondo accademico e scolastico.

La collana è articolata in tre sezioni: "Studi e ricerche", i cui contributi sono sottoposti a revisione in doppio cieco, "Percorsi e strumenti", di taglio più divulgativo o di approfondimento, sottoposta a singolo referaggio, e "Rapporti di ricerca e sperimentazioni", le cui pubblicazioni riguardano le attività di ricerca e sperimentazione dell'Istituto e non sono sottoposte a revisione.

**Direzione:** Roberto Ricci

### **Comitato scientifico:**

- Tommaso Agasisti (Politecnico di Milano);
- Cinzia Angelini (Università Roma Tre);
- Giorgio Asquini (Sapienza Università di Roma);
- Carlo Barone (Istituto di Studi politici di Parigi);
- Maria Giuseppina Bartolini (Università di Modena e Reggio Emilia);
- Giorgio Bolondi (Libera Università di Bolzano);
- Francesca Borgonovi (OCSE•PISA, Parigi);
- Roberta Cardarelli (Università di Modena e Reggio Emilia);
- Lerida Cisotto (Università di Padova);
- Patrizia Falzetti (INVALSI);
- Michela Freddano (INVALSI);
- Martina Irsara (Libera Università di Bolzano);
- Paolo Landri (CNR);
- Bruno Losito (Università Roma Tre);
- Annamaria Lusardi (George Washington University School of Business, USA);
- Stefania Mignani (Università di Bologna);
- Marcella Milana (Università di Verona);
- Paola Monari (Università di Bologna);
- Maria Gabriella Ottaviani (Sapienza Università di Roma);
- Laura Palmerio (INVALSI);
- Mauro Palumbo (Università di Genova);
- Emmanuele Pavolini (Università di Macerata);
- Donatella Poliandri (INVALSI);
- Roberto Ricci (INVALSI);
- Arduino Salatin (Istituto Universitario Salesiano di Venezia);
- Jaap Scheerens (Università di Twente, Paesi Bassi);
- Paolo Sestito (Banca d'Italia);
- Nicoletta Stame (Sapienza Università di Roma);
- Roberto Trincherò (Università di Torino);
- Matteo Viale (Università di Bologna);
- Assunta Viteritti (Sapienza Università di Roma);
- Alberto Zuliani (Sapienza Università di Roma).

### **Comitato editoriale:**

Andrea Biggera; Ughetta Favazzi; Simona Incerto; Francesca Leggi; Rita Marzoli (coordinatrice); Enrico Nerli Ballati; Veronica Riccardi.



Il presente volume è pubblicato in open access, ossia il file dell'intero lavoro è liberamente scaricabile dalla piattaforma **FrancoAngeli Open Access** (<http://bit.ly/francoangeli-oa>).

**FrancoAngeli Open Access** è la piattaforma per pubblicare articoli e monografie, rispettando gli standard etici e qualitativi e la messa a disposizione dei contenuti ad accesso aperto. Oltre a garantire il deposito nei maggiori archivi e repository internazionali OA, la sua integrazione con tutto il ricco catalogo di riviste e collane FrancoAngeli massimizza la visibilità, favorisce facilità di ricerca per l'utente e possibilità di impatto per l'autore.

Per saperne di più:

[http://www.francoangeli.it/come\\_pubblicare/pubblicare\\_19.asp](http://www.francoangeli.it/come_pubblicare/pubblicare_19.asp)

I lettori che desiderano informarsi sui libri e le riviste da noi pubblicati possono consultare il nostro sito Internet: [www.francoangeli.it](http://www.francoangeli.it) e iscriversi nella home page al servizio "Informatemi" per ricevere via e-mail le segnalazioni delle novità.

# I DATI INVALSI PER INDAGARE E MIGLIORARE L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

III Seminario "I dati INVALSI:  
uno strumento per la ricerca"

a cura di  
Patrizia Falzetti



**FrancoAngeli**  
OPEN  ACCESS

Le opinioni espresse nei lavori sono riconducibili esclusivamente agli autori e non impegnano in alcun modo l'Istituto. Nel citare i contributi contenuti nel volume non è, pertanto, corretto attribuirne le argomentazioni all'INVALSI o ai suoi vertici.

*Grafica di copertina: Alessandro Petrini*

Copyright © 2021 by FrancoAngeli s.r.l., Milano, Italy & INVALSI – Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione.

L'opera, comprese tutte le sue parti, è tutelata dalla legge sul diritto d'autore ed è pubblicata in versione digitale con licenza Creative Commons Attribuzione-Non Commerciale-Non opere derivate 4.0 Internazionale (CC-BY-NC-ND 4.0)

*L'Utente nel momento in cui effettua il download dell'opera accetta tutte le condizioni della licenza d'uso dell'opera previste e comunicate sul sito*  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.it>

ISBN 9788835131045

# Indice

Introduzione di <i>Patrizia Falzetti</i>	pag. 7
1. Dalle formule ai modelli. Un percorso interattivo con le domande INVALSI di <i>Alice Barana, Marina Marchisio</i>	» 9
2. Mettere in formula di <i>Giorgio Bolondi, Stefania Pozio</i>	» 27
3. Sviluppare competenze sul senso del grafico di <i>Francesca Ferrara, Giulia Ferrari, Ketty Savioli</i>	» 44
4. L'uso dei dati INVALSI nell'insegnamento della statistica bivariata di <i>Enrico Pietropoli, Patrizia Sommi</i>	» 63
5. Orientamento attraverso <i>peer education</i> a partire da item INVALSI con il supporto di GeoGebra di <i>Claudia Testa, Ada Sargenti, Stefania Comerci</i>	» 79
6. I dati INVALSI: studio longitudinale delle abilità numeriche dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria di <i>Annamaria Romano, Giovanni Pucciarini</i>	» 90
7. Maiali, cani e galline. Riflessioni sulla prova INVALSI di Matematica per la classe quinta primaria del maggio 2018 di <i>Chiara Saletti, Fabio Brunelli</i>	» 104
8. La Matematica nell'esame di Stato di fine primo ciclo e nella prova INVALSI 2018 di <i>Ottavio Giulio Rizzo, Paola Gario, Laura Branchetti</i>	» 129

9. L'analisi di quesiti INVALSI su aree e perimetri in verticale e in continuità tra I e II ciclo di <i>Ivan Graziani, Stefano Babini</i>	pag. 142
10. Formulazione degli item matematici e strategie di soluzione: alcuni esempi da uno studio empirico condotto al grado 8 di <i>Giorgio Bolondi, Clelia Cascella, Chiara Giberti</i>	» 167
11. Gli errori degli studenti in Matematica: un'analisi delle risposte alle prove INVALSI di grado 10 di <i>Federica Ferretti, Alessandro Gambini, Sabrina Tiralongo</i>	» 188
Gli autori	» 209

# *Introduzione*

di Patrizia Falzetti

La competenza matematica, intesa come la «capacità di sviluppare e mettere in atto il pensiero matematico per trovare le soluzioni a vari problemi in situazioni quotidiane» (MIUR, 2012), è considerata come una delle abilità chiave per la realizzazione personale, la cittadinanza attiva, l'inclusione sociale e l'educazione permanente, sia in ambito nazionale che internazionale. Data la sua rilevanza nel processo di formazione di ogni individuo, il processo di insegnamento/apprendimento della Matematica è da sempre al centro di studi, ricerche e sperimentazioni volte non solo a evidenziare le buone pratiche messe in atto nelle scuole, ma anche a individuare eventuali criticità e possibili percorsi di miglioramento.

Il presente volume è incentrato proprio su questo ambito di studi e, nel raccogliere alcune ricerche di approfondimento presentate alla III edizione del Seminario “I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca” (Bari 26-28 ottobre 2018), intende mostrare come i dati prodotti dall'Istituto possano fornire un potente strumento per interrogarsi sui processi di apprendimento della Matematica e per migliorare l'attività didattica in classe, facendo anche emergere la produttività della collaborazione fra ricercatori e insegnanti.

I primi quattro capitoli del volume affrontano tematiche specifiche dell'apprendimento della Matematica: la creazione e interpretazione di modelli lineari, a partire da contesti reali (cap. 1), la capacità di scrittura di formule matematiche (cap. 2), lo sviluppo di competenze per il senso del grafico (cap. 3), la statistica bivariata (cap. 4). Altri capitoli illustrano come i dati INVALSI possano essere, per i docenti, delle occasioni per esplicitare, analizzare e condividere ostacoli, errori e misconcezioni degli studenti (capp. 5, 9 e 11) e per predisporre nuovi materiali di lavoro (cap. 7). Trovano spazio anche ricerche sull'impatto di una variazione nella formulazione di un quesito di Matematica sulle risposte degli studenti, non solo per quanto riguarda la dif-



ficoltà percepita, ma anche per le strategie di soluzione messe in atto (cap. 10), e ricerche che utilizzano un approccio longitudinale per confrontare gli esiti della prova di Matematica e trarre utili indicazioni per la progettazione didattica (cap. 6). Il cap. 8, infine, pone l'attenzione sul possibile impatto delle nuove modalità di somministrazione delle prove INVALSI (CBT) sulla didattica in aula nel primo ciclo e sull'esame di Stato.

Tutti i lavori raccolti nel volume mostrano come i dati INVALSI possano proficuamente essere utilizzati per condurre ricerche sull'apprendimento della Matematica e per attivare alcuni percorsi di miglioramento didattico. L'auspicio è, dunque, che il volume possa suggerire nuove piste di ricerca e sperimentazione a tutti coloro che sono interessati a studiare il rapporto tra dati e didattica della Matematica.

# *1. Dalle formule ai modelli.*

## *Un percorso interattivo con le domande INVALSI*

di Alice Barana, Marina Marchisio

Costruire e comprendere modelli matematici è una delle competenze fondamentali del profilo di uno studente al termine dell'istruzione secondaria; si tratta di una competenza importante per la comprensione di fenomeni reali e per l'inserimento in un mondo del lavoro dominato dalla quarta rivoluzione industriale. I dati INVALSI dimostrano quanto la costruzione e l'interpretazione di modelli matematici sia considerata "difficile" nella scuola secondaria di secondo grado; spesso le difficoltà hanno radici nella scuola secondaria di primo grado, con i primi approcci degli studenti al calcolo simbolico e alle formule matematiche.

Questo contributo presenta i risultati di una ricerca condotta nell'anno scolastico 2017/2018 a Torino, realizzata dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino nell'ambito del progetto "Città Educante", in collaborazione con il CNR. La ricerca ha coinvolto 24 classi terze di sei scuole secondarie di primo grado per un totale di 547 studenti. Utilizzando materiali interattivi in un ambiente di apprendimento virtuale e strumenti di valutazione automatica formativa e adattiva, è stato realizzato un percorso didattico sulla creazione e l'interpretazione di modelli lineari e non solo, a partire da contesti reali. I materiali didattici sono stati costruiti a partire da domande tratte dalle prove INVALSI degli anni passati, ampliate e sviluppate attraverso strumenti digitali. Il percorso è stato proposto a 13 classi, mentre le altre 11 hanno formato il gruppo di controllo per il confronto dei risultati.

Al fine di monitorare l'apprendimento sono state somministrate a tutte le 24 classi all'inizio e al termine della sperimentazione prove di verifica costruite con domande tratte dalle prove INVALSI relative ai temi trattati. Sulla base dei risultati delle verifiche e delle osservazioni delle attività svolte dagli studenti in classe e in piattaforma, e alla luce delle più recenti teorie didattiche che coinvolgono i processi di modellizzazione, si discutono le po-

tenzialità dei materiali digitali interattivi proposti e il loro valore aggiunto per lo sviluppo di competenze matematiche.

*Building and understanding mathematical models is one of the key competences of the profile of students at the end of secondary education; it is an important competence for the comprehension of real phenomena and for the integration in a world of work dominated by the fourth industrial revolution. INVALSI data show how building and understanding mathematical models is considered “difficult” in upper secondary school; often the difficulties find their roots in lower secondary school, with students' first approaches to symbolic calculus and mathematical formulae.*

*This contribute presents the results of a research conducted in the scholastic year 2017/2018 in Turin, realized by the Department of Mathematics of the University of Turin in within the project “Città Educante”, in collaboration with the National Research Council. The study involved 24 classes of the third year of six lower secondary schools (8th grade), for a total amount of 547 students. Using interactive materials in a virtual learning environment and tools for the automatic adaptive formative assessment, a didactic path on the creation and the interpretation of linear and nonlinear models from real contexts has been realized. The didactic materials have been built from INVALSI questions delivered in the past years, expanded and developed through digital tools. The interactive path has been proposed to 13 classes while the remaining 11 formed the control group for the comparison of the results.*

*In order to monitor the learning, at the beginning and at the end of the experimentation two assessment tests, constituted of INVALSI questions dealing with the themes object of the path, have been delivered to all the 24 classes. The potentialities of the interactive digital materials proposed and their added value for the development of mathematical competence are discussed on the basis of the results of the assessment tests and of the observations of the classroom and platform activities, and in light of the most recent didactic theories involving modelling processes.*

## **1. Introduzione**

Il recente aggiornamento del quadro europeo delle competenze chiave per l'apprendimento permanente (Commissione Europea, 2018) ribadisce l'importanza dell'acquisizione di una solida competenza matematica di base, che consiste nella «capacità di sviluppare e applicare il pensiero e la comprensione matematici per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiana-

ne». In particolare la competenza matematica comporta la «capacità di usare modelli matematici di pensiero e di presentazione», come formule, modelli, costrutti, grafici, diagrammi oltre alla disponibilità a farlo. Si pone l'accento «sugli aspetti del processo e dell'attività, oltre che sulla conoscenza», promuovendo le azioni didattiche di tipo induttivo, sperimentale e laboratoriale che concorrono allo sviluppo della competenza.

La capacità di comprendere e utilizzare i modelli matematici dovrebbe quindi essere posseduta da tutti i cittadini europei per mantenere un ruolo attivo nella società in rapido mutamento. Effettivamente capacità logico-matematiche costituiscono un requisito vincolante per l'accesso a numerose professioni e vengono verificate attraverso test e colloqui di selezione per l'accesso a percorsi di studio, formazione, specializzazione o inserimento professionale. Una laurea in discipline STEM (Scienze, Tecnologia, Ingegneria e Matematica) offre buone opportunità di assunzione in moltissimi settori, e il tasso di assunzione di laureati nelle discipline STEM è in continuo aumento, nonostante la crisi che ha colpito l'economia globale negli ultimi 10 anni. Inoltre la capacità di analizzare dal punto di vista quantitativo dati e situazioni migliora la percezione della realtà e offre strumenti per agire in essa, sia in ambito professionale sia nella quotidianità (OECD, 2016).

Le Rilevazioni degli apprendimenti nazionali e internazionali collocano la capacità di lavorare con i modelli matematici ai livelli più elevati della scala delle competenze. Per esempio, la descrizione analitica dei livelli INVALSI per il secondo anno della scuola secondaria di secondo grado, elaborata nel 2018 in seguito alla rilevazione computer-based, colloca a un livello 4 su 5 lo studente in grado di costruire un modello matematico con cui operare, mentre uno studente a livello 3 su 5 si ferma al riconoscimento di diverse forme di rappresentazione di uno stesso oggetto matematico. Solo gli studenti che raggiungono il quinto e ultimo livello di competenza dimostrano capacità di costruirsi un modello adeguato per risolvere problemi in situazioni non ordinarie e interpretare le informazioni: cioè significa che la percentuale degli studenti in grado di raggiungere questi obiettivi è piuttosto bassa (INVALSI, 2018). La descrizione qualitativa dei livelli di apprendimento INVALSI per la Matematica è coerente con quella sviluppata in seguito alle rilevazioni OCSE PISA del 2015, la quale colloca a livello 5 nella scala di 6 livelli di competenza uno studente quindicenne capace di lavorare con modelli in situazioni complesse, mentre gli studenti che si collocano a un livello 4 su 6 sono tipicamente in grado di lavorare solo con un modello esplicito e confrontare diverse forme di rappresentazione (OECD, 2017).

Questo contributo presenta la progettazione e sperimentazione di un percorso didattico interattivo finalizzato alla comprensione e costruzione di mo-

delli matematici per l'ultimo anno della scuola secondaria di primo grado, momento in cui si acquisiscono le competenze utili a lavorare con diverse forme di rappresentazione dei modelli matematici. Il percorso è stato sviluppato in una piattaforma online dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino all'interno di una sperimentazione nell'ambito del progetto "Città Educante", in collaborazione con il CNR e con il supporto di Rossella Garuti, esperto INVALSI (Barana *et al.*, 2018). Sono discussi le peculiarità del percorso in un quadro teorico di riferimento e alcuni risultati ottenuti con la sperimentazione del percorso che ha coinvolto un totale di 547 studenti.

## 2. Quadro teorico di riferimento

### 2.1. Modellizzazione

Con il termine *modellizzazione* in Matematica si intende la descrizione di una situazione reale in termini matematici e viceversa, che viene utilizzata per risolvere problemi in campo reale (Kaiser, 2014). Come evidenziato dalle recenti Rilevazioni nazionali e internazionali sull'apprendimento, si tratta di uno dei processi più complessi nell'apprendimento della Matematica, che causa non poche difficoltà agli studenti. Questo è dovuto a molteplici fattori, analizzati nella vasta letteratura del campo: primo tra tutti sicuramente l'impatto cognitivo che la modellizzazione richiede, vista la stretta connessione con altre competenze di tipo matematico necessarie per portare a termine il processo, come la capacità di leggere e comunicare nel linguaggio matematico, operare nella Matematica, interpretare i risultati (Blum e Ferri, 2009). Competenze metacognitive sono inoltre necessarie per controllare il processo di modellizzazione, individuare strumenti e risultati (Greefrath e Vorhölter, 2016). La modellizzazione non può prescindere dalla conoscenza delle diverse forme di rappresentazione degli oggetti matematici, necessarie per poter esprimere correttamente un modello e per lavorare con esso per risolvere un problema; in questo senso il processo di modellizzazione è mediato dagli strumenti – tecnologici o cognitivi – scelti e utilizzati (Lesh e Lehrer, 2003).

Lavorare con modelli matematici spesso comporta collegare tra loro aspetti diversi della disciplina, generalmente trattati separatamente. Per esempio per quanto riguarda le funzioni, con cui vengono per lo più espressi i modelli matematici nella scuola secondaria, le loro diverse caratteristiche e forme di rappresentazione (come formule, grafici, tabelle, equazioni, descrizioni verbali, diagrammi) vengono spesso presentate in maniera frammentata a partire dalla scuola secondaria di primo grado; quando, al termine del se-

condo ciclo di istruzione, ci si muove verso lo studio analitico delle funzioni, gli studenti possono avere difficoltà a superare questa visione frammentata per poter lavorare in modo flessibile con le funzioni (Best e Bikner-Ahsbahs, 2017). Queste difficoltà nel comprendere il concetto di funzione e le sue caratteristiche sono rilevate anche a livello universitario e possono essere ricondotte a una difficoltà di fondo nel comprendere la dipendenza tra due variabili e come una quantità varia al variare di un'altra (Carlson *et al.*, 2002).

Gli studenti inoltre spesso incontrano difficoltà nel trasferire conoscenze sviluppate nella risoluzione di un problema a una nuova situazione problematica, o nel riapplicare un modello precedentemente analizzato. Lavorare sulla generalizzazione di un modello e sul riconoscimento di casi simili per la possibile applicazione è un approccio utile per comprenderne più a fondo le proprietà e le potenzialità (English e Sriraman, 2010).

Le attività di modellizzazione sono per loro natura interdisciplinari e non sono di facile progettazione per il docente, a cui è richiesta un'approfondita conoscenza della realtà o dei collegamenti con altre discipline; collaborazione con i colleghi esperti in campi diversi favorirebbe la proposta di questo tipo di attività, ma spesso la scuola offre poche occasioni di confronto tra docenti di materie diverse.

Nonostante queste difficoltà, lavorare con i modelli matematici è utile per favorire la ricerca di strategie di problem solving, per abituare i ragazzi a una visione numerica della realtà, a organizzare i dati e analizzare le informazioni con approccio scientifico, individuare variabili chiave, processi e trasformazioni (Blum e Ferri, 2009).

## ***2.2. Ambiente di apprendimento interattivo***

In questo contributo consideriamo “interattivo” un ambiente di apprendimento in cui viene incoraggiata l'azione dello studente e in cui ciò che avviene dipende da quest'azione (Moreno e Mayer, 2007). In questo senso il termine “interattivo” può essere contrapposto a “trasmissivo”. Come ambiente di apprendimento intendiamo sia un ambiente fisico, in cui lo studente apprende attraverso le interazioni con i compagni, con il docente e con gli strumenti a sua disposizione, sia un ambiente virtuale, popolato non da risorse “statiche” come testi e video, ma da attività che rispondono all'azione dell'utente restituendo un feedback.

Le radici di una simile concezione di ambiente di apprendimento sono costruttiviste; in particolare un sistema di questo tipo favorisce l'apprendimento agendo sotto diversi aspetti, come i seguenti (Grabinger e Dunlap, 1995):

- promuovere lo studio in contesti autentici;
- incoraggiare il senso di responsabilità, di iniziativa, di apprendimento intenzionale degli studenti;
- incentivare la collaborazione tra studenti e docenti;
- utilizzare attività didattiche dinamiche e interdisciplinari che promuovono i processi di pensiero superiori per aiutare gli studenti a sviluppare strutture complesse di conoscenza;
- offrire occasione di valutazione formativa e feedback personalizzato;
- valutare i progressi degli studenti in contesti autentici utilizzando compiti contestualizzati nella realtà.

In un ambiente di apprendimento di questo tipo è pertanto possibile adottare strategie di valutazione formativa, quali (Black e Wiliam, 2009):

- 1) chiarire e condividere gli obiettivi dell'apprendimento e i criteri per raggiungere il successo;
- 2) architettare discussioni efficaci e attività in grado di mettere in evidenza quanto gli studenti abbiano capito;
- 3) fornire feedback che facciano progredire l'apprendimento;
- 4) attivare gli studenti come risorse educative gli uni per gli altri;
- 5) attivare gli studenti come responsabili del proprio apprendimento.

L'utilizzo di tecnologie adattive consente inoltre di proporre percorsi di apprendimento personalizzati grazie a feedback specifici per l'utente (Barana *et al.*, 2017). I feedback diventano davvero efficaci per ridurre la discrepanza tra traguardo atteso e livello raggiunto quando agiscono non solo a livello di compito, mostrando com'è stato svolto, ma anche a livello di processo e a livello metacognitivo, dando informazioni sul procedimento da svolgere per rispondere alla domanda e aiutando lo studente nell'autoregolazione dei processi (Hattie e Timperley, 2007).

### **3. Un percorso interattivo per la costruzione di modelli matematici**

Sulla base di questo quadro teorico le autrici di questo contributo hanno progettato e realizzato un percorso didattico interattivo volto allo sviluppo di modelli matematici per studenti dell'ultimo anno della scuola secondaria di primo grado (grado 8). La scelta dei destinatari del percorso è motivata dal fatto che al termine della scuola secondaria di primo grado, con l'introduzione del calcolo simbolico, gli studenti hanno tutti gli strumenti necessari per mettere in relazione tra loro le varie forme di rappresentazione dei modelli matematici: descrizione verbale, tabelle numeriche, formule e grafici. Si ipotizza che lavorare a questo livello con modelli matematici elementari,

per esempio determinati da funzioni lineari e non lineari, con attività che promuovano l'utilizzo flessibile di questi strumenti e il collegamento tra concetti appartenenti a sfere disciplinari diverse, possa aiutare a prevenire l'occorrenza di difficoltà concettuali in futuro.

Il percorso è stato sviluppato in un ambiente di apprendimento virtuale, nello specifico una piattaforma Moodle integrata con un Ambiente di Calcolo Evoluto (ACE), Maple, e un Sistema di Valutazione Automatica (SVA), Moebius Assessment. L'ACE ha consentito la creazione di materiali interattivi per la Matematica, con testi, formule, grafici e componenti interattive attraverso cui gli studenti possono modificare parametri, inserire numeri e formule, individuare punti in un grafico e osservare le trasformazioni al modello matematico rappresentato (Barana e Marchisio, 2015). Con il SVA sono state create domande per la verifica formativa secondo il modello sviluppato da Barana, Conte, Fioravera, Marchisio e Rabellino (2018), che include:

- domande contestualizzate per lo più nella realtà o in collegamento con altre discipline;
- test sempre accessibili e ripetibili in piattaforma;
- domande algoritmiche, con dati, grafici, formule, calcoli e risultati che cambiano al variare casuale di parametri;
- risposte aperte, valutate automaticamente;
- feedback immediato al termine di un test;
- feedback interattivo, attraverso il quale viene illustrato passo a passo il processo risolutivo dei problemi.

Problemi di modellizzazione matematica sono stati proposti con la valutazione automatica: le domande algoritmiche consentivano la proposta di situazioni simili in cui ripetere il ragionamento; il feedback interattivo è stato utilizzato per mostrare una o più possibili strategie risolutive oppure per guidare il ragionamento con step graduati (Barana e Marchisio, 2016).

I materiali interattivi sono adatti per un duplice utilizzo:

- in classe, organizzando gli studenti in piccoli gruppi con il supporto della LIM, utilizzata come strumento di condivisione di compiti, processi e risultati;
- a casa, assegnando le attività da svolgere come compito. La valutazione automatica e i feedback interattivi supportavano e guidavano gli studenti nella risoluzione dei problemi.

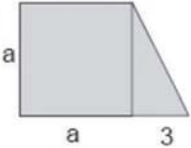
La maggior parte degli spunti per i problemi sono tratti da quesiti INVALSI utilizzati in precedenti rilevazioni per il grado 8 (terza secondaria di primo grado) oppure 10 (seconda secondaria di secondo grado), in particolare relativi al nucleo Relazioni e funzioni e alla dimensione Risolvere problemi. Gli spunti sono stati ampliati per lavorare in modo più flessibile con i modelli propo-



sti; in particolare sono state inserite richieste intermedie o aggiuntive a quelle già presenti nelle domande per porre l'attenzione sui processi e restituire un feedback che possa aiutare lo studente a capire il procedimento da seguire per risolvere il problema.

Il percorso trae origine da alcune attività sul calcolo letterale e sulla manipolazione di formule algebriche, viste in relazione alla geometria. Scrivere una formula per calcolare l'area, il perimetro o il volume di una figura le cui misure sono espresse attraverso lettere e numeri è un pretesto per analizzare, sul piano geometrico, numerico, grafico e algebrico, funzioni lineari, quadratiche e cubiche. Le domande si ispirano a un quesito proposto nelle prove INVALSI per il grado 8 nel 2009, in cui si chiede di calcolare l'area di un trapezio rettangolo in cui la lunghezza della base minore e dell'altezza sono date in funzione di un parametro (fig. 1); il quesito ha avuto il 26% di risposta corretta, classificandosi quindi come difficile. A partire da questo spunto è stata creata un'attività in cui si chiede di scrivere la formula che esprime l'area di un trapezio con caratteristiche simili. Dopo la discussione sulle possibili formule corrette, attraverso un file interattivo, parte del quale è visibile nella fig. 2, gli studenti sono stati guidati alla scoperta della funzione che si ottiene al variare del parametro: la crescita delle misure, e di conseguenza dell'area del trapezio, è associata al movimento di un punto lungo una curva nel piano cartesiano, e corrisponde ai risultati numerici precedentemente calcolati e raccolti in una tabella. L'attività è stata successivamente riproposta prima modificando la figura iniziale fissando il valore di un lato, poi con altre figure geometriche solide.

**D18. Scrivi la formula che esprime come varia l'area  $A$  della figura qui di fianco, al variare della lunghezza  $a$ .**



$A =$  \_\_\_\_\_

Fig. 1 – Domanda INVALSI somministrata al grado 8 nel 2009

Fonte: GESTINV 3.0 ([www.gestinv.it](http://www.gestinv.it))

In aggiunta alle attività interattive sono stati progettati diversi tipi di esercizi con valutazione automatica che chiedono la formulazione, la rappresentazione e il confronto di funzioni derivate da diverse figure geometriche nel piano e nello spazio, al fine di ripetere e consolidare processi variando dati e situazioni.

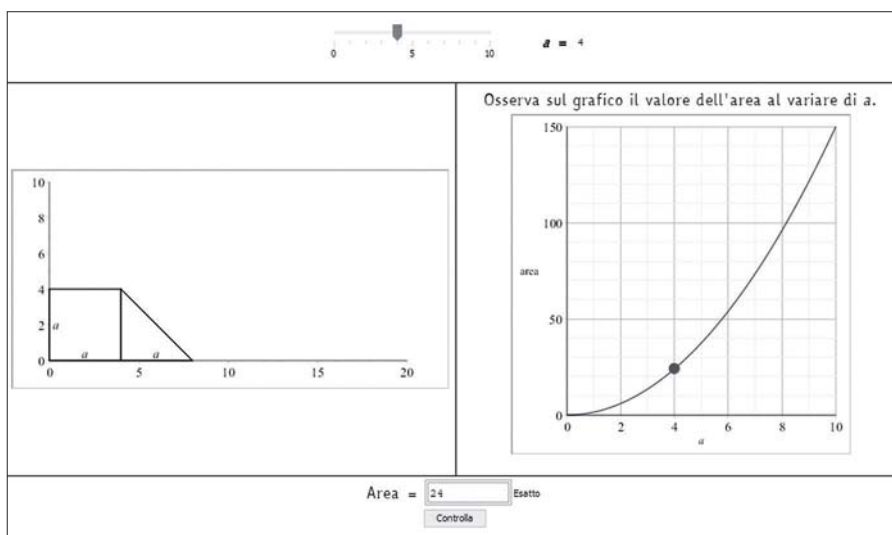


Fig. 2 – Attività introduttiva sulle funzioni a partire da contesti geometrici

Dopo le prime attività sulle funzioni, nel percorso si introducono problemi calati in contesti reali, in cui si chiede di individuare, formulare e rappresentare un modello matematico. Se nelle attività precedenti la costruzione delle formule era facilitata dall'uso di formule studiate in geometria, in questa seconda fase molta attenzione è stata rivolta alla formulazione algebrica dei modelli descritti verbalmente, oltre che alle molteplici forme di rappresentazione. In questi problemi domande più precise sono finalizzate all'analisi di modelli lineari con tutte le loro proprietà, come la pendenza interpretata come velocità, le intersezioni con gli assi nel punto di origine del moto o dell'azione, l'intersezione tra due modelli come coincidenza nel tempo e nello spazio, la relazione tra gli elementi algebrici e grafici del modello. Nella fig. 3 è possibile visualizzare un esempio di problema in forma interattiva, che permette di studiare ogni aspetto di una funzione lineare. Il problema propone il confronto dell'andamento della lettura di un libro da parte di 3 amici, che leggono con velocità diverse iniziando in momenti diversi. Nel file interattivo sono presenti 4 tabelle, inizialmente vuote, che gli studenti possono completare con la posizione del libro a cui i personaggi del problema arrivano al termine di ogni giornata. L'attività coinvolge attivamente gli studenti, ai quali viene anche chiesto di immedesimarsi nella situazione e inserire nella quarta tabella l'andamento della propria lettura, immaginando con quale velocità leggerebbero il libro.

### Chi finirà per primo?

Per le vacanze estive la professoressa di italiano ha assegnato un libro da leggere. Il libro è lungo 180 pagine.

- Valentina inizia a leggerlo il primo giorno delle vacanze e legge 15 pagine al giorno.
- Marco aveva già cominciato quel libro e aveva già letto le prime 30 pagine, quindi parte da pagina 30. Legge 10 pagine al giorno.
- Luca si riposa per i primi 4 giorni, poi inizia il libro e legge 20 pagine ogni giorno.

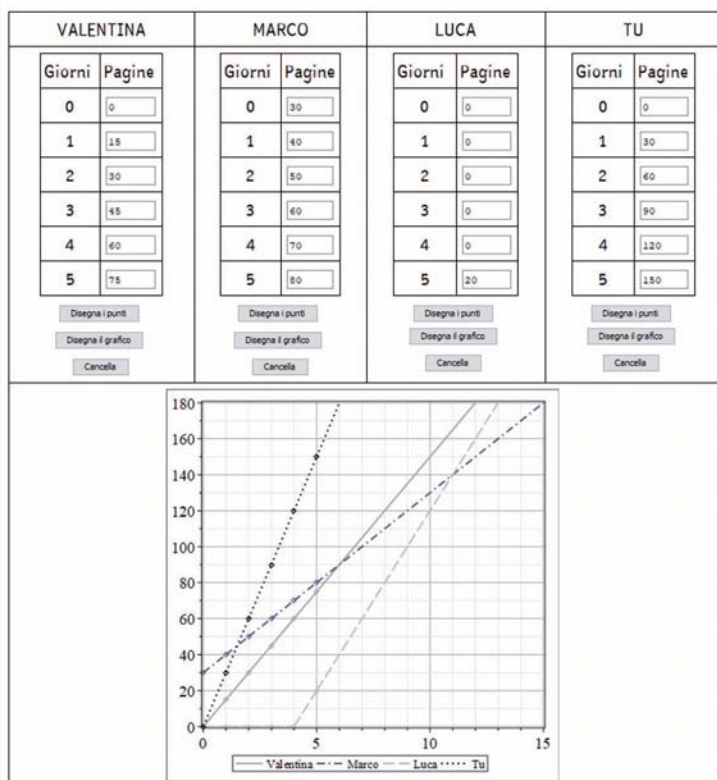


Fig. 3 – Parte di un'attività sui modelli lineari

Una volta completate le tabelle, gli studenti possono cliccare sui bottoni sottostanti e generare i grafici dell'andamento delle letture. L'osservazione delle tabelle e dei grafici, in particolare grazie all'aggiunta della tabella relativa all'andamento della propria lettura, apre a esplorazioni e confronti. L'attività è completata da una serie di domande sull'analisi dei grafici che portano alla scrittura delle formule con cui si possono esprimere i modelli. Questo problema si ispira a un quesito proposto nelle prove INVALSI per il grado 10 nel 2012 che ha avuto il 51% di risposta corretta (fig. 4).

Attraverso la valutazione automatica sono proposte altri tipi di situazioni reali, ispirate ad altri quesiti di modellizzazione lineare e non lineare che ricorrono nelle prove INVALSI per il grado 10; le richieste portano a individuare le varie caratteristiche delle funzioni passando da una forma di rappresentazione all'altra.

**D27.** Durante il periodo estivo Anna deve leggere un libro di 305 pagine come compito per le vacanze. Nel mese di giugno si riposa e a partire dal primo giorno di luglio legge 5 pagine al giorno per tutto il mese. In agosto va in vacanza con i genitori e dimentica il libro a casa; al suo ritorno, negli ultimi 10 giorni di vacanza, per terminare il libro legge 15 pagine al giorno. Quale, fra i seguenti grafici, può rappresentare l'andamento del numero di pagine lette da Anna nel periodo estivo?

A.  Il grafico 1  
 B.  Il grafico 2  
 C.  Il grafico 3  
 D.  Il grafico 4

Fig. 4 – Quesito da cui è stata tratta ispirazione per l'attività visibile nella fig. 3

Fonte: GESTINV 3.0 (www.gestinv.it)

## 4. La sperimentazione “Città Educante”

Il percorso interattivo è stato sperimentato con 299 studenti di 13 classi terze di 6 scuole secondarie di primo grado di Torino durante l’a.s. 2017/2018. La sperimentazione è stata realizzata nell’ambito del progetto “Città Educante” dal Dipartimento di Matematica “Giuseppe Peano” dell’Università di Torino in collaborazione con il CNR e con il supporto di Rossella Garuti, esperto INVALSI (Barana *et al.*, 2018). Altre 11 classi delle stesse scuole sono state coinvolte nella sperimentazione come gruppo di controllo per il confronto dei risultati. Prima di iniziare la sperimentazione e al suo termine sono stati somministrati alle classi un test iniziale e un test finale, composti da domande INVALSI che riguardano formule e modelli matematici, tratte da precedenti rilevazioni per il grado 8 e 10. In particolare tutte le domande del test finale, provenienti da precedenti rilevazioni per il grado 10, erano volte alla verifica dell’acquisizione di competenze di modellizzazione da parte degli studenti; pur rimanendo nel bagaglio di conoscenze e abilità che possono essere acquisite nella scuola secondaria di primo grado, la maggior parte delle domande scelte per la verifica finale hanno avuto una percentuale piuttosto bassa di risposte corrette a livello nazionale, con una media pari al 40% di risposta corretta.

Il percorso è stato proposto alle classi in 10 ore di lezione in compresenza con un esperto universitario, completate dalle attività online che gli studenti potevano svolgere a casa. Le attività in classe si sono svolte con il supporto della LIM o di un proiettore, attraverso il quale venivano proiettati i materiali interattivi. Gli studenti lavoravano in piccoli gruppi di 3 o 4; le risposte alle varie fasi dei problemi venivano verificate con la valutazione automatica, le giustificazioni delle soluzioni individuate e i processi risolutivi dei vari gruppi venivano confrontati collettivamente, con l’ausilio degli strumenti interattivi che consentivano l’esplorazione di diverse possibilità e rappresentazioni. Gli incontri sono stati videoregistrati e dalla piattaforma sono stati estratti dati sull’utilizzo delle varie attività. Al termine del percorso è stato somministrato un questionario agli studenti che hanno lavorato con le attività sperimentali, finalizzato alla rilevazione del gradimento delle metodologie e degli strumenti proposti. Le attività proposte non hanno comportato nessun costo per le scuole, sono state offerte in maniera completamente gratuita a docenti e studenti.

## 5. Risultati

Attraverso l'analisi dei dati raccolti durante le attività sperimentali nelle classi (video e appunti), è stato possibile notare come le attività abbiano consentito agli studenti di sviluppare una buona comprensione dei modelli matematici presentati.

Le prime attività che introducono i modelli matematici a partire dalle formule della geometria hanno consentito agli studenti di distinguere il tasso di variazione costante, proprio di una funzione lineare, confrontato con una crescita non costante propria delle funzioni quadratiche e cubiche. Per esempio, in un momento di confronto collettivo sui risultati ottenuti al crescere dell'area di una figura data dalla formula  $5\alpha + 8$  al variare di  $\alpha$ , condotto compilando una tabella interattiva alla LIM, uno studente è intervenuto dicendo "Ho notato una cosa! Le aree aumentano sempre di 5!". Alla domanda dell'insegnante "Perché?" una studentessa ha aggiunto: "Perché c'è  $5\alpha$ ". L'insegnante a questo punto ha chiesto: "E se ci fosse stato  $3\alpha$ ?" un terzo studente ha risposto "Sarebbe aumentato di 3". L'insegnante ha quindi chiesto: "Se dovessimo tracciare questi punti su un piano cartesiano cosa troveremmo?". Il primo studente ha prontamente risposto: "Una retta!". La generazione immediata del grafico interattivo ha permesso di visualizzare i punti della tabella lungo una retta nel piano, chiarendo anche al resto della classe, che aveva ascoltato la conversazione, l'andamento di una funzione lineare che a ogni passo "cresce" di 5 unità.

In modo simile, funzioni quadratiche e cubiche scritte per calcolare le aree e i volumi di altre figure geometriche hanno permesso di notare la differenza tra un andamento lineare e uno non lineare. La possibilità di modificare la funzione e visualizzare immediatamente il grafico ha consentito di individuare il ruolo delle potenze e dei coefficienti nel modificare il grafico della funzione; visualizzando contemporaneamente la figura che cresce in dimensioni e il punto che si muove sulla curva ha permesso di collegare l'andamento della funzione all'incremento di una quantità concreta. Queste attività hanno inoltre contribuito a chiarire la differenza tra "variabile dipendente" e "variabile indipendente", concetti fondamentali nello studio delle funzioni.

Attraverso le attività successive gli studenti hanno potuto esaminare gli stessi modelli calati in situazioni problematiche reali. Per esempio, con l'attività sul libro per le vacanze rappresentata in fig. 3 gli studenti hanno potuto esaminare come varia il modello lineare individuato dalla lettura di un libro a velocità costante. Attraverso i file interattivi gli studenti hanno potuto confrontare grafici corrispondenti alla lettura effettuata con velocità diversa e vedere cosa cambia quando il libro viene iniziato prima o dopo l'inizio

delle vacanze, scrivendo le formule corrispondenti. In classe è stata apprezzata moltissimo la parte interattiva che consentiva agli studenti di inserire l'andamento della propria lettura sul grafico e confrontarlo con quello degli altri personaggi del problema: gli studenti si sono divertiti a proporre i propri dati per ottenere grafici con particolari caratteristiche; l'interattività del file proiettato alla LIM si è rivelata utile per esplorare rapidamente diverse velocità di lettura, esaminando la pendenza delle rette corrispondenti. Gli studenti hanno notato come, aumentando la velocità di lettura, i punti individuano una retta sempre più "ripida", seppure non sia possibile ottenere una retta verticale, che corrisponde a un tempo di lettura nullo. In tutte le classi quest'attività ha permesso di attivare tutti gli studenti in interessanti discussioni. Altri problemi su modelli matematici simili in contesti diversi ha consentito di ripetere ragionamenti e consolidare la comprensione.

La verifica finale ha messo in luce le competenze acquisite dagli studenti grazie a quest'attività. Mentre nella verifica iniziale il gruppo di controllo aveva ottenuto risultati leggermente più elevati, nella verifica finale gli studenti a cui è stato proposto questo percorso hanno ottenuto valutazioni significativamente più elevate rispetto al gruppo di controllo. Si possono notare inoltre differenze significative rispetto al gruppo di controllo nelle risposte alle singole domande; sono interessanti anche i confronti con il campione nazionale che ha risposto agli stessi quesiti nelle prove standardizzate. Riportiamo come esempio una domanda della verifica finale che chiede di individuare il grafico di un modello esponenziale descritto verbalmente in una situazione reale tra quattro proposti. Il testo della domanda è visibile nella fig. 5. La domanda è stata somministrata nel 2013 alla classe seconda secondaria di secondo grado e ha avuto il 30,7% di risposte corrette. Nel gruppo di controllo la domanda ha avuto una percentuale di risposte corrette simile (33,3%) mentre nelle classi in cui è stato svolto il percorso interattivo la percentuale di risposte corrette è salita al 52,3%. I dati sono riportati nella tab. 1; nella tab. 2 sono riportati i risultati del test del Chi-quadrato di Pearson e del test V di Cramer effettuati sul campione di studenti che hanno partecipato alla sperimentazione (gruppo sperimentale e gruppo di controllo). Dal momento che il gruppo di controllo non aveva riportato risultati inferiori rispetto al gruppo sperimentale nella verifica iniziale, la differenza è spiegabile solo con l'approccio didattico seguito nelle attività sperimentali.

- D3. Una popolazione batterica aumenta nel tempo con un tasso di crescita costante (cioè la variazione percentuale del numero di batteri tra un qualunque giorno e il giorno precedente è costante). La seguente tabella riporta il numero  $N$  di milioni di batteri della popolazione al trascorrere dei giorni:

numero di giorni trascorsi	0	1	2	3	4	5	...
numero $N$ di batteri (in milioni)	1000	1100	1210	1331	...	...	...

- a. Quale fra i seguenti grafici può rappresentare l'andamento del numero  $N$  di batteri al variare del tempo  $t$ , in almeno 20 giorni?

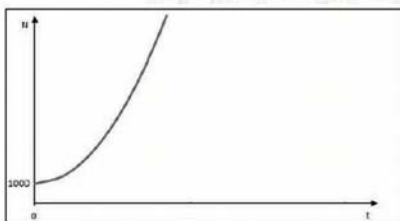


Grafico 1

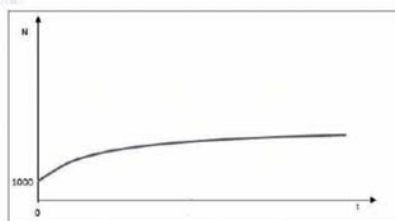


Grafico 2

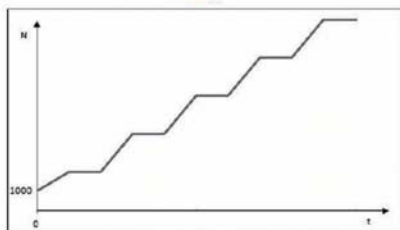


Grafico 3

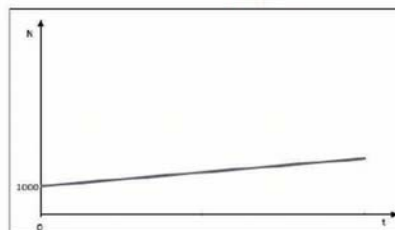


Grafico 4

- A.  Il grafico 1  
 B.  Il grafico 2  
 C.  Il grafico 3  
 D.  Il grafico 4
- b. Quanti milioni di batteri ci saranno il quinto giorno?

Risposta: ..... milioni di batteri

Fig. 5 – Domanda della verifica finale

Fonte: GESTINV 3.0 (www.gestinv.it)

Tab. 1 – Risultati di una domanda della verifica finale

Gruppi	Risposte corrette (%)	Risposte errate (%)
Campione nazionale (grado 10)	30,7	62,9
Gruppo di controllo (grado 8)	33,3	66,7
Gruppo sperimentale (grado 8)	52,4	47,6



Tab. 2 – Statistiche calcolate sulle risposte del campione del progetto “Città Educante” alla domanda della verifica

Test	Valore	Significatività
Chi-quadrato di Pearson	17,258	0,000
V di Cramer	0,191	0,000

Nel questionario finale, somministrato agli studenti al termine della sperimentazione, sono state proposte domande finalizzate a rilevare l’apprezzamento e la percezione di utilità delle attività svolte in classe. Nella tab. 3 sono riportate le percentuali di risposte, espresse in scala Likert da 1 (valore minimo) a 5 (valore massimo). Si può notare che le risposte negative, corrispondenti ai valori 1 e 2, sono pochissime. In particolare le risorse in piattaforma sono state trovate utili come supporto delle lezioni in classe e dello studio a casa, e hanno aiutato a mantenere viva l’attenzione durante gli incontri.

Tab. 3 – Risposte degli studenti al questionario finale, espresse in scala Likert da 1 a 5 (valori percentuali)

Domande	1	2	3	4	5
Le attività proposte sono state interessanti	1,4	2,3	47,4	39,8	9,0
Le attività proposte sono state comprensibili	0,0	4,5	43,0	34,8	17,6
Hai prestato attenzione durante le attività	0,0	3,6	36,2	45,2	14,9
Le attività proposte sono state utili per capire meglio alcune parti della Matematica	1,4	4,5	29,1	45,9	19,1
Le attività proposte sono state utili per collegare tra loro ambiti diversi della Matematica	2,3	7,8	44,2	34,1	11,5
Pensi che le attività proposte saranno utili per i tuoi studi futuri	2,7	18,2	35,9	29,5	13,6
È stato utile utilizzare la piattaforma in classe	0,5	3,6	32,1	47,1	16,7
È stato utile poter rivedere quanto svolto in classe da casa attraverso la piattaforma	0,0	8,2	35,5	36,4	20,0

## 6. Conclusioni

I risultati della sperimentazione hanno messo in luce come l’utilizzo formativo delle domande tratte da prove standardizzate precedentemente somministrate, coniugato con l’utilizzo di strumenti interattivi e con valutazione automatica, sia stato efficace per sviluppare competenze di modellizzazione e lavorare con i modelli matematici. L’obiettivo di questo percorso è di raf-

forzare le radici cognitive di concetti che diventano fondamentali per l'apprendimento della Matematica nella scuola secondaria e su cui si evidenziano problemi di comprensione anche a livello universitario. Le competenze su cui questo percorso lavora sono rilevanti per offrire agli studenti chiavi di lettura della realtà che consentano di agire in modo consapevole in una società pervasa da dati e modelli complessi.

Sarebbe interessante tracciare il percorso degli studenti che hanno preso parte alla sperimentazione e analizzare quali difficoltà incontreranno in Matematica nella scuola secondaria, per studiare l'efficacia del percorso in un'ottica verticale. I materiali del percorso sono stati messi a disposizione di tutti i docenti delle scuole secondarie di primo e secondo grado di tutta Italia che partecipano al progetto del MIUR "Problem Posing & Solving" (Branaccio *et al.*, 2015): gli insegnanti potranno usufruirne e adattare i materiali per inserirli nella propria didattica.

## Riferimenti bibliografici

- Barana A., Boffo S., Gagliardi F., Garuti R., Marchisio M., Zich R. (2018), "Percorsi interattivi supportati dalle ICT per l'apprendimento della matematica attraverso il problem solving", in A. Raffone (a cura di), *La Città Educante: Metodologie e tecnologie a servizio delle Smart Communities*, Liguori, Napoli, pp. 115-128.
- Barana A., Boffo S., Gagliardi F., Marchisio M. (in corso di pubblicazione), *Problem Posing & Solving: a Digital Way to Learn Mathematics*.
- Barana A., Conte A., Fioravera M., Marchisio M., Rabellino S. (2018), "A Model of Formative Automatic Assessment and Interactive Feedback for STEM", in *2018 IEEE 42nd Annual Computer Software and Applications Conference*, IEEE, Tokyo, pp. 1016-1025.
- Barana A., Fioravera M., Marchisio M., Rabellino S. (2017), "Adaptive Teaching Supported by ICTs to Reduce the School Failure in the Project 'Scuola dei Compiti'", in *2017 IEEE 41st Annual Computer Software and Applications Conference*, IEEE, Torino, pp. 432-437.
- Barana A., Marchisio M. (2015), "Testi digitali interattivi per il recupero nella matematica nel progetto per la riduzione della dispersione scolastica 'Scuola dei Compiti'", *Form@re*, 15, 1, pp. 129-142.
- Barana A., Marchisio M. (2016), "Ten Good Reasons to Adopt an Automated Formative Assessment Model for Learning and Teaching Mathematics and Scientific Disciplines", *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 228, pp. 608-613.
- Best M., Bikner-Ahsbahs A. (2017), "The function concept at the transition to upper secondary school level: tasks for a situation of change", *ZDM*, 49, 6, pp. 865-880.

- Black P., Wiliam D. (2009), “Developing the theory of formative assessment”, *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21, 1, pp. 5-31.
- Blum W., Ferri R.B. (2009), “Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?”, *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1, 1, pp. 45-58.
- Brancaccio A., Marchisio M., Palumbo C., Pardini C., Patrucco A., Zich R. (2015), “Problem Posing and Solving: Strategic Italian Key Action to Enhance Teaching and Learning Mathematics and Informatics in the High School”, in *2015 IEEE 39th Annual Computer Software and Applications Conference*, IEEE, Taichung, pp. 845-850.
- Carlson M., Jacobs S., Coe E., Larsen S., Hsu E. (2002), “Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 33, 5, pp. 352-378.
- Commissione Europea (2018), “Raccomandazione del Consiglio, del 22 maggio 2018, relativa alle competenze chiave per l’apprendimento permanente”, *Official Journal of the European Union*, 2018/C 189/01.
- English L. D., Sriraman B. (2010), “Problem Solving for the 21st Century”, in L.D. English, B. Sriraman (eds.), *Theories of Mathematics Education*, Springer, Berlin/Heidelberg, pp. 263-290.
- Grabinger R.S., Dunlap J.C. (1995), “Rich environments for active learning: a definition”, *ALT-J*, 3, 2, pp. 5-34.
- Greefrath G., Vorhölter K. (2016), *Teaching and Learning Mathematical Modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries*, Springer International Publishing, Cham.
- Hattie J., Timperley H. (2007), “The Power of Feedback”, *Review of Educational Research*, 77, 1, pp. 81-112.
- INVALSI (2018), *I livelli INVALSI in Matematica – II secondaria di II grado. Descrizione analitica*, testo disponibile al sito: <https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2018/Descrittori%20analitici%20dei%20livelli%20INVALSI%20-%20MATEMATICA.pdf>, data di consultazione 26/1/2021.
- Kaiser G. (2014), “Mathematical Modelling and Applications in Education”, in S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer, Dordrecht, pp. 396-404.
- Lesh R., Lehrer R. (2003), “Models and Modeling Perspectives on the Development of Students and Teachers”, *Mathematical Thinking and Learning*, 5, 2-3, pp. 109-129.
- Moreno R., Mayer R. (2007), “Interactive Multimodal Learning Environments: Special Issue on Interactive Learning Environments: Contemporary Issues and Trends”, *Educational Psychology Review*, 19, 3, pp. 309-326.
- OECD (2016), *Equations and Inequalities. Making Mathematics accessible to all*, OECD Publishing, Paris.
- OECD (2017), *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving (revised edition)*, PISA, OECD Publishing, Paris.

## 2. *Mettere in formula*

di Giorgio Bolondi, Stefania Pozio

A partire dal 2018, la Prova nazionale di grado 8 è stata svolta online e la correzione delle risposte aperte è stata centralizzata. Ciò ha permesso di disporre, per ogni domanda, di tutte le risposte fornite dagli studenti, e di avere quindi una panoramica degli errori più diffusi. In questo lavoro vengono analizzate le risposte errate che gli studenti di grado 8 hanno dato a una domanda in cui si chiedeva di scrivere la formula del perimetro di un trapezio isoscele tenendo conto di alcuni vincoli presenti nel testo e sulla figura. Da tale analisi emergono diversi tipi di errori che mettono in luce misconcezioni, errori procedurali, errori formali, incapacità di coordinare vari registri di rappresentazione.

*Since 2018, the national 8 grade test has been conducted online and the correction of open-ended responses has been centralised. This allowed to have, for each question, all the answers provided by the students, and therefore to have an overview of the most common errors. In this paper we analyse the wrong answers that the students of 8 grade gave to a question in which they asked to write the formula of the perimeter of an isosceles trapezium taking into account some constraints present in the text and on the figure. From this analysis it is possible to observe different types of errors that highlight misconceptions, procedural errors, formal errors, inability to coordinate various registers of representation.*

### 1. **Introduzione**

Dall'anno scolastico 2017/18, in base al decreto legislativo n. 62 del 13 aprile 2017, la prova INVALSI dell'ultimo anno della scuola secondaria di

primo grado (grado 8) è svolta online al computer (CBT) e la correzione, che prima era affidata ai singoli insegnanti, è ora centralizzata.

La correzione centralizzata ha consentito per la prima volta, di raccogliere e quindi analizzare in maniera omogenea tutte le diverse risposte che gli studenti hanno fornito a livello nazionale a ciascuna delle domande aperte presenti nella banca di item sulla quale sono state costruite le prove. In questo lavoro vengono analizzate, interpretate e classificate le diverse risposte che gli studenti hanno fornito a una domanda dell'ambito Spazio e figure in cui si richiedeva di scrivere la formula che permetteva di calcolare il perimetro di un trapezio isoscele. Le risposte sono state suddivise in diverse categorie ciascuna delle quali mette in luce un particolare percorso che ha portato a un determinato errore.

Dall'analisi di queste risposte emergono chiaramente le difficoltà degli studenti nello scrivere una formula in cui è necessario riconoscere e distinguere le variabili dalle costanti, avere ben chiaro come rappresentare una variabile nella formalizzazione algebrica e saper gestire due registri di rappresentazione, cioè il passaggio sia dal linguaggio naturale sia dal linguaggio iconico al linguaggio algebrico.

## **2. Il passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico**

Nelle *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione* (MIUR, 2012), uno degli obiettivi di apprendimento per la scuola secondaria di primo grado, nell'ambito Relazioni e funzioni, è «Interpretare, costruire e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà» e, tra i Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine dello stesso ciclo di scuola è previsto che lo studente «sia in grado di utilizzare e interpretare il linguaggio matematico (formule, equazioni...) e coglierne il rapporto col linguaggio naturale». Anche tra gli Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria, nell'ambito Relazioni, dati e previsioni si legge: «Rappresentare relazioni e dati e, in situazioni significative, utilizzare le rappresentazioni per ricavare informazioni, formulare giudizi e prendere decisioni». Quindi, la capacità di scrivere una formula è qualcosa che gli studenti non dovrebbero apprendere soltanto nella scuola secondaria di primo grado, ma già fin dalla scuola primaria: il pensiero algebrico dovrebbe svilupparsi sin dall'inizio del percorso di apprendimento della Matematica.

In Italia, il principale progetto che si occupa dello sviluppo del pensiero algebrico fin dai primi anni di scuola, è il progetto “Ar-Al” (<http://www.>

progettoaral.it/), nato nel 1998 a opera del Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena e Reggio (Malara e Navarra, 2003).

Questo progetto si colloca all'interno della cornice teorica denominata *early algebra* (la prima algebra). L'ipotesi su cui si basa è che il pensiero algebrico dovrebbe essere costruito fin dai primi anni della scuola primaria poiché i principali ostacoli cognitivi nell'apprendimento dell'algebra nascono in modi spesso insospettabili quando il bambino inizia ad avvicinarsi al pensiero aritmetico e possono trasformarsi in blocchi concettuali anche insormontabili allo sviluppo del pensiero algebrico. Tali difficoltà potrebbero essere superate insegnando ai bambini a pensare l'Aritmetica in termini algebrici (Malara, 2003).

I risultati del progetto "Ar-Al" si inseriscono all'interno di una cornice teorica più ampia condivisa a livello internazionale in cui si ipotizza l'esistenza di una relazione complessa tra pensiero aritmetico e pensiero algebrico (Kieran 2006; Radford 2010).

A livello internazionale, anche l'indagine OCSE-PISA evidenzia l'importanza del simbolismo algebrico, tanto da inserirlo tra una delle 6 capacità matematiche fondamentali (OCSE, 2016).

Gran parte della letteratura sulla comprensione e l'utilizzo dell'Algebra da parte degli studenti si concentra sul significato che gli studenti attribuiscono ai diversi simboli letterali, sul modo in cui essi li utilizzano e sullo studio delle difficoltà degli studenti a passare dal linguaggio naturale al linguaggio simbolico.

Kuchemann (1981) propone una prima classificazione dell'uso che gli studenti fanno delle lettere e individua 6 diverse categorie: le lettere alle quali, fin dall'inizio, viene attribuito un valore, le lettere che non vengono prese in considerazione, le lettere considerate come degli oggetti, le lettere che rappresentano un'incognita specifica, le lettere che possono rappresentare un qualsiasi numero, le lettere come variabili. Secondo Usiskin (1988) ai diversi usi delle variabili corrispondono diverse concezioni dell'Algebra: Algebra intesa come Aritmetica generalizzata (e quindi la variabile considerata come rappresentante qualsiasi numero), Algebra vista come studio di procedure per risolvere certi tipi di problemi (e quindi la variabile assume il significato di incognita) o l'Algebra vista come studio di relazioni (allora la variabile è considerata come "qualcosa che varia"). Arcavi (1994) si pone il problema di cosa sia il "senso del simbolo" (*symbol sense*) negli studenti. Tra i vari comportamenti descritti da Arcavi riguardo al senso del simbolo, vi è quello che riguarda la scelta del simbolo perché quando una situazione viene tradotta in simboli, uno dei primi passi è scegliere cosa rappresentare e come. Tale scelta può avere effetti rilevanti sul processo di soluzione e sui risultati.

Sostiene Arcavi che non è detto che se lo studente sceglie all'inizio di un processo di soluzione una variabile non corretta vuol dire che non ha il senso del simbolo, però avere il senso del simbolo dovrebbe includere la capacità di saper scegliere al meglio il simbolo più adatto per mostrare determinate relazioni o generalizzazioni.

Per il contesto italiano, la distinzione anche terminologica tra parametro e variabili si trova sviluppata in Chiarugi *et al.* (1995).

Secondo Stacey e MacGregory (1997) poiché le variabili si riferiscono a numeri, la precedente conoscenza dei numeri da parte degli studenti potrebbe limitare la loro comprensione di questo concetto. Quando gli studenti vengono introdotti per la prima volta al concetto di variabile, tendono a interpretare simboli letterali per indicare oggetti o nomi abbreviati di oggetti e non numeri.

Capraro e Joffrions (2006) si chiedono fino a che punto gli studenti di scuola media siano in grado di costruire un modello algebrico a partire da una rappresentazione verbale di un problema, mostrando una comprensione anche concettuale delle equazioni. Nel loro studio essi identificano alcune categorie di risposte errate simili a quelle da noi ritrovate, categorie che verranno quindi utilizzate per descrivere gli errori che i nostri studenti hanno fatto nel rispondere alla domanda oggetto di questo studio.

Molti autori sostengono che la difficoltà degli studenti di formulare espressioni algebriche a partire da informazioni espresse a parole risiede nel loro voler tradurre una frase scritta a parole in un'equazione sostituendo le parole chiave con simboli matematici in sequenza da sinistra a destra. Tale processo viene chiamato in letteratura "traduzione sintattica" (Herscovics, 1989; Kirshner *et al.*, 1991). Macgregor e Stacey (1993), invece, sostengono che la difficoltà degli studenti in questo passaggio da un linguaggio naturale a un linguaggio algebrico è dovuta al fatto che essi si costruiscono dei modelli cognitivi che, pur favorendo la comprensione del linguaggio naturale, offrono poco supporto a un ragionamento logico perché non è semplice rappresentare tali modelli con un codice matematico.

### 3. Metodologia

Fino all'anno scolastico 2016/2017 le prove INVALSI venivano corrette dai singoli docenti. Quindi, per quanto riguarda le domande a risposta aperta, non era possibile avere una visione globale del tipo di risposte errate fornite dagli studenti a ciascuna domanda; ogni docente aveva solo le informazioni riguardanti gli studenti della propria classe. La possibilità di avere a dispo-

sizione tutte le diverse tipologie di risposte permette di analizzare in modo più puntuale le difficoltà che gli studenti riscontrano davanti a determinati quesiti e di conseguenza di fare ipotesi sul tipo di ragionamento retrostante a ciascun tipo di errore. Inoltre poiché i dati analizzati provengono da un campione statistico rappresentativo di tutta la popolazione italiana degli studenti di grado 8, si può dire che analizzando nel loro complesso tutte le risposte fornite dagli studenti, così come viene fatto in questo lavoro, si ha un quadro generale e una descrizione accurata delle possibili difficoltà degli studenti italiani nei confronti del passaggio dal linguaggio naturale al simbolismo matematico, indipendentemente dal tipo di insegnamento ricevuto, dal loro background socio-economico e culturale, dalla scuola frequentata.

L'approccio metodologico di questo lavoro si avvale dell'utilizzo di un database in cui sono elencate tutte le risposte errate date dagli studenti a ciascuna domanda, così come essi le hanno fornite nel momento in cui hanno risposto sul computer. Il database è costituito da un file Excel nel quale, in una colonna, sono riportate tutte le risposte date dagli studenti cui la domanda è stata sottoposta e, nella colonna a fianco, il codice attribuito a quella risposta (1 per risposta corretta, 0 per risposta errata, W per risposta non data, Y per risposta non valida, come parolacce o frasi offensive). Utilizzando la modalità filtro è possibile ottenere l'elenco di tutte le risposte corrette, oppure di quelle errate e, per ciascuna di esse, anche il numero di studenti che hanno dato quel tipo di risposta.

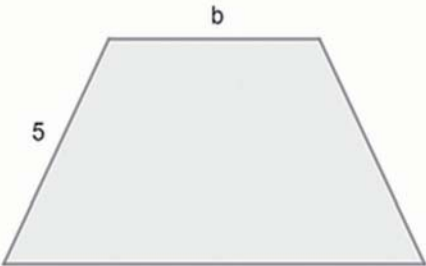
La metodologia utilizzata è quantitativa nella prima fase e qualitativa nella fase successiva, quando si cercano di interpretare le risposte errate degli studenti. Attraverso l'analisi di tali risposte si cerca di verificare la ragionevole aspettativa che esistano categorie di errori e di strategie risolutive che si ripetono in studenti diversi e si prova a distinguere e descrivere queste categorie e, dove possibile, a motivarle (Pozio, 2011). Tale analisi è molto utile per scopi didattici, poiché permette di capire come modulare meglio l'insegnamento e individuare quali argomenti tra quelli trattati dai docenti non sono stati compresi pienamente e per quali ragioni. Le risposte alla domanda in esame, considerate come errate rappresentano circa il 50% di tutte le risposte, una percentuale alquanto consistente. L'analisi è stata effettuata in due fasi: nella prima, con l'utilizzo della modalità filtro, si è proceduto a controllare l'elenco di tutte le risposte errate per vedere se ci fossero delle modalità di risposta sbagliata che si ripetevano più di una volta; nella seconda fase, si è cercato di raggruppare le modalità di risposta errata che sottendevano lo stesso tipo di errore. Attraverso questo tipo di lavoro si è giunti a suddividere le risposte errate in otto categorie, ognuna delle quali rappresenta uno specifico errore che diversi studenti, sparsi sul territorio nazionale e provenienti da diverse scuole, hanno commesso.



#### 4. La messa in formula nelle prove INVALSI

La domanda oggetto del presente articolo (fig. 1) riguarda la messa in formula in un contesto geometrico. Essa richiede allo studente di scrivere la formula che esprime il perimetro del trapezio isoscele in funzione della base minore ( $b$ ). Lo stimolo della domanda presenta due diversi registri: un registro visivo costituito dalla figura di un trapezio isoscele su cui sono riportati la misura del lato obliquo (5) e il valore della base minore ( $b$ ) e un registro verbale costituito da un breve testo in cui viene fornita la relazione tra la base minore e la base maggiore.

**Nel trapezio isoscele in figura la base maggiore è doppia della minore.**



**Scrivi una formula che esprima il perimetro  $p$  del trapezio in funzione di  $b$ .**

*Digita la risposta alla domanda.*

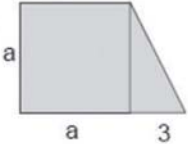
**Risposta:  $p =$**

Fig. 1 – Quesito PN 2018

Il numero di studenti del campione italiano a cui è stata sottoposta questa domanda è 4565. Di questi studenti, il 18% (840 studenti) non ha risposto. 8 studenti hanno dato risposte non valide. Il 34% (1.568 studenti) ha fornito la risposta corretta. Hanno dato una risposta errata 2.149 studenti (il 47%).

Già negli anni passati domande relative alla messa in formula sono state proposte con esiti molto diversi. Infatti sia nel 2009 sia nel 2010 sono state presentate agli studenti domande che richiedevano agli studenti la scrittura di una formula. Nel quesito del 2009 (fig. 2) si chiedeva di scrivere la formula per il calcolo dell'area di un trapezio rettangolo i cui dati erano da ricavare dalla figura.

**D18. Scrivi la formula che esprime come varia l'area  $A$  della figura qui di fianco, al variare della lunghezza  $a$ .**

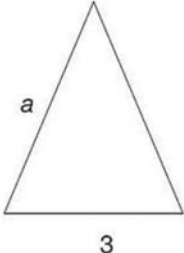


$A =$  \_\_\_\_\_

Fig. 2 – Quesito PN 2009

La domanda risultò molto difficile, solo il 27% circa degli studenti a livello nazionale rispose in modo corretto. Nel quesito del 2010, invece, si chiedeva di scrivere la formula che esprime il perimetro di un triangolo isoscele con lato obliquo  $a$  e base 3 (fig. 3).

**D22. Scrivi la formula che esprime il perimetro  $p$  del triangolo isoscele in figura in funzione di  $a$ .**



$p =$  .....

Fig. 3 – Quesito PN 2010

Tale quesito risultò molto più facile, tant'è che il 62% degli studenti a livello nazionale rispose in modo corretto. Una differenza così elevata nella percentuale di risposte corrette tra queste due domande può essere attribuita al tipo di formula che si richiede agli studenti di scrivere. Nella domanda del 2010 si trattava di scrivere soltanto la formula del perimetro (e quindi una somma) di un triangolo isoscele di cui era fornita la lunghezza della base (3) e di un lato obliquo ( $a$ ). La risposta era considerata corretta anche se lo studente non effettuava nessuna manipolazione algebrica e si limitava a scrivere  $a + a + 3$ . Invece nel quesito del 2009, la figura era molto più complessa e inoltre si richiedeva la formula dell'area che presupponeva una moltiplicazione (e non una somma come nel caso del perimetro). La figura poteva essere vista sia come un trapezio rettangolo, sia come una figura composta da un quadrato e un triangolo rettangolo. Diverse erano quindi le strategie che lo studente poteva usare per arrivare alla formula: poteva calcolare l'area del

quadrato  $a^2$  e l'area del triangolo ( $\frac{3a}{2}$ ) separatamente e poi sommare i due risultati ottenuti, oppure applicare la formula dell'area del trapezio, ma in questo caso era necessario sommare le due basi, di cui la maggiore composta da una variabile e un numero, poi moltiplicare per l'altezza, anch'essa rappresentata dalla variabile  $a$ , e infine dividere per 2. Quindi c'erano diverse cose che lo studente doveva tenere sotto controllo.

In entrambe le domande tuttavia, non è stato possibile analizzare le risposte errate e l'unico dato disponibile era quello relativo alla percentuale di risposte errate in quanto, fino allo scorso anno, i quesiti erano corretti direttamente dai docenti sulla base di una griglia di correzione fornita da INVALSI. Nel caso della somministrazione online delle prove, come si diceva, la correzione è centralizzata pertanto è possibile analizzare e studiare le tipologie di errori degli studenti del campione nazionale.

#### ***4.1. Analisi del quesito***

Le difficoltà che la domanda presa in esame (fig. 1) presenta sono diverse: innanzitutto gli studenti devono conoscere come si calcola il perimetro di un poligono (somma dei lati), ma soprattutto devono individuare ed esprimere le relazioni fra gli elementi della figura: il trapezio è isoscele quindi i lati obliqui sono uguali fra loro; la base maggiore è il doppio della base minore  $b$ , quindi la base maggiore del trapezio in funzione della base minore è: base maggiore =  $2b$ .

La risposta considerata come corretta secondo le griglie di correzione ( $p = 3b + 10$  o equivalenti) poteva essere fornita in diverse versioni: da quella in cui lo studente non effettua nessuna manipolazione algebrica e scrive la formula come somma di ogni singolo lato (per esempio  $p = 5 + 5 + b + b + b$  oppure  $p = b + 2b + 5 \times 2$ ) a quella in cui utilizza una scrittura più sintetica  $p = 3b + 10$ .

Questa domanda è risultata particolarmente impegnativa e difficile (livello 5 di abilità)<sup>1</sup> per i nostri studenti, ma è molto interessante da analizzare

<sup>1</sup> Descrizione del livello 5: L'allievo/a utilizza con sicurezza gli aspetti concettuali e procedurali degli argomenti più importanti proposti nelle Indicazioni nazionali di matematica per la scuola secondaria di primo grado. Risponde a domande che richiamano situazioni non ordinarie per le quali è necessario costruirsi un modello adeguato. Utilizza diverse rappresentazioni degli oggetti matematici e passa con sicurezza da una all'altra. Illustra e schematizza procedimenti e strategie risolutive dei problemi e fornisce giustificazioni con un linguaggio adeguato al grado scolastico, anche utilizzando simboli, in tutti gli ambiti di contenuto (Numeri, Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni) ([https://INVALSI.areaprove.cineca.it/docs/2018/MATEMATICA\\_Illustrazione\\_descrizione\\_sinteticalivelli.pdf](https://INVALSI.areaprove.cineca.it/docs/2018/MATEMATICA_Illustrazione_descrizione_sinteticalivelli.pdf)).

nei suoi risultati in quanto la messa in formula coinvolge sia il processo di sostituzione di un valore a una lettera, che è un processo fondamentale la cui capacità di metterlo in atto dovrebbe essere acquisito alla fine del primo ciclo, sia il processo di costruzione di una relazione tra elementi, in particolare di relazione simbolica tra elementi diversi.

## 4.2. Analisi delle categorie di risposta

Tra gli studenti che hanno fornito la risposta corretta, il 70% ha dato come risposta  $b + 2b + 5 \times 2$  (e tutte le sue possibili varianti, per esempio  $5 * 2 + b + 2 * b$  oppure  $(b \times 2) + 5 + 5 + b$  oppure  $5 + 5 + (b * 2) + b$  ecc.), mantenendo in questo modo una stretta relazione con l'idea di perimetro di un poligono come somma dei suoi lati.

Un solo studente ha scritto  $5 + 5 + b + b + b = 3b + 10$  mostrando di aver effettuato una manipolazione algebrica, sommando termini simili sia letterali sia numerici.

Il 5% degli studenti che ha risposto in modo corretto non ha raggruppato e ha scritto  $b + b + b + 5 + 5$  oppure  $b + b + b + 10$ .

Il 24% ha scritto la formula in forma sintetica ( $3 * b + 2 * 5$  oppure  $b * 3 + 5 * 2$  oppure  $10 + b3$  ecc.).

Per quanto riguarda le risposte errate, qui di seguito vengono illustrate le 8 diverse categorie in cui sono stati suddivisi gli errori analizzati. Per ogni categoria è descritto il tipo di errore che la caratterizza e vengono riportati alcuni esempi esemplificativi della categoria stessa.

### 4.2.1. Categoria 1

Nella categoria 1 abbiamo quegli studenti (61 studenti, quasi il 3% di quelli che hanno sbagliato) che nella formula che loro conoscono scrivono la relazione  $B = 2b$  in maniera corretta dal punto di vista algebrico, ma poi non utilizzano il valore numerico 5 e indicano il lato obliquo principalmente con la lettera  $l$ , qualcuno utilizza anche altre lettere. Qualche studente, invece, usa il simbolo  $h$  invece di  $l$  per il lato obliquo, probabilmente perché lo considera come se fosse l'altezza del trapezio e anche questo tipo di errore (cioè attribuire il ruolo di altezza del trapezio al lato obliquo) è presente anche in altre categorie. Poiché nella formula che gli studenti di questa categoria scrivono non c'è traccia del valore attribuito al lato obliquo, viene da supporre che per questi studenti il termine "formula" evoca qualcosa che debba conte-

nere solo lettere e non numeri. Un errore simile, ma non uguale, è stato individuato in uno studio condotto da Ursini (1990) su 65 studenti tra gli 11 e i 14 anni. In tale studio sono stati sottoposti quesiti con figure geometriche note le cui dimensioni erano indicate con simboli letterali o combinazione di numeri e lettere. Il risultato è stato che di fronte a figure in cui le dimensioni erano indicate solo da lettere, 25 studenti hanno scritto la formula usando lettere diverse da quelle indicate. Secondo Kuchemann (1981) sebbene in questo caso la lettera  $b$  rappresenti un'incognita, per gli studenti, invece, potrebbe semplicemente rappresentare il nome o l'etichetta data al lato stesso e non il valore, sconosciuto, della lunghezza del lato e pertanto gli studenti danno un'etichetta anche al lato obliquo. Anche Capraro e Joffrion (2006) individuano questo tipo di errore (cioè l'utilizzo di lettere diverse rispetto a quelle fornite) nel passaggio da un testo verbale a una formulazione algebrica.

Tab. 1 – Esempi di risposte appartenenti alla categoria 1

$b+(b*2)+(l*2)$	$bx3+2l$	$(bx2)+(lx2)+b$	$(l*2)+(b*3)$	$(d+d)+b+(bx2)$
$b+2b+2l$	$b+(b*2)+(h*2)$	$2h+3b$	$b+(b*2)+l+l$	$dx2+d+5+5$
$b+(b+b)+L*2$	$l+l+b+bx2$	$3b+2l$	$(l*2)+(b*2)+b$	$b*3+h*2$

#### 4.2.2. Categoria 2

Alla categoria 2 appartengono quegli studenti (378, il 17,6 % di coloro che hanno sbagliato) che non scrivono la formula ma forniscono un valore numerico, cioè pensano di dover calcolare il perimetro. Il risultato numerico più frequente è 25 (circa 80 studenti), mentre 30 studenti scrivono 10. Il risultato 25 potrebbe derivare dall'assegnare alla base minore lo stesso valore del lato obliquo (5), in quanto nella figura dello stimolo la lunghezza della base minore si discosta poco da quella del lato obliquo. Alcuni studenti non effettuano la somma, ma lasciano indicati i dati numerici utilizzati per calcolare il perimetro.

Questo tipo di errore è stato già segnalato in diversi studi (Ursini, 1990; Kuchemann, 1981). In particolare, secondo Kuchemann, l'interpretazione che gli studenti danno della lettera è quella di *letter evaluated*, cioè sentono la necessità di doverle assegnare un valore per poter calcolare il perimetro.

Siamo probabilmente di fronte a quello che D'Amore e Martini (1997, p. 152) definiscono «la clausola di delega formale»:

«Risolvere un problema di tipo scolastico standard coincide con il trovare la o le operazioni più adatte; si tratta cioè di interpretare aritmeticamente

il testo, passando dalla sua formulazione in lingua naturale, all'espressione aritmetica che porta dai dati al risultato».

Tab. 2 – Esempi di risposte appartenenti alla categoria 2

$5+5+5+5$	$5*2 + 5*2+5+5$	$5+5+5+10$	625	$5+5+5+10=25$
$5+5+2+4=16$	30	4 più 8 più 5	20,5	$8+4+5+5=22$
$5 \times 5 = 25$	25	$5-1=4, 4=b, b \times 2=8$	70	$20+10+(5*2)$

### 4.2.3. Categoria 3

Alla categoria 3 appartengono gli studenti (75 studenti pari al 3,5% di quelli che hanno sbagliato) che forniscono una risposta a parole e, nella maggior parte dei casi, non utilizzano alcun simbolo o numero. Essi cercano di esprimere con il verbale quella che è la situazione: c'è chi descrive il procedimento che c'è da fare, magari anche quello corretto (il 32% degli studenti che appartengono a questa categoria), c'è chi descrive a parole una generica formula dell'area (base maggiore più base minore per altezza diviso due), chi quella del perimetro (base minore + base maggiore + lato obliquo + lato obliquo), altri propongono soluzioni assolutamente prive di senso. Capraro e Joffrion (2006), nello studio da loro effettuato riguardo la capacità degli studenti di scuola media di tradurre in modo significativo parole in simboli matematici hanno rilevato che “una varietà di risposte (22% nella loro ricerca) ha dimostrato che gli studenti avevano una forte comprensione concettuale del problema e sono stati in grado di tradurre le parole del problema in frasi matematiche significative. Questi tentativi sono stati visti più spesso nella categoria in cui si è cercato di riscrivere il problema a parole”. Nel nostro studio, in realtà, accade il contrario, cioè gli studenti appartenenti a questa categoria scrivono a parole la soluzione, non il testo del problema. Probabilmente per questi studenti il verbo “scrivere” nel testo della domanda (“Scrivi la formula”) è sinonimo di spiegare a parole come calcolare il perimetro di quel trapezio.

Tab. 3 – Esempi di risposte appartenenti alla categoria 3

Bisogna moltiplicare b per 2 per trovare la base maggiore poi sommare 5 più 5 e infine addizionare tutti i numeri per trovare il perimetro	Lato + lato + base maggiore + base minore (metà della base maggiore)	Base minore più base minore per due più dieci	Base minore+(base minore*2)+(lato obliquo*2)	Si sommano tutti i lati, però bisogna prima trovare "b" e poi fare la somma dei lati
Sotto radice $b*B/10$	Base maggiore +base minore + lato obliquo x2	Base maggiore, più base minore, per altezza,diviso due	b maggiore+ b minore+2lati obliqui	Si addizionano tutti i lati
Base minore per base maggiore diviso due	Base maggiore meno base minore per due	Base minore per base maggiore diviso 2 = $b * B / 2$	Teorema di Pitagora	Cateto per cateto fratto due

#### 4.2.4. Categoria 4

La categoria 4 identifica quegli studenti che commettono errori sul tipo di operazione da utilizzare nella formula (116 studenti, il 5,5% di coloro che hanno sbagliato), pur individuando in modo corretto le variabili da inserire. All'interno di questa categoria, però, possiamo considerare due gruppi distinti. In un gruppo rientrano coloro che fanno confusione nel padroneggiare il doppio e la metà. Infatti, scrivono  $b / 2$  invece di  $b$  per 2, quindi confondono il ruolo delle due basi. Gli studenti considerano come variabile indipendente la base maggiore invece della minore. Poiché la base maggiore è il doppio della base minore, allora la base minore sarà la metà della base maggiore, da cui la formula  $5 * 2 + B + B / 2$  (I e II riga della tabella 4).

Nel secondo gruppo ci sono gli studenti che confondono la potenza con la moltiplicazione o invece di sommare calcolano il prodotto. Diversi studenti al posto di  $2b$  oppure di  $b \times 2$  scrivono  $b \times b$  oppure  $b + 2$ , oppure invece di scrivere  $(2b + b)$  scrivono  $(2b \times b)$ . Appartiene a questa categoria uno studente che è stato in grado di fornire il valore delle basi nella sua forma più sintetica ( $3b$ ), ma poi ha commesso l'errore di moltiplicare tale valore per la lunghezza dei lati obliqui invece di sommarlo (III e IV riga della tabella 4).

Capraro e Joffrion (2006) sostengono che gli studenti di Matematica devono possedere una comprensione concettuale in modo che una volta che le parole hanno per loro significati matematici, essi possano tradurre accuratamente quelle parole in simboli matematici. Gli studenti di questa categoria mancano probabilmente di una comprensione concettuale del problema.

Tab. 4 – Esempi di risposte appartenenti alla categoria 4

$(5x2)+(b/2)+B$	$(B/2)+b+5+5$	$bm+(5x2)+bm:2$	$B+B:2+5x2$	$(1o*2)+bm+bm/2$
$(B/2)+B+(5*2)$	$5+5+B+b/2$	$B + B/2 + 2*5$	$5+b1+b1:2+5$	$5*2+B+B/2$
$5*2+b+b*b$	$(5x5)+(bxbx2)$	$(5*2)+ b+b+2$	$(b+b^2)+5*2$	$10*3b$
$5*5+b*3$	$5+5+(b*2b)$	$5*5+b*2+b$	$(5*2)+(2b*b)$	$b+(2+b)+(2+5)$

#### 4.2.5. Categoria 5

La categoria 5 raggruppa tutti gli studenti che, invece della formula del perimetro, scrivono la formula dell'area. Gli studenti che appartengono a questa categoria sono circa l'8% di quelli che hanno sbagliato (in totale 169 studenti). Tra questi studenti si possono fare alcune distinzioni: ci sono quegli studenti che scrivono la formula dell'area del trapezio così come l'hanno ap-



presa a scuola  $(B + b) * h : 2$  senza tener conto di nessuno dei dati forniti nella domanda. Altri scrivono una generica formula dell'area  $(b * h / 2)$ . Altri ancora utilizzano i dati presenti nella domanda, scrivono in modo corretto la relazione tra base maggiore e base minore, cioè 2 al posto della  $B$  scrivono  $2b$ , ma poi alcuni moltiplicano per  $h$ , altri, invece, moltiplicano per 5, considerando il lato obliquo l'altezza del trapezio – per esempio  $(2b + b) \times 5 / 2$  –. L'interpretazione di questo tipo di errore porta a pensare che la formula dell'area del trapezio è più familiare ai nostri studenti, probabilmente perché è una formula non banale che tendono a ricordare. Di fatto, a scuola, si fanno molti esercizi sull'area del trapezio, molto di meno si lavora sul suo perimetro. Quindi, nel momento in cui gli studenti leggono nella domanda “scrivi la formula...”, viene loro in mente l'area piuttosto che il perimetro. Siamo quindi di fronte a un problema riconducibile al contratto didattico (“se mi stanno chiedendo una formula sul trapezio, sicuramente sarà quella dell'area”) (Brousseau, 1984).

Tab. 5 – Esempi di risposte appartenenti alla categoria 5

$b * h / 2$	$(2b + b) \times 5 / 2$	$b1 + b2$ per $h : 2$	$b + (b * 2) * h / 2$	$B + b$ per $H : 2$
$B + b \times h : 2$	$(2b \times h) : 2$	$b^{\wedge} + b * 5 : 2$	$(B + b) \times 5 : 2$	$b1 + b2 \times h : 2$
$3b * h / 2$	$[(b * 2) + b * 5] : 2$	$[(b + 2b) \times h] : 2$	$(b + B * h) : 2$	$(bM + bm) * h / 2$

#### 4.2.6. Categoria 6

Nella categoria 6 sono state raggruppate le risposte degli studenti che esprimono il perimetro come somma di 4 lati senza tener conto della relazione tra la base minore e la base maggiore. Essi si limitano a indicare la base maggiore con  $B$  e non in funzione di  $b$ , come viene esplicitamente richiesto nella domanda. All'interno di questa categoria si possono distinguere due gruppi di studenti: quelli (10%, 227 studenti) che utilizzano, nello scrivere la formula, il valore del lato obliquo presente nel testo del problema, da quelli (6,3%, 135 studenti) che non utilizzano alcun dato presente nel testo del problema e indicano il lato obliquo principalmente con la lettera  $l$ . Gli studenti appartenenti al primo gruppo differiscono da quelli della categoria 1 per il fatto che questi ultimi scrivono una variabile al posto del valore numerico, mentre loro scrivono una variabile al posto della relazione. L'errore di questa categoria è dunque effettuato da studenti che sanno scrivere una formula generica per il calcolo del perimetro di un trapezio, ma non vi inseriscono la relazione espressa a parole nel testo della domanda.

Tab. 6 – Esempi di risposte appartenenti alla categoria 6 (I e II gruppo)

$(b+B)+5*2$	$b+5+5+base$ maggiore	$5+5+base$ minore+base maggiore	$(5 \times 2)+bm+bM$	$10+B+b$
$5+b+5+B$	$(5*2)+bm+b$	$b+B+5+5$	$B+b+5+5$	$5X2+B+b$
$lo+lo+b+B$	$B+b+2l$	$b+B+(2xh)$	$(bM+bm)+l+l$	$b+B+(h+h)$
$ab+bc+cd+da$	$B+C+D+A$	$Bpiùbpiùlox2$	$l(+2)+b(maggiore)$ $+b(minore)$	$(d+d)+(b+B)$

#### 4.2.7. Categoria 7

La categoria 7 comprende un numero di studenti abbastanza elevato (270, il 12,6% tra coloro che hanno sbagliato). In tale categoria rientrano coloro che identificano le due basi, ma moltiplicano solo per 2 invece che per 3. In questo caso sembrerebbe di essere di fronte a quello che in letteratura viene definita “traduzione sintattica” (*syntactic translation*, Herscovics, 1989) cioè gli studenti si limitano a tradurre la frase dello stimolo in una formula sostituendo alle parole chiave dei simboli matematici in modo sequenziale da sinistra verso destra. La maggior parte degli studenti appartenenti a questa categoria utilizza correttamente il dato numerico, solo alcuni utilizzano la lettera *l* al posto del valore 5.

Tab. 7 – Esempi di risposte appartenenti alla categoria 7

$b+b+5+5$	$bx2+10$	$10+2b$	$5+5+b+b$	$(bx2)più(5x2)$
$5+b+5+b$	$2b+2l$	$5*2+(b*2)=$	$(B=2*b)+2*1$	$(b * 2) + (l * 2)$
$5x2+bx2$	$5*2+b*2$	$b*2+5*2$	base per 2 + 5 per 2	$(b+b)+(5+5)$

#### 4.2.8. Categoria 8

Nella categoria 8 vi sono tutte quelle risposte che non rientrano in nessuna delle precedenti categorie. È la categoria più numerosa, a essa appartengono 680 risposte, pari al 31,8% degli studenti che hanno fornito risposte errate. In questa categoria sono state inserite anche 30 risposte in cui gli studenti hanno fornito formule non complete o con dati sovrabbondanti (per esempio  $2b \times 2 + 10$  in cui lo studente moltiplica la base per 4 invece che per 3, oppure  $b + (b * 2) + 5$  in cui lo studente somma solo un lato obliquo), ma che dimostrano che lo studente ha colto, almeno in parte, una delle due relazioni che doveva essere riportata nella scrittura della formula.

Tab. 8 – Esempi di risposte appartenenti alla categoria 8

$b \times 2: 5$	$(b1xb2):2$	$b*2*5*2$	$B+b:2$	$(b+h)*2$
$b+b+5+5+h$	$2p-(B-l)$	$(5+5):b+B$	$B + 5/5$	$b*5:2$
$b1-b2x2$	$b*h$	$abxh$	$(b+c+10)/2$	$b*(C*3)-(C:2)$

## 5. Conclusioni

In questo lavoro vengono analizzate tutte le risposte errate che gli studenti hanno dato a una domanda che apparteneva alla banca di item che ha costituito la base della Prova nazionale della classe III della scuola secondaria di primo grado. Da tale analisi emergono diversi tipi di errori che mettono in luce misconcezioni, errori procedurali, errori formali, incapacità di coordinare vari registri di rappresentazione. Alcuni di questi errori sono anche descritti in studi effettuati in altri Paesi del mondo, a dimostrazione che non è solo un problema legato al modo con cui l'Algebra è insegnata in Italia, ma ciò non ci esime a riflettere sull'insegnamento dell'Algebra nel nostro Paese.

Dal punto di vista metodologico, questa ricerca indica come si possano integrare diversi punti di vista, in un'ottica anche di sintesi per gli insegnanti. Abbiamo utilizzato dati provenienti dalle indagini su larga scala, "leggendoli" con le lenti teoriche che la ricerca in didattica della Matematica ha elaborato, interpretandoli con le informazioni sul contesto scolastico specifico (libri di testo, indicazioni curricolari, pratiche di insegnamento) nel quale le indagini sono state realizzate. Questo fornisce un esempio di *mixed method research* che può essere esteso allo studio di altre situazioni di insegnamento-apprendimento, nell'ottica anche di fornire agli insegnanti strumenti interpretativi e operativi per i fenomeni che si manifestano nelle loro classi.

## Riferimenti bibliografici

- Arcavi A. (1994), "Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics", *For the Learning of Mathematics*, 14, 3, pp. 24-35.
- Brousseau G. (1984), "Le role centrale du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage", Texte d'une communication lors du Congrès ICME 1984 (Adélaïde), testo disponibile al sito: <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/02/84-Le-r%C3%B4le-central-du-contrat.pdf>, data di consultazione 19/7/2021.

- Capraro M.M., Joffrion H. (2006), “Algebraic equations: Can middle-school students meaningfully translate from words to mathematical symbols?”, *Reading Psychology*, 27, pp. 147-164.
- Chiarugi I., Fracassina G., Furinghetti F., Paola D. (1995), “Parametri, variabili e altro: un ripensamento su come questi concetti sono presentati in classe”, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, 18B, 1, pp. 34-50.
- D'Amore B., Martini B. (1997), “Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard”, *La matematica e la sua didattica*, 2, pp. 151-175.
- Herscovics N. (1989), “Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra”, in S. Wagner, C. Kieran (eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, pp. 60-86.
- Kieran C. (2006), “Research on the learning and teaching of algebra”, in A. Gutiérrez, P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, Sense, Rotterdam, pp. 11-50.
- Kuchemann D. (1981), “Algebra”, in K. Hart (ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16*, John Murray, London, pp. 102-119.
- Malara N.A. (2003), “Dialectics between theory and practice: theoretical issues and aspects of practice from an early algebra project”, in N.A. Pateman, B. J. Dougherty, J. Zilliox (eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME and PMENA, Vol. 1*, Center for Research and Development Group, University of Hawai, Honolulu, Center for Research and Development Group, University of Hawai, pp. 33-48.
- Malara N.A., Navarra G. (2003), *Ar-Al Project: Arithmetic Pathways towards Favouring Pre-algebraic Thinking*, Pitagora, Bologna.
- MIUR (2012), *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*, Roma.
- OECD (2016), PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematic and financial literacy, PISA, OECD Publishing, Paris testo disponibile al sito: <https://doi.org/10.1787/9789264255425-en>, data di consultazione 26/1/2021.
- Pozio S. (2011), *La risoluzione di prove di competenza matematica. Analisi dei risultati italiani nell'indagine OCSE-PISA 2003*, Nuova Cultura, Roma.
- Radford L. (2010), “Elementary form of algebraic thinking in young students”, in M.F. Pinto, T.F. Kawasaki (eds.), *Proceedings of the 34th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4*, PME, Belo Horizonte, pp. 73-80.
- Ursini S. (1990), “Generalization processes in elementary algebra: Interpretation and symbolization”, in G. Booker, P. Cobb, T.N. Mendicuti (eds.), *Proceedings of the 21st PME International Conference*, 2, pp. 149-156.
- Usiskin Z. (1988), “Conceptions of school algebra and uses of variables”, in A.F. Coxford (ed.), *The ideas of algebra*, K-12, 1988 Yearbook, NCTM, Reston.

### *3. Sviluppare competenze sul senso del grafico*

di Francesca Ferrara, Giulia Ferrari, Ketty Savioli

In questo capitolo focalizziamo innanzitutto l'attenzione sullo sviluppo di competenze per il senso del grafico e sui risultati provenienti da una specifica domanda della prova di Matematica SNV del 2017 per la scuola secondaria di I grado, che coinvolge la capacità di interpretare e leggere le relazioni tra due rette nel piano cartesiano. Prendiamo quindi in esame i risultati di una sperimentazione didattica incentrata sulla comprensione di grafici in merito a un quesito di verifica molto vicino alla domanda INVALSI considerata, che richiedeva anche una fase argomentativa. Questa analisi rivela l'importanza di un approccio dinamico ampio alla costruzione di competenze di senso del grafico, per esempio, mediante attività con grafici di movimento, che possono anche coinvolgere l'attività corporea degli studenti.

*This paper focuses first on the development of graph sense and on the results coming from a particular question of the National assessment of mathematics for grade 8 (age of about 13-14 years), which involves the reading and interpretation of relationships between two straight lines on the Cartesian plane. We then examine the results of a teaching experiment based on graph comprehension in relation to a final task, close to the assessment question, which also required some argument. The analysis reveals the significance of a wide dynamic approach to the construction of graph sense literacy, e.g. through activities about motion graphs that also implicate the learners' bodily engagement.*

## 1. Comprensione del grafico e ricerca didattica

La capacità di leggere e interpretare informazioni a partire da rappresentazioni grafiche, come quella di fare inferenze e previsioni sulla base di esse, è una delle competenze fondamentali richieste per una cittadinanza consapevole nel 21° secolo. È questa una capacità molto importante in Matematica, ponendosi al cuore dello studio del concetto di funzione e della modellizzazione di processi e fenomeni della realtà. Ha per questa ragione una forte valenza anche nell'ambito delle Scienze sociali, economico-statistiche e naturali ad ampio spettro. Si tratta tuttavia di una competenza trasversale complessa, di non facile sviluppo e applicazione. D'altra parte, l'elaborazione e l'utilizzo di grafici ha ricevuto e continua a ricevere molta attenzione nella ricerca in didattica della Matematica.

In un interessante studio orientato a indagare i grafici nell'insegnamento e apprendimento della Statistica, Friel, Curcio e Bright (2001) forniscono una vera e propria definizione di comprensione del grafico (*graph comprehension*), sottolineando che, mentre molti ricercatori hanno focalizzato tale comprensione solo sulla lettura e interpretazione di grafici, solo pochi hanno preso in esame altri aspetti significativi, come la costruzione o invenzione e la scelta di grafici. Prendendo in considerazione tutti questi aspetti, vi sono almeno tre livelli di comprensione che si possono distinguere tra elementare, intermedio e avanzato. Essi possono inoltre essere pensati come caratterizzati rispettivamente da: una lettura dei dati, una lettura tra i dati e una lettura oltre i dati (secondo la terminologia introdotta da Curcio, 1981, 1987). La lettura fa qui riferimento alla capacità di estrarre informazione dai dati nel primo caso, di trovare relazioni nei dati nel secondo caso, di muoversi oltre i dati eventualmente per fare previsioni nel terzo caso. Numerosi studi hanno inoltre messo in luce che, se gli studenti sembrano sperimentare poche difficoltà quando è loro richiesto di leggere i dati, fanno invece molti errori quando devono leggere tra i dati e oltre (si vedano, per esempio, Zawojewski e Heckman, 1997; Bright e Friel, 1998; Gal, 1998). Questo accade indipendentemente dal tipo di grafico considerato, poiché i grafici condividono componenti strutturali simili (Kosslyn, 1994), vale a dire prevedono tutti la presenza di: un framework, o struttura, che può comprendere assi, scale, griglie e riferimenti, etichette, dettagli e un background, o scenario.

Inserendo il loro studio in questa prospettiva, Friel e colleghi intendono, per comprensione del grafico, la gamma di abilità, da parte dei lettori, di trarre significato da grafici creati da altri o da loro stessi. Questi ricercatori evidenziano anche come diversi livelli di domande possano provocare diversi livelli di comprensione, eventualmente sotto l'influenza di diversi fattori

critici, tra cui lo scopo per il quale si utilizzano grafici e le caratteristiche del compito, della disciplina e, non ultimo, dei lettori stessi. In anni non troppo recenti, Kosslyn (1985) già sottolineava che comunemente i grafici sono utilizzati per analizzare e comunicare. Tuttavia, i ricercatori hanno iniziato a porre attenzione anche all'invenzione o alla reinvenzione di rappresentazioni grafiche da parte degli studenti. In particolare, di Sessa *et al.* (1991) hanno investigato situazioni in cui studenti del primo anno della scuola secondaria di primo grado dovevano inventare grafici legati all'esplorazione del movimento e hanno suggerito che «una delle difficoltà con la didattica convenzionale [...] è che di solito non coinvolge la meta-conoscenza degli studenti che, di conseguenza, finiscono per sapere “come tracciare grafici” senza capire a che cosa essi servono o perché le convenzioni hanno senso... Può darsi che particolari rappresentazioni non siano al cuore di ciò che dovrebbe essere insegnato più degli usi per cui esse servono, dei criteri che incontrano e delle risorse su cui sono costruiti» (p. 157).

Secondo Friel e colleghi (Friel *et al.*, 2001), un insegnamento dei grafici che implichi una capacità profonda di analisi dei dati dovrebbe allora promuovere un tipo di comprensione che includa una conoscenza flessibile, fluida e generalizzabile dei grafici e dei loro utilizzi. Un altro aspetto rilevante rispetto alla didattica scolastica è quello di focalizzarsi sui grafici come strumenti per comunicare informazioni, come spesso avviene in contesti scientifici e sociali, sulla cui lettura intervengono fattori legati alla percezione e alla decodifica visiva.

In anni più e meno recenti, molti ricercatori hanno rivolto la loro attenzione ad approcci grafici, in particolare al concetto di funzione, mediante l'utilizzo di tecnologie digitali che, con le loro potenzialità, forniscono caratteristiche dinamiche alla cattura e alla visualizzazione di dati, dunque anche all'indagine e alla ricerca di informazioni a partire da essi (Yerushalmy, 2006; Arzarello, Ferrara e Robutti, 2012). La scelta delle funzioni come argomento principale in tanti di questi studi non deve stupire e non è casuale, trattandosi di uno degli argomenti più importanti nel curriculum e per il quale le difficoltà concettuali osservate più di 50 anni prima sono, per la maggior parte, ancora presenti oggi, come osservato da Dubinsky e Wilson (2013) in un lavoro piuttosto recente. Un vasto *corpus* di ricerche è specificatamente incentrato sulla costruzione e sulla lettura di grafici della posizione nel tempo, in relazione alla cattura del movimento del corpo o di oggetti (per es. Nemirovsky, Tierney e Wright, 1998; Ferrara, Pratt e Robutti, 2006; Ferrara e Savioli, 2009; Radford, 2009; Nemirovsky, Kelton e Rhodehamel, 2013; Ferrara e Ferrari, 2016; Kelton e Ma, 2018; Ferrara, Ferrari e Savioli, 2019).

Il nostro lavoro si inserisce proprio in questo filone, con la proposta didattica di un approccio grafico al concetto di funzione per la costruzione di competenza matematica sulla comprensione di grafici (o senso del grafico), dunque sulla ricerca di informazione a partire da essi. In quest’ottica, presentiamo i cardini di una sperimentazione condotta in una classe seconda della scuola secondaria di I grado, per poi intrecciare osservazioni desunte dal lavoro in classe con l’analisi di risposte fornite dagli studenti nella risoluzione di un particolare quesito della verifica di fine sperimentazione. Il quesito ci interessa particolarmente poiché ricalca lo stile di quesiti INVALSI che coinvolgono coppie di grafici e implicano la ricerca di informazioni allo scopo di operare confronti tra andamenti diversi.

## 2. Grafici di treni in movimento

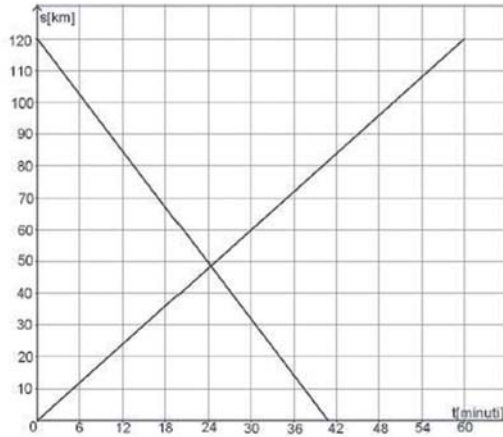
Prima di introdurre la sperimentazione didattica, prendiamo in esame nello specifico una domanda (D4, fig. 1) del fascicolo SNV somministrato nel maggio 2017 per il livello 10 (classe seconda secondaria di II grado), incentrata sul confronto tra i grafici della posizione nel tempo di due treni in movimento su binari paralleli.

Si tratta di una domanda compatibile con il filone di ricerca entro il quale ci collochiamo e fornisce elementi di interpretazione utili in relazione alla costruzione di competenza di senso, o comprensione, del grafico, implicando la lettura e la ricerca di informazioni adeguate per mettere in relazione situazioni diverse legate alla modellizzazione del movimento mediante funzioni lineari.

In generale, questa domanda afferisce all’ambito “Relazioni e funzioni”. Come si legge nella *Guida alla lettura* per la prova di Matematica, classe seconda (scuola secondaria di II grado), Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2016/2017 (INVALSI, 2017b), lo scopo della domanda è formulato come segue: “estrarre informazioni da un grafico posizione-tempo, usando anche la conversione tra minuti e frazioni decimali di ore”. La domanda è suddivisa in due sezioni: la *parte a*, classificata come MCC (Multiple Choice Complex), composta da tre item, in cui è richiesta la verifica della veridicità di alcune affermazioni; la *parte b*, in cui è necessario giustificare una data affermazione.



**D4.** In figura sono rappresentati i grafici della posizione  $s$  (in km) in funzione del tempo  $t$  (in minuti) di due treni in moto rettilineo uniforme su due binari paralleli.



a. Basandoti sulle informazioni fornite nei grafici, indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

		V	F
1.	I due treni si muovono in versi opposti	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2.	Dopo circa 25 minuti dall'istante $t = 0$ i due treni passano per la stessa posizione nel sistema di riferimento scelto	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3.	Dopo 30 minuti dall'istante $t = 0$ , uno dei due treni ha percorso circa 30 km	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

b. Anna afferma che, in uno stesso intervallo di tempo, i due treni percorrono la stessa distanza.  
 Anna ha torto.  
 Perché?

.....

.....

.....

Fig. 1 – Domanda D4, prova di Matematica SNV del 2017, seconda secondaria di II grado

Nella Guida alla lettura si trovano, inoltre, le seguenti indicazioni per la classificazione e per il raccordo tra i documenti curricolari e il Quadro di riferimento delle prove di Matematica del Sistema Nazionale di Valutazione (INVALSI, 2017a, tab. 1):

Tab. 1 – Indicizzazione e classificazione della domanda

Linee guida e Indicazioni nazionali	Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano. Il metodo delle coordinate cartesiane..., rappresentazione di punti e rette nel piano e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità.
Traguardo	a. Rappresenta, elabora, analizza e interpreta dati per descrivere situazioni e individuare caratteristiche di un fenomeno o di una situazione, eventualmente anche allo scopo di produrre ipotesi e prendere decisioni. b. Produce argomentazioni esplicitando la tesi, utilizzando conoscenze e forme argomentative pertinenti alla tesi oggetto di argomentazione.
Dimensione	a. Risolvere problemi b. Argomentare
Risposta corretta	a) V V F b) Sono corrette tutte le risposte che fanno riferimento a una delle seguenti osservazioni: a) nello stesso intervallo di tempo i due treni percorrono distanze diverse; b) i treni impiegano tempi diversi a percorrere la stessa distanza; c) le pendenze dei due segmenti sono diverse (e quindi sono diverse le velocità dei treni). Sia l'item a) sia l'item b) richiedono, per rispondere correttamente, di essere in grado di leggere un grafico tempo-posizione. L'item b) consente di testare inoltre competenze di carattere argomentativo. Osserviamo che lo studente non deve decidere se quanto afferma Anna è corretto o è sbagliato. Il testo dell'item b) precisa che "Anna ha torto": si tratta però di spigare perché ha torto. Il traguardo prevalente è quindi strettamente legato all'argomentazione e quindi alla dimensione 3.

Si tratta insomma di una domanda che permette di indagare, su più fronti, aspetti peculiari dei grafici posizione-tempo e della loro comprensione. La sola lettura dei dati non è in questo caso sufficiente per risolvere le due parti del quesito, che richiedono anche una lettura tra i dati (soprattutto per quanto riguarda l'item b), come messo in evidenza dalla discussione delle possibili risposte corrette nella guida. Questa è anche una delle ragioni per cui è interessante analizzare le statistiche. I risultati generali del Campione forniscono questi dati. Consideriamo dapprima la parte a, composta da tre item (fig. 2). In generale in tutti e tre gli item c'è una bassa percentuale di omissioni.

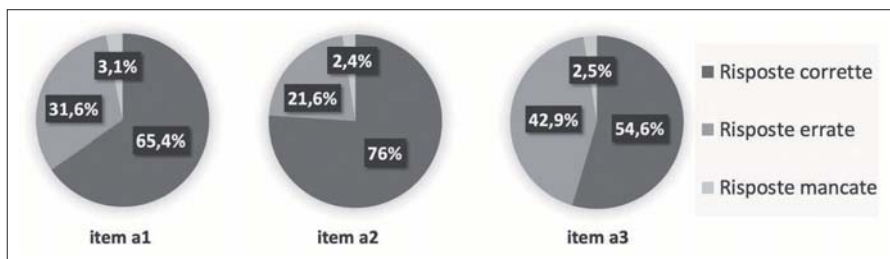


Fig. 2 – Percentuali di risposte corrette, errate e mancate per gli item a1, a2 e a3 della domanda D4

Fonte: [www.gestinv.it](http://www.gestinv.it)

Il primo item, che si riferisce alla capacità di decodificare un allontanamento/avvicinamento dall'origine/verso l'origine, ha il 65,4% di risposte corrette.

Anche il secondo item, basato sulla decodifica tecnica di un punto di intersezione ha avuto più dei  $\frac{3}{4}$  dei rispondenti che hanno dato risposte corrette. Complici forse gli aspetti percettivi di “fusione” tra il punto di intersezione delle rette catturato nel grafico e il punto di incontro dei treni pensato come la stessa posizione nel medesimo sistema di riferimento scelto.

Nonostante il terzo item afferisca alla medesima abilità di mettere in relazione significati di ascisse e ordinate, le risposte corrette diminuiscono al 54,6%. Quali differenze interpretative esistono tra il secondo e il terzo item? Nel primo caso l'aspetto percettivo è molto forte (basato in particolare sulla lettura dei dati), in questo caso, invece, è richiesta sì la capacità di mettere in relazione ascissa e ordinata, ma senza confondere tra la distanza dall'origine e lo spazio percorso (più labile, implicando una lettura tra i dati).

Per un ulteriore approfondimento si possono consultare i risultati per singolo percorso di studi; si tratta di risultati abbastanza equidistribuiti sui diversi indirizzi (si veda la tab. 2, nella quale si nota una buona omogeneità indipendente dal percorso, sebbene il fatto che si considerino due risposte corrette su tre non permetta di conoscere come queste si sono distribuite sulle diverse affermazioni; cioè, non è possibile sapere quali siano, per esempio, le due affermazioni alle quali gli studenti di liceo abbiano attribuito il corretto valore di verità e se si tratti delle medesime scelte corrette operate invece da chi frequenta l'istituto tecnico).

Tab. 2 – Percentuali di risposte corrette per la parte a della domanda D4, suddivise per indirizzo di studi: G (generale); L (licei); T (tecnici); P (professionali)

	Item	Errata	Corretta (2 su 3)
G	D4_a	39,7%	60,3%
L	D4_a	37,1%	62,9%
T	D4_a	41,3%	58,7%
P	D4_a	42,1%	57,9%

Passiamo ora a considerare l'item b), dedicato alla sfera argomentativa. All'alunno è richiesto di giustificare un'affermazione che si dichiara falsa: "In uno stesso intervallo di tempo i due treni percorrono la stessa distanza".

Sono state considerate esatte tutte le risposte che fanno riferimento a una delle seguenti osservazioni: nello stesso intervallo di tempo i due treni percorrono distanze diverse; i treni impiegano tempi diversi a percorrere la stessa distanza; le pendenze dei due segmenti sono diverse (e dunque sono diverse le velocità dei treni).

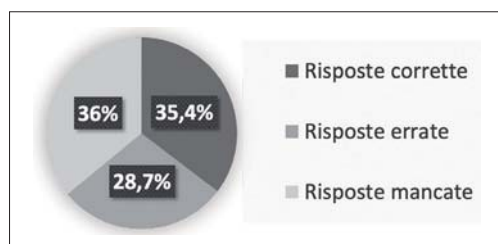


Fig. 3 – Percentuali nazionali di risposte corrette, errate e mancate per la parte b della domanda D4

Fonte: [www.gestinv.it](http://www.gestinv.it)

Il campione nazionale si è quasi equamente distribuito tra risposte corrette, errate e mancanti (fig. 3). Quest'ultima informazione ci suggerisce che la cultura dell'argomentazione è ancora un nodo cruciale sul quale puntare nella scuola secondaria di secondo grado. Se si analizzano i risultati relativi ai percorsi di studi (tab. 3), questa differenziazione risulta molto più evidente: solo un alunno su 5, negli istituti professionali, riesce a giustificare correttamente l'affermazione data.

Tab. 3 – Percentuali nazionali di risposte corrette, errate e mancate per la parte b della domanda D4, suddivise per indirizzo di studi

	Item	Mancante	Errata	Corretta (2 su 3)
G	D4_b	36,0%	28,7%	35,4%
L	D4_b	30,3%	25,5%	44,2%
T	D4_b	34,7%	30,5%	34,7%
P	D4_b	48,1%	31,9%	20,0%

La percentuale di risposte corrette nei professionali è infatti molto bassa e mostra una differenza sostanziale con i risultati ottenuti nei licei. Significativo è infine osservare che quasi la metà degli studenti nei professionali non risponde al quesito.

Seppure la nostra chiave di lettura sia più orientata ai risvolti didattici, alcuni parametri statistici più dettagliati ci permettono di fare le seguenti osservazioni (cfr. valori in grassetto nella tab. 4 e nella fig. 4):

- la difficoltà dell’item, espressa mediante il parametro *Item Threshold(s)* che vale 0,75, delinea un item non troppo difficile;
- il dato denominato *Weighted MNSQ*, cioè l’indice di adattamento che esprime quanto i dati rilevati su un singolo item siano aderenti al modello complessivo determinato attraverso i dati dell’intero test (valore prossimo a 1), ci conferma se l’item è adeguato e coerente. Il valore 0,99 esprime proprio un item coerente con il modello teorico. Nel grafico della curva caratteristica dell’item (fig. 6) si può infatti osservare una quasi perfetta sovrapposizione della curva relativa al modello teorico e di quella desunta dalla prestazione sul campo;
- la correlazione del punto biseriale (*Pt Bis*) indica quanto l’item riesca a discriminare rispondenti con alte abilità rispetto a quelli con basse abilità; rappresenta la correlazione tra la probabilità di scegliere una data opzione e l’abilità complessiva del rispondente. In questo caso, risulta essere 0,44 per la risposta corretta (maggiore di 0,35, parametro di riferimento) e negativa per le altre opzioni;
- un’indicazione interessante deriva dai valori denominati *PVI Avg* che rappresentano l’abilità media (nella stessa scala, cioè rapportati a 1) dei rispondenti sia per la risposta corretta (label 1) sia per gli errori (label 0) o le omissioni varie (label 7 e 9). Possiamo osservare che l’abilità media degli studenti che rispondono correttamente è abbastanza alta e questo non ci sorprende (0,71); in entrambi gli altri casi (di errore e risposta mancante), le abilità medie degli studenti cambiano: per la statistica, chi non risponde è in media meno abile (-0,54) rispetto a chi tenta una risposta sbagliando (-0,18). Ciò significa che l’item, a differenza di altri item,

ha messo a fuoco profili di allievi che tentano o si “arrendono”, differenziandoli.

Tab. 4 – Indici statistici derivati dall’analisi dell’Item Response Theory (IRT)

Cases for this item: 38.120					Item-Rest Cor. 0,44			
Item Threshold(s): 0,75					Item-Total Cor. 0,48			
Weighted MNSQ: 0,99					Item Delta(s): 0,75			
Label	Score	Count	% of tot	Pt.Bis	t	sig. p	PVIAvg:1	PVI SD:1
0	0	10.934	28,68	-0,09	-16,84	0,000	-0,180	1,000
1	1	13.479	35,36	0,44	95,36	0,000	0,710	1,080
7	0	398	1,04	-0,04	-8,26	0	-0,46	0,92
9	0	13.309	34,91	-0,35	-72,85	0,000	-0,54	0,93

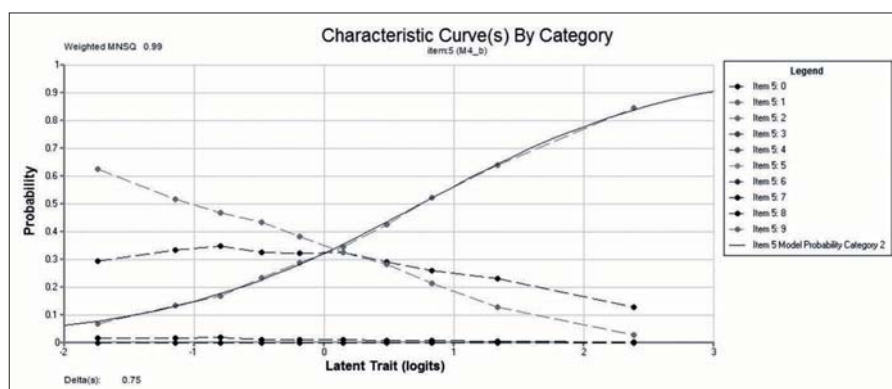


Fig. 4 – Curva caratteristica dell’analisi dell’Item Response Theory (IRT)

Fonte: [www.gestiniv.it](http://www.gestiniv.it)

### 3. La sperimentazione: tecnologia e valutazione

La sperimentazione didattica che vogliamo prendere in considerazione per il nostro discorso ha coinvolto una classe seconda della scuola secondaria di primo grado in un approccio grafico alle funzioni lineari e alle relazioni tra di esse. L’obiettivo della sperimentazione era quello di sviluppare, sin da una precoce età, aspetti di senso del grafico e competenze di interpretazione e ricerca di informazioni, in un contesto di modellizzazione del movimento. Abbiamo realizzato le attività in classe con l’ausilio di un software progettato da alcuni ricercatori statunitensi (del gruppo di R. Nemirovsky, al Centro di Ricerca in Didattica della Matematica e delle Scienze di San Diego).

WiiGraph (questo il nome del software) permette di catturare il movimento contemporaneo di due telecomandi di fronte a una barra sensore (i telecomandi da noi utilizzati sono nello specifico i controller della console di gioco Wii). Rilevando istante per istante la posizione dei telecomandi rispetto al sensore, WiiGraph fornisce in tempo reale grafici di vario tipo mentre due soggetti muovono i telecomandi parallelamente l'uno all'altro. Nel caso più semplice, il software restituisce due grafici del tipo posizione-tempo su uno stesso piano cartesiano (fig. 5): ciascun grafico cattura la distanza nel tempo di un telecomando.

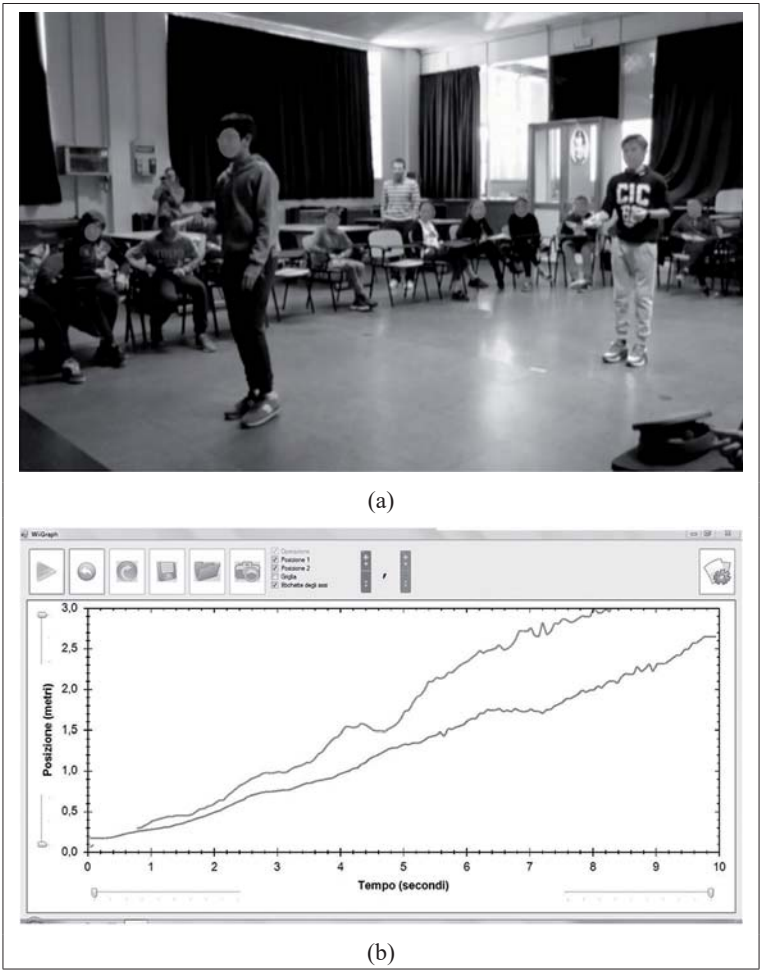


Fig. 5 – Due grafici posizione-tempo ottenuti con WiiGraph in relazione al movimento di due telecomandi

Ci sono almeno due aspetti che sono significativi dal punto di vista della ricerca didattica e per la progettazione di attività volte alla comprensione di grafici. Da un lato, il software coinvolge sempre una coppia di movimenti estesi del corpo: i soggetti possono camminare, stare fermi o in generale modificare la loro posizione con ampi movimenti delle braccia, in uno spazio di interazione (nulla vieta che i movimenti siano prodotti da un solo soggetto che muove in simultanea i due telecomandi). Dall'altro lato, nella modalità in cui abbiamo più utilizzato WiiGraph in classe, due grafici sono prodotti in tempo reale mentre avvengono i movimenti, favorendo non solo la modellizzazione ma anche lo studio delle reciproche relazioni tra i grafici (anche in termini di trasformazioni nel piano).

Gli incontri laboratoriali in classe sono stati strutturati con una maggioranza di momenti di discussione collettiva orchestrata da un ricercatore, a cui erano alternati momenti di lavoro di gruppo e individuale, in interazione con il software e/o mediante schede scritte progettate dai ricercatori con il supporto dell'insegnante della classe. Come anticipato, le attività si sono focalizzate su famiglie di funzioni lineari, in particolare sulle diverse configurazioni che si possono ottenere con due rette (coppia di rette parallele, coppia di rette che si intersecano, con pendenze di segno opposto o con pendenze dello stesso segno). Questo ci ha permesso di incentrare la costruzione di senso attorno all'idea di incrocio (che di nuovo è un elemento che fonde aspetti puramente percettivi e aspetti legati all'interpretazione del grafico, piuttosto interessante per la corrispondenza tra l'incontrarsi nel movimento e l'intersecarsi dei grafici).

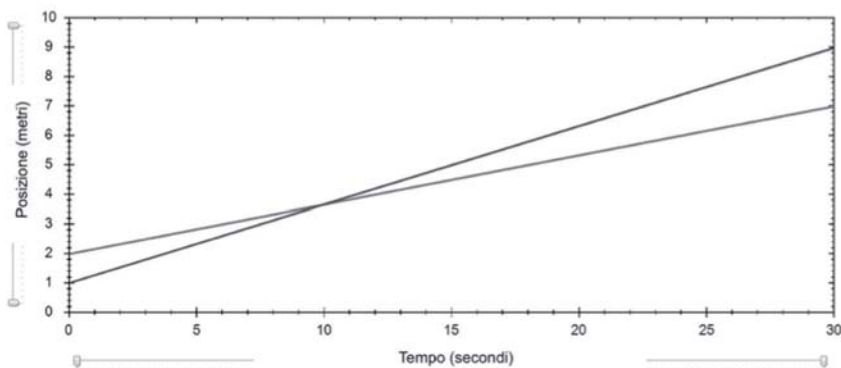
Prendiamo in particolare come riferimento una delle schede che gli studenti hanno affrontato individualmente (fig. 6).

La scheda prevedeva l'interpretazione di una coppia di grafici che si dovevano immaginare prodotti con WiiGraph da due robottini. La situazione mira a mettere in relazione l'incrocio con una configurazione di grafici rettilinei aventi pendenze entrambe positive (che implicano il "superarsi" nel movimento, situazione anch'essa di incontro, seppur meno comune rispetto al caso in cui "ci si incontra", associato generalmente a rette con pendenza di segno diverso, eventualmente opposto). Richiama molto il quesito D4 da noi discusso. È però nella verifica conclusiva, somministrata a fine sperimentazione, che abbiamo inserito un quesito con una situazione davvero simile, come andiamo a discutere nel seguito.



#### Scheda 4

1. Immagina che, con un altro esperimento, Rob e Bob ottengano queste linee rette:



Descrivi come si sono mossi, secondo te, Rob e Bob.

In questo esperimento, i due robottini si sono incontrati?

Spiega sempre i tuoi ragionamenti.

Fig. 6 – Scheda individuale proposta agli studenti durante la sperimentazione: è richiesta l'interpretazione di una coppia di grafici di posizione in funzione del tempo, funzioni lineari con un punto di intersezione

La verifica finale è stata proposta con 5 domande, così composta: (1) interpretazione di una coppia di grafici in termini dei movimenti necessari per produrla con WiiGraph; (2) quesito analizzato in questo contributo (“stile INVALSI”), del tipo MCC, con 8 item e, alla fine, la richiesta di giustificazione delle risposte contrassegnate come vere (fig. 7 e fig. 8); (3) e (4) creazione di un grafico che modella un movimento descritto a parole; (5) domanda aperta in cui si chiede di spiegare in che modo sia possibile “vedere la velocità” nei grafici posizione-tempo ed, eventualmente, proporre un esperimento e un grafico corrispondente a sostegno dell'argomentazione.

Seppur si tratta di uno studio di caso, in cui il nostro campione è formato da 27 alunni, sono possibili alcune osservazioni compatibili con quanto già discusso per la domanda D4: non si osserva alcuna omissione per la parte (i), ovvero tutti gli studenti hanno tentato di rispondere almeno a questa prima parte della domanda.

2. Considera i seguenti grafici, che rappresentano la posizione nel tempo di due treni in movimento lungo due binari paralleli.

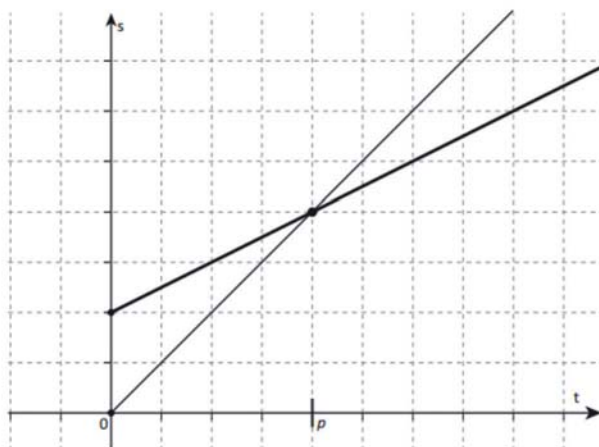


Fig. 7 – La situazione iniziale del quesito MCC della verifica di fine sperimentazione

i. Indica se le seguenti affermazioni sono vere o false, traendo le informazioni dai grafici.

- A. I due treni all'istante iniziale si trovano nella stessa posizione V  F
- B. I due treni non partono nello stesso istante V  F
- C. I due treni all'istante iniziale hanno velocità diverse V  F
- D. I due treni viaggiano uno a velocità doppia dell'altro V  F

Ora concentrati sull'istante di tempo  $p$ . Nell'istante  $p$ , i due treni:

- E. si trovano nella stessa posizione V  F
- F. hanno la stessa velocità V  F
- G. hanno percorso la stessa distanza V  F
- H. si incontrano per una sosta V  F

ii. Nel caso di risposte vere, motiva la tua risposta.

Fig. 8 – Gli 8 item del quesito MCC e la richiesta finale di giustificazione

In generale gli otto item analizzati possono essere classificati come medio-facili avendo indici di difficoltà che variano tra 0,67 (cioè  $\frac{2}{3}$  degli studenti hanno risposto correttamente) e 1 (cioè la totalità degli studenti ha fornito la risposta corretta; si veda la tab. 5).

Tab. 5 – Le risposte fornite dagli studenti per gli 8 item del quesito MCC

Risposte corrette	F	F	V	V	V	F	F	F
Studente/item	A	B	C	D	E	F	G	H
S1	F	F	F	F	V	F	V	F
S2	F	F	V	V	V	V	F	F
S3	F	F	F	V	V	F	V	F
S4	F	F	V	V	V	F	F	F
S5	F	F	V	F	V	V	F	F
S6	F	F	F	F	V	F	F	F
S7	F	F	V	V	V	F	F	F
S8	F	F	V	V	V	F	F	F
S9	F	F	F	V	V	F	F	F
S10	F	F	V	V	V	F	F	F
S11	F	F	V	V	V	F	V	F
S12	F	F	V	F	V	F	F	F
S13	F	F	V	V	V	F	F	F
S14	F	F	V	V	V	F	F	F
S15	F	F	V	V	V	F	F	F
S16	F	F	F	F	V	F	F	F
S17	V	F	F	V	V	F	F	F
S18	V	F	F	F	V	V	F	F
S19	F	F	V	V	V	F	F	F
S20	F	F	V	V	V	F	F	F
S21	F	F	V	V	V	F	F	F
S22	F	F	V	V	F	F	F	F
S23	F	F	F	F	V	F	F	F
S24	F	F	F	F	V	F	F	F
S25	F	V	V	V	V	F	F	F
S26	F	F	V	F	V	F	F	F
S27	F	F	V	V	V	F	F	F

 risposta cui è associata una giustificazione scritta

 risposte per cui è stata fornita una giustificazione discorsiva riassuntiva

Infatti, l’item H risulta il più facile (100% di risposte corrette) mentre C e D sono i due item più difficili (entrambi presentano il 66,7% di risposte corrette). Osserviamo che l’item H presenta come unica difficoltà la presenza del verbo “incontrarsi” che si riferisce alla situazione reale sperimentata in classe dagli studenti in riferimento al fatto che il punto di intersezione di due

grafici corrisponda all'istante in cui due studenti "si incontrano" appunto, ma nello spazio di interazione (l'idea della sosta è qui volutamente fuorviante). In generale, la seconda parte concernente l'istante di tempo  $p$  risulta di più facile lettura per gli studenti. Per quanto riguarda invece i punti C e D, entrambe affermazioni corrette che si riferiscono alla relazione tra le velocità dei due treni, non possiamo asserire molto sulle difficoltà incontrate da chi ha risposto non correttamente, ma possiamo invece analizzare le motivazioni prodotte da coloro che hanno risposto correttamente. La parte (ii) era infatti strettamente vincolata alla parte (i) della domanda, quindi si osservano situazioni diverse e diversificate.

Questa seconda parte è per noi quella più significativa per indagare all'interno di questa domanda aspetti di senso del grafico attraverso quelle che risultano essere le difficoltà degli studenti oppure le argomentazioni più ricche degli studenti. Ci concentriamo sulle giustificazioni prodotte per i punti C, D e G in risposta alla parte (ii) della domanda.

Abbiamo già osservato che i punti C e D sono risultati quelli di più difficile soluzione in media per gli studenti. Gli studenti che hanno risposto correttamente hanno saputo analizzare i due grafici non solo confrontando localmente la pendenza delle due rette (nell'istante iniziale, quindi a livello locale oppure a livello globale, ovvero rispetto all'andamento complessivo del grafico) riconoscendone le differenze, ma hanno in genere argomentato sulle diverse relazioni in gioco nel contesto dato.

Per esempio, lo studente S2, che risponde correttamente ai due quesiti e propone una giustificazione discorsiva complessiva delle risposte, si concentra sullo spazio percorso nello stesso intervallo di tempo e scrive: "I treni hanno velocità diverse perché quando si incontrano a  $p$ , sono giunte sullo stesso livello e B che partiva da zero sicuramente avrà fatto più strada di A che partiva da due". S3 invece, assegna sul piano cartesiano il colore verde alla retta con pendenza minore e intercetta minore e il colore blu all'altra retta e argomenta così in relazione alla risposta D: "I treni viaggiano uno a velocità doppia dell'altra, è vero perché la linea blu percorre all'inizio già due quadratini, mentre la linea verde ne percorre solo uno". Possiamo osservare come anche S3 si concentra su un confronto locale delle due pendenze della retta, ma prendendo come riferimento la griglia e non riferendosi alla situazione reale descritta nel grafico. Entrambe le argomentazioni presentano aspetti di fusione, in particolare S2 si riferisce al livello raggiunto dai due treni, che in realtà è un'altezza per le due linee, mentre S3 parla di una linea che "percorre" un quadratino, ovvero che si muove, probabilmente immaginando che le linee sul piano cartesiano si originino come accade in WiiGraph. Un altro studente, S4, giustifica la sua risposta per il punto C scrivendo che i

due treni “hanno velocità diverse perché arrivano a P insieme, ma uno in quel tempo ha percorso il doppio della distanza dell’altro”, di fatto fornendo già una giustificazione per il punto D, punto per il quale produce invece decide di confrontare lo spazio percorso dai due treni nello stesso intervallo di tempo (4 secondi). S21, infine, si concentra sulla forma globale delle due rette e scrive (in riferimento al punto C): “è vero perché le due linee sono inclinate in maniera diversa. La linea 1 [contrassegnata nel piano cartesiano, retta con pendenza maggiore] è più “ripida” della linea 2 [contrassegnata nel piano cartesiano, retta con pendenza minore]”.

Per quanto riguarda l’item G, chi ha prodotto una giustificazione per questo quesito non ha risposto correttamente, ovvero ha affermato che i due treni hanno percorso la stessa distanza. La giustificazione è in generale non corretta quindi, pur contenendo alcuni elementi interessanti. Per esempio, S11 scrive “sì perché anche se sono a velocità diverse vanno nella stessa direzione e incontrando il punto hanno percorso una stessa distanza”. L’argomentazione analizza e interpreta su molti fronti la situazione modellizzata, ovvero la differente velocità e la medesima direzione di percorrenza dei due treni. Purtroppo, non riesce però a cogliere la differenza tra le informazioni di distanza e quelle di distanza percorsa presenti sul grafico cartesiano, che pure sappiamo essere un particolare ostacolo cognitivo per gli studenti, anche di grado maggiore. S1 e S3 argomentano in modo simile, adducendo nella spiegazione all’arrivo in uno stesso punto, probabilmente anche qui confondendo il punto di intersezione fra le due linee (quindi il “raggiungere”, da parte dei due treni, una stessa distanza) e la distanza effettivamente percorsa dai due treni nel segmento temporale cui si fa (implicitamente) menzione nel testo dell’item.

Gli spunti di riflessione offerti dalla sperimentazione, in cui si sono intrecciati aspetti valutativi, osservazioni sul campo, analisi di argomentazioni, utilizzo di software specifici e attenzione ai task, alle richieste, sono stati molteplici e confermano una linea di ricerca relativa all’importanza di una “Matematica in movimento” (Ferrara, Ferrari e Savioli, 2019). La metodologia adottata, la decodifica delle argomentazioni e delle discussioni matematiche, l’attenzione ai “nodi fondamentali” relativi alla comprensione di grafici di movimento, anche messi in luce dalla lente valutativa, ci hanno permesso di comprendere più in profondità quanto sia importante lavorare ad ampio spettro per la costruzione di competenze sul senso del grafico, coinvolgendo anche il corpo tutto in modo da mettere in movimento i processi di pensiero in Matematica, in contesti di insegnamento e apprendimento della disciplina che si possano rivelare ricchi, seppur complessi. Le idee di movimento, di flusso e di temporalità sono oggi sempre più ritenute cruciali per una consi-

derazione profonda di quello che è pensiero matematico e di ciò che caratterizza la pratica matematica nella sua essenza, intensità e creazione assieme (Roth, 2015).

## Riferimenti bibliografici

- Arzarello F., Ferrara F., Robutti O. (2012), “Mathematical modelling with technology: the role of dynamic representations”, *Teaching Mathematics and its Applications*, 31, 1, pp. 20-30.
- Bright G.W., Friel S.N. (1998), “Graphical representations: Helping students interpret data”, in S.P. Lajoie (ed.), *Reflections on statistics: Learning, teaching, and assessment in grades K-12*, Lawrence Erlbaum, Mahwah, pp. 63-88.
- Curcio F.R. (1981), *The effect of prior knowledge, reading and mathematics achievement, and sex on comprehending mathematical relationships expressed in graphs (Final Report)*, St. Francis College, Brooklyn.
- Curcio F.R. (1987), “Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 5, pp. 382-393.
- DiSessa A., Hammer D., Sherin B., Kolpakowski T. (1991), “Inventing graphing: Meta-representational expertise in children”, *Journal of Mathematical Behavior*, 10, pp. 117-160.
- Dubinsky E., Wilson R.T. (2013), “High school students’ understanding of the function concept”, *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 1, pp. 83-101.
- Ferrara F., Ferrari G. (2016), “La matematica del tempo e del movimento: funzioni, modelli matematici e la Wii”, *Nuova Secondaria*, XXXIII, 6, pp. 64-67.
- Ferrara F., Savioli K. (2009), “Why could not a vertical line appear? Imagining to stop time”, in M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, H. Sakonidis (eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 3*, Aristotle University of Thessaloniki & University of Macedonia, Thessaloniki, pp. 33-40.
- Ferrara F., Pratt D., Robutti O. (2006), “The Role and Uses of Technologies for the Teaching of Algebra and Calculus”, in A. Gutierrez, P. Boero (eds.), *Handbook on Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future*, Sense Publishers, Rotterdam/Tapei, pp. 237-273.
- Ferrara F., Ferrari G., Savioli K. (2019), “Matematica in Movimento: radici, sviluppi e implicazioni di un approccio grafico al concetto di funzione tramite i sensori”, *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 42A, 1, pp. 29-60.
- Friel S.N., Curcio F.R., Bright G.W. (2001), “Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 32, 2, pp. 124-158.
- Gal I. (1998), “Assessing statistical knowledge as it relates to students’ interpretation of data”, in S.P. Lajoie (ed.), *Reflections on statistics: Learning, teaching, and assessment in grades K-12*, Lawrence Erlbaum, Mahwah pp. 275-295.

- INVALSI (2017a), *Quadro di riferimento delle prove di matematica del sistema nazionale di valutazione*, testo disponibile al sito: [http://www.invalsi.it/invalsi/doc\\_evidenza/2017/QdR2017\\_190417.pdf](http://www.invalsi.it/invalsi/doc_evidenza/2017/QdR2017_190417.pdf), data di consultazione 26/1/2021.
- INVALSI (2017b), *Guida alla lettura prova di matematica classe seconda – scuola secondaria di II grado, servizio nazionale di valutazione a.s. 2016/17*, testo disponibile al sito: <https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/2017-GUIDA-L10.pdf>, data di consultazione 26/1/2021.
- Kelton M.L., Ma J.Y. (2018), “Reconfiguring mathematical settings and activity through multi-party, whole-body collaboration”, *Educational Studies in Mathematics*, 98, 2, pp. 177-196.
- Kosslyn S.M. (1985), “Graphics and human information processing: A review of five books”, *Journal of the American Statistical Association*, 80, 391, pp. 499-512.
- Kosslyn S.M. (1994), *Elements of graph design*, W.H. Freeman, New York.
- Nemirovsky R., Tierney C., Wright T. (1998), “Body motion and graphing”, *Cognition and Instruction*, 16, 2, pp. 119-172.
- Nemirovsky R., Kelton M.L., Rhodehamel B. (2013), “Playing mathematical instruments: Emerging perceptuomotor integration with an interactive mathematics exhibit”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 44, 2, pp. 372-415.
- Radford L. (2009), “Signifying relative motion: Time, space and the semiotics of Cartesian graphs”, in W.M. Roth (ed.), *Mathematical Representations at the Interface of the Body and Culture*, Information Age Publishers, Charlotte, pp. 45-69.
- Roth W.M. (2015), “Excess of graphical thinking: Movement, mathematics and flow”, *For the Learning of Mathematics*, 35, 1, pp. 2-7.
- Yerushalmy M. (2006), “Slower algebra students met faster tools: Solving algebra word problems with graphing software”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 37, 5, pp. 356-387.
- Zawojewski J.S., Heckman D.J. (1997), “What do students know about data analysis, statistics, and probability?”, in P.A. Kenney, E.A. Silver (eds.), *Results from the sixth mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, pp. 195-223.

## *4. L'uso dei dati INVALSI nell'insegnamento della statistica bivariata*

di Enrico Pietropoli, Patrizia Sommi

A partire dai dati INVALSI restituiti alle scuole, vengono proposte attività per l'insegnamento di alcuni argomenti relativi alla statistica bivariata in classi di secondo biennio di scuola secondaria di secondo grado: tabelle a doppia entrata, diagrammi a dispersione, dipendenza e indipendenza tra caratteri, funzione interpolante lineare, regressione lineare e correlazione. Partendo dall'analisi delle tabelle riportanti la numerosità degli studenti per livello di apprendimento in Italiano e in Matematica, si introduce il metodo del chi-quadro per lo studio della dipendenza delle prestazioni degli studenti nelle due discipline. Successivamente, dall'analisi dei grafici riportanti i voti di classe medi e i punteggi medi nelle prove INVALSI, si giunge all'individuazione delle relative rette di regressione e al calcolo del coefficiente di correlazione.

La metodologia didattica proposta offre il vantaggio dell'uso di una grande quantità di dati reali cui poter applicare le tecniche di lettura, di interpretazione e di calcolo apprese; inoltre, i caratteri statistici a cui applicare le tecniche studiate sono molto vicini alla vita reale degli studenti, stimolando il loro coinvolgimento rispetto a temi riguardanti la vita scolastica. Conseguentemente, si sviluppa un maggiore senso civico degli studenti favorendo la formazione di cittadini attivi e consapevoli. Si determina inoltre una maggiore penetrazione dei risultati INVALSI all'interno della comunità scolastica.

*Using INVALSI outcomes, some activities for teaching topics about bivariate statistic in third or fourth years' classes of secondary school are presented: joined distributions, two-entry tables, scatter diagrams, dependence and independence among characters, linear interpolating function, linear regression, correlation. Starting from the analysis of the tables concerning*



*the amount of students in each learning level, both in Italian and Maths, the chi-square method in the study of dependence or independence of the students' performances in both subjects is introduced. Subsequently, from the analysis of the diagrams concerning the average school assessment and the average scores in the Italian and Maths INVALSI tests, the related regression lines and the calculus of the correlation coefficient are determined.*

*The proposed teaching methodology has the potentiality of using a great amount of real data to which it is possible to apply the learned techniques of reading, interpretation and calculation; in addition, there is an utmost relationship between the statistical characters to which the studied methodologies are applied and the students' real life, stimulating their engagement in topics about school life. Consequently, a greater civic sense is developed, helping the growth of active and aware citizens. Furthermore, a greater grasp of INVALSI outcomes inside the school community is obtained.*

## **1. Introduzione**

È possibile utilizzare i dati INVALSI all'interno della didattica?

Consideriamo i seguenti dati di fatto: a) la Statistica bivariata rientra nei curricula delle scuole secondarie di secondo grado; b) i dati INVALSI vengono restituiti alle scuole.

Esaminiamo questi due aspetti.

a) La Statistica bivariata rientra nei *curricula*. Infatti, il DM n. 211 del 7/10/2010 – Indicazioni nazionali per i licei (MIUR, 2010), relativamente alla Matematica, riporta negli obiettivi specifici di apprendimento del secondo biennio, nell'ambito Dati e previsioni, «saprà far uso delle distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione». Anche le direttive n. 4 e n. 5 del 16/1/2012, “Adozione delle Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento degli istituti tecnici” (MIUR, 2012a) e “Adozione delle Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento degli istituti professionali” (MIUR, 2012b) prevedono per tutti i settori degli istituti tecnici e per tutti i settori degli istituti professionali, relativamente alla Matematica, che lo studente apprenda i concetti di dipendenza, regressione e correlazione nel secondo biennio di studi. Anche nel piano m@t.abel dell'INDIRE che, ispirandosi al modello costruttivista dell'apprendimento, ha come principale implicazione la necessità di coinvolgere l'allievo nel processo di costruzione della conoscenza attraverso attività significative dal punto di vista matematico,

sono inserite due attività: «Cosa dicono... le rette» e «Sono tanti, giovani e bravi... saran poi promossi?», riguardanti la regressione, le distribuzioni statistiche rispetto a due caratteri, il confronto fra distribuzioni condizionate e marginali (INDIRE, 2013).

b) I dati INVALSI vengono restituiti a tutte le scuole di ogni ordine e grado. In particolare in questo lavoro ci interessa la restituzione alle scuole secondarie di secondo grado che se ne possono servire per un'autovalutazione e la stesura di un conseguente piano di miglioramento. Esiste un percorso che colleghi i due aspetti a) e b) in modo tale che ognuno dei due venga valorizzato?

I dati INVALSI costituiscono una miniera a cui poter attingere, in particolare per quanto riguarda le distribuzioni doppie, e servirsene per l'insegnamento dei concetti di dipendenza, di correlazione e di regressione.

Nelle prossime pagine presentiamo un possibile uso dei dati INVALSI nell'insegnamento della Statistica bivariata, descrivendo delle attività da realizzare in classe, discutendo i risultati che dagli stessi dati possono essere estrapolati ed esponendo considerazioni sull'efficacia di una tale attività. I dati utilizzati sono quelli relativi agli istituti di insegnamento degli autori: i licei "Eugenio Montale" e "Primo Levi" di Roma.

Ci siamo serviti dei dati delle prove svoltesi a maggio 2017 ma, ipotizzando di proporre l'attività in futuro, si potranno utilizzare ogni anno i dati delle prove che gli studenti avranno svolto nel mese di maggio dell'anno scolastico appena concluso.

## 2. Attività in classe

L'attività che descriviamo è proponibile in un terzo anno di scuola secondaria di secondo grado, prevedendo che durante il primo biennio gli studenti abbiano affrontato lo studio della Statistica descrittiva e sappiano utilizzare il foglio elettronico (introduzione di dati e formule, gestione di tabelle e grafici).

Le classi alle quali si propone quest'attività hanno affrontato l'anno precedente la prova INVALSI. Si pongono alle classi due quesiti:

- 1) i livelli di apprendimento nelle prove di Italiano e Matematica INVALSI sono collegati? (*Dipendenza* nelle prove INVALSI tra prestazione in Matematica e in Italiano);
- 2) esiste una relazione tra voto scolastico e punteggio nella prova INVALSI? (*Correlazione* tra voto medio delle classi in Matematica/Italiano e punteggio medio delle classi nelle prove INVALSI di Matematica/Italiano).

L'attività che descriviamo si pone l'obiettivo di dare una risposta matematica ai precedenti quesiti con lo strumento della Statistica.

## 2.1. Dipendenza

Il primo concetto con cui gli studenti devono familiarizzare è quello di tabella a doppia entrata per distribuzioni statistiche congiunte: tramite esempi, presi eventualmente anche dai libri di testo, devono essere in grado di leggere tali tabelle. A questo punto come esempio più significativo si possono utilizzare le tabelle riportanti le numerosità degli studenti del proprio istituto distribuiti per livelli di apprendimento<sup>1</sup> nelle due discipline Matematica e Italiano relative a un anno scolastico precedente (2016). Tali tabelle rientrano nell'insieme di dati che INVALSI restituisce alle scuole, relativamente alle prove sostenute dagli studenti di grado 10 (secondo anno di scuola secondaria di secondo grado). Quelle che seguono sono le due tabelle rispettivamente per il liceo "Montale" e per il liceo "Levi".

*Tab. 1 – Distribuzione degli studenti per categorie (livelli) di apprendimento – Italiano/Matematica – numerosità – "Montale"*

		<i>Prova di Matematica</i>		
		<i>Numero studenti livello 1-2</i>	<i>Numero studenti livello 3</i>	<i>Numero studenti livello 4-5</i>
Prova di Italiano	Numero studenti livello 1-2	39	0	0
	Numero studenti livello 3	17	1	0
	Numero studenti livello 4-5	8	3	2

Fonte: INVALSI (2016)

<sup>1</sup> Fino al 2018 INVALSI utilizzava il termine "livello" per identificare una categoria definita attraverso i percentili. Successivamente, con l'introduzione delle prove CBT, con "livello" ci si riferisce alla misura con la quale uno studente è in grado di applicare le competenze, le conoscenze e le abilità apprese durante il suo percorso scolastico. Dal 2018 INVALSI fornisce, oltre a una descrizione sintetica per ciascuna delle discipline oggetto della rilevazione, anche una descrizione analitica di ciascun livello, declinata secondo gli ambiti o parti della prova dei quadri di riferimento per le prove (Desimoni, 2018) (INVALSI, 2019a, 2019b).

Tab. 2 – Distribuzione degli studenti per categorie (livelli) di apprendimento – Italiano/Matematica – numerosità – “Levi”

		Prova di Matematica		
		Numero studenti livello 1-2	Numero studenti livello 3	Numero studenti livello 4-5
Prova di Italiano	Numero studenti livello 1-2	24	8	6
	Numero studenti livello 3	9	8	18
	Numero studenti livello 4-5	5	6	23

Fonte: INVALSI (2016)

Si possono sfruttare tali tabelle come spunto per mostrare rappresentazioni grafiche (stereogrammi) di distribuzioni doppie. Utilizzando il foglio elettronico è dunque possibile realizzare i grafici riportati nelle figure seguenti:

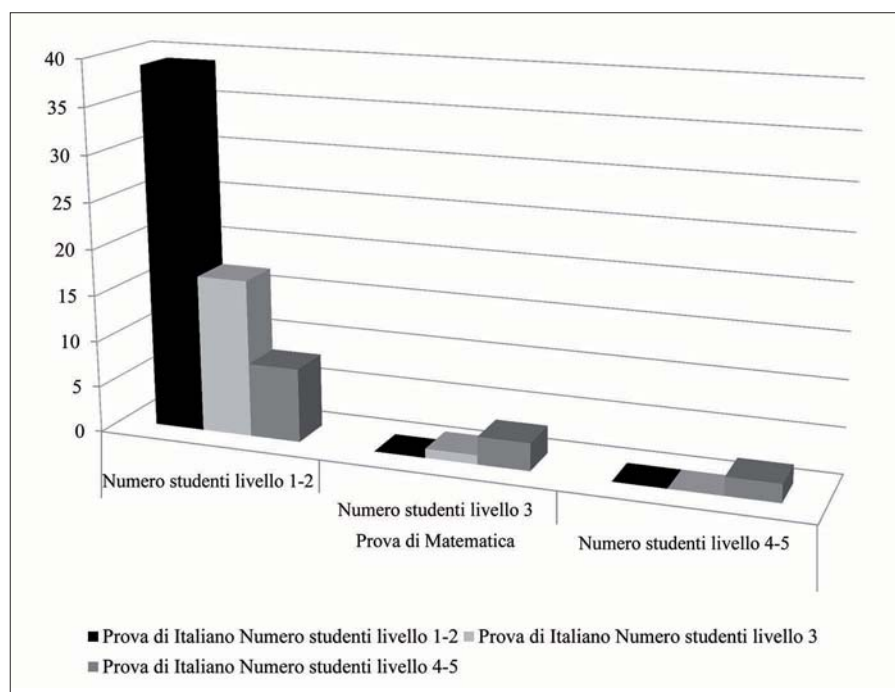


Fig. 1 – Distribuzione degli studenti per categorie (livelli) di apprendimento – Italiano/Matematica – numerosità – “Montale”

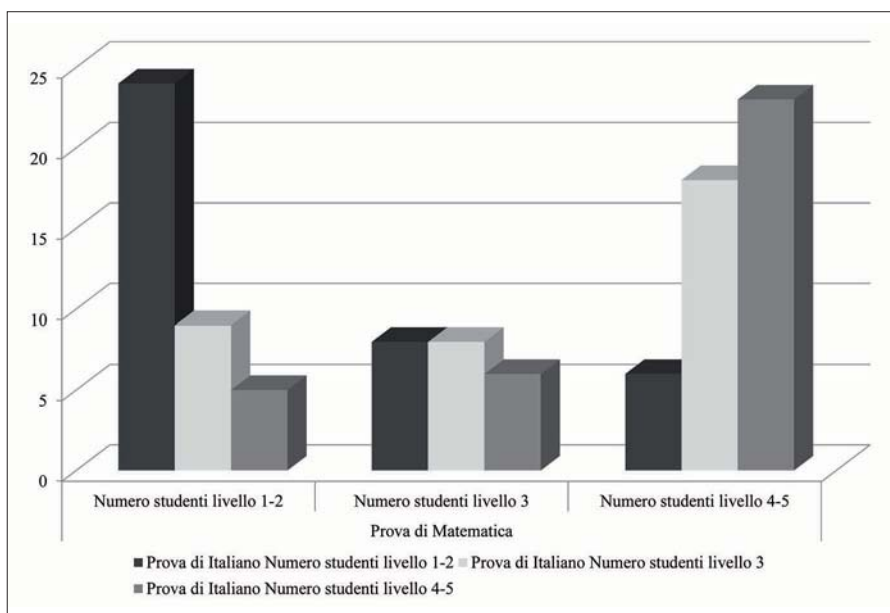


Fig. 2 – Distribuzione degli studenti per categorie (livelli) di apprendimento – Italiano/Matematica – numerosità – “Levi”

A questo punto introduciamo i concetti di distribuzione condizionata e di distribuzione marginale. Queste ultime le possiamo costruire dalle tabelle 1 e 2 rispettivamente per il liceo “Montale” e il liceo “Levi”. Mostreremo ora il procedimento seguito con la costruzione delle relative tabelle, unicamente per il liceo “Levi”.

Tab. 3 – Distribuzioni marginali – “Levi”

		Prova di Matematica			Totale
		Numero studenti livello 1-2	Numero studenti livello 3	Numero studenti livello 4-5	
Prova di Italiano	Numero studenti livello 1-2	24	8	6	38
	Numero studenti livello 3	9	8	18	35
	Numero studenti livello 4-5	5	6	23	34
Totale		38	22	47	107

La tabella 3 è ottenuta facilmente dalla tabella 2 aggiungendo a questa una riga e una colonna riportanti le somme rispettivamente per colonna e per riga.

Si passa successivamente a parlare di dipendenza o indipendenza tra i due caratteri rappresentati in tabella, attraverso il modello di assoluta indipendenza e il test del chi-quadro.

In classe, sempre con le tabelle relative per esempio al 2016, viene esaminata e descritta la tabella (teorica) dell'assoluta indipendenza, corrispondente all'ipotesi nulla (in cui ogni frequenza congiunta si ottiene moltiplicando il totale della sua riga per il totale della sua colonna e dividendo poi il prodotto per il totale delle osservazioni). A titolo di esempio, il contenuto della prima cella numerica si ottiene da:

$$\frac{38 \times 38}{107} = 13,50$$

Tab. 4 – Tabella di assoluta indipendenza – “Levi”

		<i>Prova di Matematica</i>			<i>Totale</i>
		<i>Numero studenti livello 1-2</i>	<i>Numero studenti livello 3</i>	<i>Numero studenti livello 4-5</i>	
Prova di Italiano	Numero studenti livello 1-2	13,50	7,81	16,69	38
	Numero studenti livello 3	12,43	7,20	15,37	35
	Numero studenti livello 4-5	12,07	6,99	14,93	34
	Totale	38,00	22,00	47,00	107

Si passa alla tabella delle contingenze (differenza tra frequenza assoluta rilevata e corrispondente frequenza assoluta teorica). A titolo di esempio, il contenuto della prima cella è così ottenuto:  $24 - 13,50 = 10,50$ .

Tab. 5 – Tabella delle contingenze – “Levi”

		Prova di Matematica		
		Numero studenti livello 1-2	Numero studenti livello 3	Numero studenti livello 4-5
Prova di Italiano	Numero studenti livello 1-2	10,50	0,19	-10,69
	Numero studenti livello 3	-3,43	0,80	2,63
	Numero studenti livello 4-5	-7,07	-0,99	8,07

Questa parte si conclude illustrando come calcolare l'indice chi-quadro  $\chi^2$  (somma dei rapporti tra il quadrato di ogni contingenza e la relativa frequenza teorica) e il chi-quadro normalizzato  $C$  (o indice di contingenza di Cramér), non dipendente dal numero delle osservazioni. Tali scelte sono suggerite, con eventuali denominazioni differenti, da più libri di testo, quali, per esempio Bergamini, Barozzi e Trifone (2016) o Maraschini e Palma (2002).

Si ottiene, per il liceo “Levi”:

$$- \chi^2 = 10,50^2/13,50 + 0,19^2/7,81 + (-10,69)^2/16,69 + (-3,43)^2/12,43 + \dots = 25,16;$$

$$- C = \chi^2/(N(h-1)) = 25,16/(107 \cdot 2) = 0,12,$$

dove  $N$  è il totale delle osservazioni (numero di studenti) e  $h$  il valore minimo tra il numero di righe e il numero di colonne.

Per completezza riportiamo i valori che si ottengono per il liceo “Montale”:  $\chi^2 = 19,46$ ,  $C = 0,14$ .

La costruzione delle tabelle di assoluta indipendenza conduce contestualmente a questioni sugli arrotondamenti. Se, per esempio, si decidesse di costruire tabelle con solo numeri interi, i risultati varierebbero.

Si osservi come, per entrambe le scuole, gli indici normalizzati siano estremamente piccoli, in modo da significare una sostanziale *indipendenza tra i livelli di apprendimento degli studenti in Italiano e in Matematica*. Questa stessa osservazione riportata in classe permette già di rispondere alla prima delle domande poste agli studenti all'inizio dell'attività.

Terminata la descrizione del metodo del chi-quadro, è il momento di fornire agli studenti le tabelle riguardanti gli stessi studenti. Inizia quindi l'attività affidata agli alunni. Riportiamo di seguito le tabelle su cui essi lavoreranno.

Tab. 6 – Distribuzione degli studenti per categorie (livelli) di apprendimento – Italiano/Matematica – numerosità – “Montale”

		Prova di Matematica		
		Numero studenti livello 1-2	Numero studenti livello 3	Numero studenti livello 4-5
Prova di Italiano	Numero studenti livello 1-2	82	2	4
	Numero studenti livello 3	53	10	8
	Numero studenti livello 4-5	35	20	33

Fonte: INVALSI (2017)

Tab. 7 – Distribuzione degli studenti per categorie (livelli) di apprendimento – Italiano/Matematica – numerosità – “Levi”

		Prova di Matematica		
		Numero studenti livello 1-2	Numero studenti livello 3	Numero studenti livello 4-5
Prova di Italiano	Numero studenti livello 1-2	39	18	29
	Numero studenti livello 3	11	12	20
	Numero studenti livello 4-5	5	7	18

Fonte: INVALSI (2017)

Agli studenti si richiede di compiere gli stessi passi descritti in precedenza, servendosi eventualmente di un foglio elettronico, per completare l’analisi della dipendenza mediante il test del chi-quadro.

Qui ci limitiamo a fornire i risultati finali per i due istituti:

- liceo “Montale”:  $N = 247$ ,  $\chi^2 = 61,91$ ,  $C = 0,13$ ;
- liceo “Levi”:  $N = 159$ ,  $\chi^2 = 11,18$ ,  $C = 0,04$ .

Come si può osservare, le conclusioni sono sostanzialmente le stesse formulate per l’anno 2016.

## 2.2. Regressione e correlazione

Agli studenti vengono innanzitutto presentate rappresentazioni grafiche di due caratteri quantitativi. Le coppie di dati possono essere infatti riportate



in un piano cartesiano ottenendo il diagramma di dispersione o nuvola di punti.

Ci si può servire, ancora una volta, dei dati restituiti da INVALSI relativi a un anno scolastico precedente: utilizziamo come diagramma di dispersione quello riportante il confronto tra voto di classe (X) e punteggio nella prova INVALSI (Y); come esempio, prendiamo i dati del 2016 delle due scuole relativamente alla Matematica. Si osservi che per ricavare i dati numerici necessari per introdurre successivamente i concetti di regressione e di correlazione è necessario passare con il mouse sopra i singoli punti del grafico, come mostrato nelle figure 3 e 4.

Passando il mouse sui punti, si ricavano i dati per le tabelle successive.

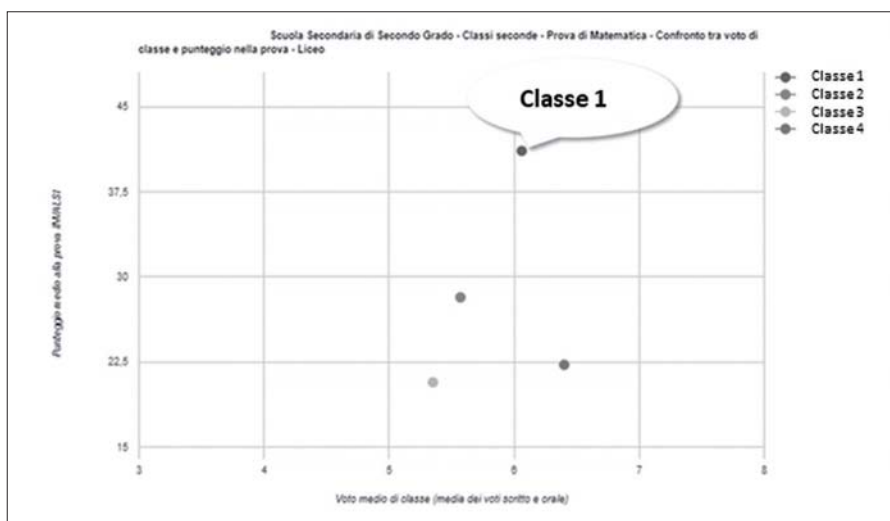


Fig. 3 – Prova di Matematica – Confronto tra risultato di classe e punteggio nella prova – “Montale”

Fonte: INVALSI (2016)

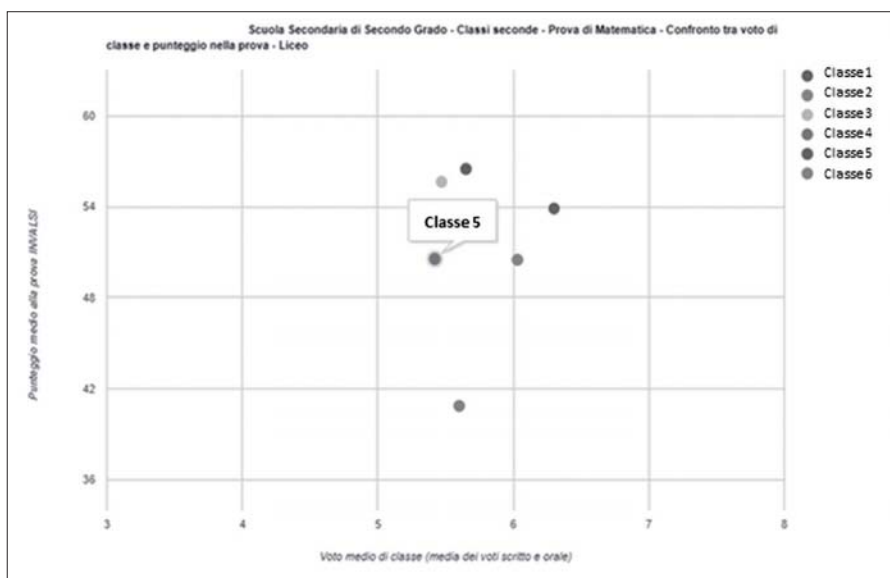


Fig. 4 – Prova di Matematica – Confronto tra risultato di classe e punteggio nella prova – “Levi”

Fonte: INVALSI (2016)

Tab. 8 – Prova di Matematica 2016 – Confronto tra risultato di classe e punteggio nella prova – “Montale”

$x = \text{voto di classe}$	$y = \text{punteggio INVALSI}$
5,35	20,71
5,57	28,20
6,40	22,25
6,06	41,11

Tab. 9 – Prova di Matematica 2016 – Confronto tra risultato di classe e punteggio nella prova – “Levi”

$x = \text{voto di classe}$	$y = \text{punteggio INVALSI}$
5,47	55,65
5,65	56,50
5,42	50,55
5,60	40,87
6,03	50,49
6,30	53,88

Dopo aver introdotto il concetto di funzione interpolante lineare (con il metodo dei minimi quadrati) che permette di rappresentare il legame tra i due caratteri, si determinano le seguenti rette di regressione:

a)  $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$ ;

b)  $x - \bar{x} = b(y - \bar{y})$ ,

dove  $a$  è il coefficiente di regressione di  $y$  su  $x$  ottenuto con il metodo dei minimi quadrati ovvero:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

essendo  $(\bar{x}, \bar{y})$  il baricentro della distribuzione, dove  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  sono le medie che le variabili  $X$  e  $Y$  assumono.

Analogamente  $b$  è il coefficiente di regressione di  $x$  su  $y$  ottenuto così:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

Il calcolo dei due coefficienti di regressione può essere fatto con l'aiuto del foglio elettronico, completando le tabelle dei dati con colonne e righe come segue (ci limitiamo a mostrare la tabella per il liceo “Montale”).

*Tab. 10 – Prova di Matematica 2016 – Confronto tra risultato di classe e punteggio nella prova – “Montale” – Tabella per il calcolo dei coefficienti di regressione*

$x$	$y$	$x' = x - \bar{x}$	$y' = y - \bar{y}$	$x'y'$	$(x')^2$	$(y')^2$
5,35	20,71	-0,495	-7,3575	3,64191625	0,245025	54,13280625
5,37	28,2	-0,275	0,1325	-0,0364375	0,075625	0,01755625
6,40	22,25	0,555	-5,8175	-3,2287125	0,308025	33,84330625
6,06	41,11	0,215	13,0425	2,8041375	0,046225	170,1068063
$\Sigma$	23,38	112,27		3,18095	0,6749	258,100475
$\bar{x} = 5,845$ $\bar{y} = 28,0675$				$\sigma_{xy} = 0,7952375$	$\sigma_x^2 = 0,168725$	$\sigma_y^2 = 64,52511875$

Le due medie in prima e seconda colonna della tabella 10 contengono le coordinate del baricentro della distribuzione; per il calcolo dei valori dei coefficienti  $a$  e  $b$  si utilizzano le somme che si trovano nella quinta, sesta e settima colonna. I valori dei coefficienti  $a$  e  $b$  per i due istituti sono i seguenti:

- liceo “Montale”:  $a = 4,713217$ ;  $b = 0,012324$ ;
- liceo “Levi”:  $a = 2,109566$ ;  $b = 0,007791$ .

È quindi possibile scrivere le equazioni delle due rette di regressione.

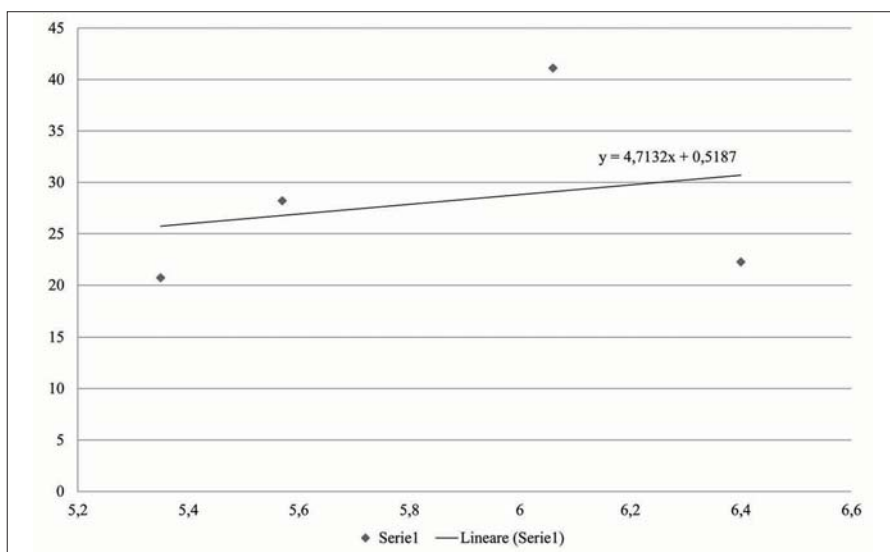


Fig. 5 – Prova di Matematica 2016 – Confronto tra risultato di classe e punteggio nella prova – “Montale” – Grafico a dispersione con retta interpolante dei minimi quadrati

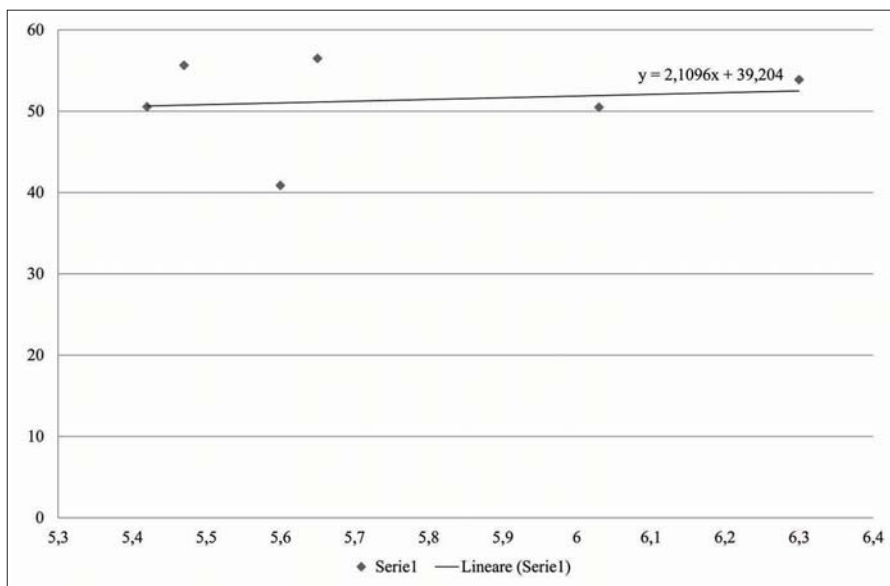


Fig. 6 – Prova di Matematica 2016 – Confronto tra risultato di classe e punteggio nella prova – “Levi” – Grafico a dispersione con retta interpolante dei minimi quadrati

È da evidenziare che le medie indicate nelle colonne sesta e settima indicano rispettivamente le due varianze delle distribuzioni  $X$  e  $Y$ , denotate con  $\sigma_x^2$  e  $\sigma_y^2$ .

Occupiamoci ora di stabilire se fra le due variabili  $X$  e  $Y$  esista un legame e, in caso affermativo, di esprimerlo con un numero che misuri quanto e come una variabile dipende dall'altra. Per introdurre il concetto di correlazione si può preliminarmente definire la covarianza di  $X$  e di  $Y$   $\sigma_{xy}$  e osservare che corrisponde alla media della quinta colonna della tabella 10. Si possono utilizzare inoltre le stesse tabelle per definire e calcolare il coefficiente di Bravais-Pearson  $r$ .

Il calcolo di  $r$  può essere effettuato equivalentemente come rapporto tra la covarianza e il prodotto delle due deviazioni standard  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ , o come radice quadrata del prodotto dei due coefficienti di regressione, dove verrà assunto il segno positivo o negativo a seconda che i due coefficienti siano rispettivamente positivi o negativi.

Si fa notare agli studenti che il foglio elettronico consente automaticamente la costruzione del grafico a dispersione dalla tabella dei punti inserendo in questo la retta interpolante dei minimi quadrati, con il coefficiente di regressione di  $Y$  su  $X$ , mostrando l'equazione della retta stessa. Inoltre, anche la varianza e la covarianza sono funzioni statistiche predefinite del foglio elettronico e quindi possono essere calcolate direttamente. Infine, il foglio elettronico prevede anche il calcolo del coefficiente  $r$ , direttamente dalla tabella dei dati.

È quindi sufficiente inserire nel foglio elettronico le sole due colonne di dati (tabelle 8 e 9) e sfruttare le funzioni predefinite.

Vengono definiti i concetti di correlazione lineare diretta (o positiva) se  $0 < r < 1$  e inversa (o negativa) se  $-1 < r < 0$ ; infine si definisce la correlazione lineare perfetta diretta se  $r = 1$ , perfetta inversa se  $r = -1$  e assenza di correlazione lineare se  $r = 0$ .

Relativamente agli esempi presentati, si ricava:

- 2016 – liceo “Montale”: Matematica  $r = -0,27768$
- 2016 – liceo “Levi”: Matematica  $r = -0,34021$ .

In entrambi i casi, dunque, siamo alla presenza di una debole correlazione *inversa*. Questa stessa osservazione riportata in classe permette di rispondere alla seconda delle domande poste agli studenti all'inizio dell'attività.

Analogamente a quanto descritto in 2.1, si forniscono agli studenti le tabelle riguardanti gli studenti stessi sia per l'Italiano sia per la Matematica. Ancora una volta, ci serviamo dei dati relativi alle prove svoltesi a maggio 2017. Si ha in questa fase la possibilità di evidenziare la coppia di valori (voto di classe e punteggio INVALSI) relativa alla classe stessa in cui si sta svolgendo l'attività qui proposta.

Non riportiamo le tabelle, ma ci limitiamo a riportare i coefficienti di Bravais-Pearson che si ottengono per entrambe le scuole:

- 2017 – liceo “Montale”: Italiano  $r = 0,63$  Matematica  $r = 0,57$ ;
- 2017 – liceo “Levi”: Italiano  $r = 0,31$  Matematica  $r = 0,49$ .

Nel 2017, dunque, osserviamo una debole correlazione diretta in entrambi i licei.

### 3. Conclusioni

Con quest’attività riteniamo di aver mostrato una possibile strada per rispondere affermativamente al problema iniziale. Abbiamo infatti descritto un modo per insegnare la Statistica bivariata tramite l’uso dei dati INVALSI.

Rispetto ai quesiti posti all’inizio delle attività nelle classi, si è cercato di fornire, tramite la Statistica, degli strumenti oggettivi per dare una risposta.

L’uso dei dati INVALSI ha permesso di partire da un’esperienza vissuta in prima persona dagli studenti per risolvere un problema reale.

Così facendo si cerca di far rientrare i risultati delle prove INVALSI nel vissuto quotidiano della didattica in modo che gli studenti non si sentano solo oggetti di un’indagine statistica ma si riappropriano del risultato di tale indagine per proseguire il percorso di studi. Contestualmente, si tenta di avvicinare le attività INVALSI agli studenti, rendendoli partecipi del lavoro che viene svolto e delle motivazioni dello stesso. Una maggiore partecipazione e condivisione di scopi e finalità dell’indagine dovrebbe favorirne il positivo accoglimento, determinando maggiori consapevolezza e coinvolgimento. Il senso civico degli studenti dovrebbe uscire accresciuto dall’attività, contribuendo alla formazione di cittadini attivi e consapevoli.

Inoltre, quest’attività permette una maggiore diffusione dei dati INVALSI all’interno della comunità scolastica. Infatti, è vero che il presidente del Consiglio di Istituto può accedere alla tabella della distribuzione degli studenti per livello di apprendimento, ma difficilmente coinvolgerà gli studenti e si metterà a studiare la dipendenza o meno fra il conseguimento dei risultati in Matematica e quelli in Italiano.

Nel corso dell’attività gli studenti entrano in contatto con concetti e strumenti matematici quali: tabelle a doppia entrata, stereogrammi, frequenze marginali, condizionate, teoriche, indici  $\chi^2$  e  $C$ , grafici a dispersione, rette di regressione e coefficiente di correlazione.

## Riferimenti bibliografici

- Bergamini M., Barozzi G., Trifone A. (2016), *Manuale blu 2.0 di matematica*, Zanichelli, Bologna, 2<sup>a</sup> ed.
- Desimoni M. (2018), *I livelli per la descrizione degli esiti delle prove INVALSI*, testo disponibile al sito: [https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2018/Livelli\\_INVALSI\\_g8.pdf](https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2018/Livelli_INVALSI_g8.pdf), data di consultazione 26/1/2021.
- INDIRE (2013), *Risorse per docenti – Progetto M@t.abel*, testo disponibile al sito <http://www.scuolavalore.indire.it/superguida/matabel/>, data di consultazione 26/1/2021.
- INVALSI (2019a), *I livelli INVALSI in Italiano – Il secondaria di secondo grado – Descrizione analitica*, testo disponibile al sito: [https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2019/ITA\\_Descrizione\\_analiticalivelli\\_2019\\_G10.pdf](https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2019/ITA_Descrizione_analiticalivelli_2019_G10.pdf), data di consultazione 26/1/2021.
- INVALSI (2019b), *I livelli INVALSI in Matematica – Il secondaria di secondo grado – Descrizione analitica*, testo disponibile al sito: [https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2019/MAT\\_Descrizione\\_analiticalivelli\\_2019\\_G10.pdf](https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2019/MAT_Descrizione_analiticalivelli_2019_G10.pdf), data di consultazione 26/1/2021.
- Maraschini W., Palma M. (2002), *Multiformat, moduli per la formazione matematica nella scuola superiore*, vol. 24, Paravia, Torino.
- MIUR (2010), *Indicazioni nazionali per i licei*, testo disponibile al sito: [http://www.indire.it/lucabas/lkmw\\_file/licei2010/indicazioni\\_nuovo\\_impaginato/\\_decreto\\_indicazioni\\_nazionali.pdf](http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf), data di consultazione 26/1/2021.
- MIUR (2012a), *Adozione delle Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento degli istituti tecnici*, testo disponibile al sito: [http://www.indire.it/lucabas/lkmw\\_file/nuovi\\_tecnici/INDIC/\\_LINEE\\_GUIDA\\_TECNICI\\_.pdf](http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_tecnici/INDIC/_LINEE_GUIDA_TECNICI_.pdf), data di consultazione 26/1/2021.
- MIUR (2012b), *Adozione delle Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento degli istituti professionali*, testo disponibile al sito: [http://www.indire.it/lucabas/lkmw\\_file/nuovi\\_professionali/linee\\_guida/\\_LINEE%20GUIDA%20ISTITUTTI%20%20PROFESSIONALI\\_.pdf](http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_professionali/linee_guida/_LINEE%20GUIDA%20ISTITUTTI%20%20PROFESSIONALI_.pdf), data di consultazione 26/1/2021.

## 5. *Orientamento attraverso peer education a partire da item INVALSI con il supporto di GeoGebra*

di Claudia Testa, Ada Sargenti, Stefania Comerci

L'esperienza oggetto della comunicazione abbina due aspetti che sono stati analizzati tra le attività del “Laboratorio di riflessione didattica sull'insegnamento della Matematica”: quello dell'analisi di item INVALSI e quello appunto della *peer education* che ha avuto una significativa e importante ricaduta nell'attivare una rete di collaborazione tra docenti di scuola secondaria di primo e secondo grado nel territorio.

Gli item INVALSI sono stati infatti per i docenti l'occasione per esplicitare, analizzare e condividere ostacoli, errori e misconcezioni degli studenti che si sedimentano nel corso degli anni e impediscono una corretta acquisizione dei concetti da apprendere successivamente.

*The experience, the object of this communication, combines two aspects that have been analyzed during the activities of the “Laboratory of didactic reflections for the teaching of Mathematics”: one is the analysis of INVALSI items and the other is peer education which had a significant and important impact on activating a network of collaboration between secondary school teachers in the territory.*

*In fact, the INVALSI items were an opportunity for teachers to explain, analyze and share the obstacles, errors and misconceptions which have taken root in students over the years and which impede the correct acquisition of the concepts to be learned in the future.*

### 1. **Introduzione**

Da tre anni l'Associazione La Casa degli Insegnanti di Torino ha avviato il progetto “Laboratorio di riflessione didattica sull'insegnamento della Ma-



tematica”: un percorso certificato dall’Ufficio scolastico regionale del Piemonte come corso di formazione rivolto a docenti di diversi livelli scolastici (primaria e secondaria di primo e secondo grado) e, per la scuola secondaria, di vari indirizzi (licei, istituti tecnici e professionali) con lo scopo di ripensare, mediante l’utilizzo degli item e dei dati INVALSI, la didattica disciplinare della Matematica attraverso il confronto tra docenti e formatori.

Il laboratorio è nato come una provocazione rispetto ad atteggiamenti diversi dei docenti rispetto alle prove INVALSI: da un lato ostracismo, dall’altro addestramento alle prove e comunque un loro mancato utilizzo per ripensare metodologie e didattica. Ci sembrava invece che l’utilizzo proficuo di questi materiali e l’analisi dei risultati potesse essere un punto importante di partenza per capire ostacoli e difficoltà degli studenti e riflettere di conseguenza sulla didattica.

Per questo è stata avviata una ricerca-azione che ha portato a una serie di interventi specifici secondo i vari livelli scolari, gli indirizzi e le singole esigenze delle classi i cui docenti partecipavano al Laboratorio. Per esempio, analizzando le problematiche riscontrate dai docenti di un liceo scientifico nell’apprendimento della geometria, è stato ipotizzato un percorso che coinvolgesse maggiormente gli studenti nell’attività in classe, si sono messe insieme due classi che lavorassero su proposte di lavoro presentate dai docenti. In altri casi è stata privilegiata l’analisi del linguaggio, con esercizi volti a favorire il passaggio da quello naturale a quello simbolico della Matematica e viceversa. In altri ancora l’attenzione è stata posta sugli errori: in questo caso gli studenti erano invitati a spiegare verbalmente o per iscritto il loro ragionamento affinché il docente comprendesse quali reali ostacoli ci fossero e potesse intervenire proficuamente per rimuovere le misconcezioni. Tra le varie esperienze comunque le proposte di *peer education* stanno crescendo in numero e qualità.

Da segnalare un altro aspetto significativo: in tale percorso si sono presentate molte occasioni in cui il software di geometria dinamica GeoGebra ha avuto il ruolo di mediatore e facilitatore nell’acquisizione dei concetti.

## **2. Orientamento e *peer education***

Il progetto per orientamento è stato realizzato con il contributo di un liceo scientifico della cintura torinese e rivolto alle scuole secondarie di I grado del territorio. La proposta, della docente del liceo responsabile del progetto, è partita dall’analisi di quesiti INVALSI di diversi livelli scolari dalla primaria al primo biennio della secondaria di II grado e dall’analisi dei traguardi

e degli obiettivi di apprendimento al termine della scuola primaria e della scuola secondaria di primo grado quali prerequisiti per gli obiettivi specifici di apprendimento del primo biennio della scuola superiore.

Nell'anno scolastico 2017/18 il progetto, viene realizzato in tutte le terze medie di un comune della provincia di Torino. Un gruppo di studenti del triennio di un liceo scientifico, precedentemente formati dalla responsabile del progetto, hanno tenuto una lezione in modalità *peer education* nelle classi della secondaria di primo grado recandosi, nelle classi terze accompagnati dalla loro docente. Gli studenti hanno portato un'attività che, a partire da quesiti INVALSI di grado 8, con l'ausilio del software GeoGebra e di materiale povero, ha permesso di affrontare argomenti fondamentali di Matematica.

I vettori di comunicazione tra i due livelli scolari sono stati dunque i quesiti scelti.

Focus dell'attività è stata l'attenzione sul passaggio dalla scuola secondaria di primo grado a quella di secondo grado. Tra gli ambiti: Numeri, Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni si è privilegiato Spazio e figure.

In quest'ottica dovendo orientare i ragazzi delle medie ci si è chiesto con che linguaggio si debba parlare loro e qual sia la possibilità di discussione comune tra il docente della secondaria di II grado e quello di I grado. Le indicazioni nazionali nei quesiti INVALSI sono state il contatto cercato. Attraverso materiale povero e il software GeoGebra i quesiti e i problemi associati sono diventati non solo belli e accattivanti, ma anche strumento per evidenziare e rappresentare, in diverse forme, conoscenze matematiche essenziali per entrambi i livelli, utilizzando le competenze matematiche degli studenti del liceo.

È stata inoltre importante la scoperta di un fatto, semplice ma significativo: tra gli item delle prove INVALSI del grado 8 e del grado 10, se ne trovano molti simili.

L'analisi di diversi quesiti INVALSI di più livelli scolari con il supporto di GESTINV, e la percezione di un "filo" comune che li unisce, mette in luce come le conoscenze e le competenze matematiche che alla fine di un percorso scolastico devono essere raggiunte, essendo essenziali, siano già state introdotte negli anni precedenti della scuola secondaria di I grado: esse saranno poi sviluppate negli anni successivi. Questo necessita che le basi poste siano solide.

Nel rispondere a quesiti INVALSI gli studenti mettono in gioco conoscenze e competenze che sfruttano per lo più aspetti statici della Matematica: fare un calcolo specifico, analizzare una determinata figura illustrata nell'item ecc. Con GeoGebra si ha un valore aggiunto perché la dinamicità permette non solo di risolvere il quesito, ma anche ampliare l'analisi a un più ampio spettro di casi simili.

Utilizzando per esempio uno slider, strumento di GeoGebra, si possono muovere, scomporre e ruotare figure, oppure scoprire invarianti e gestire variabili e parametri.

### 3. Un esempio di *peer education*

Il percorso strutturato vuole mettere in luce come i concetti di superficie totale e volume in un solido siano indipendenti, quindi non è sempre vero che all'aumentare dell'uno aumenta anche l'altro o viceversa.

Si è partiti dal quesito INVALSI illustrato in fig.1 e dalle risposte date a livello nazionale.

Il cubo nell'immagine è formato da 8 cubetti. Viene eliminato il cubetto nero: Com'è la superficie totale del solido rimanente rispetto a quella del cubo di partenza?

- A Uguale a quello del cubo
- B Maggiore di quella del cubo
- C Minore di quella del cubo
- D Non si può sapere perché non si conosce la misura dello spigolo

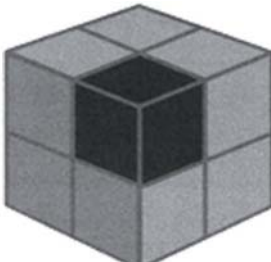


Fig. 1 – Quesito INVALSI grado 8 – 2017

Dalle percentuali nazionali emerge che le risposte corrette sono 33,3%, quelle errate 64,6% e le risposte mancanti 1,1%.

Per costruire la lezione, con gli studenti del liceo si sono analizzate tutte le possibili risposte dei ragazzi delle medie e si è cercato di legare queste risposte a ostacoli nell'apprendimento della Matematica. Come in una scena di teatro i ragazzi hanno rappresentato la classe di scuola media e alcuni di loro hanno fatto gli alunni e altri i tutor mettendosi in difficoltà con domande sull'argomento.

Dall'analisi a priori e dai risultati nazionali ha prevalso la risposta C che mette in luce la confusione tra volume e superficie del solido: "Se perdo un pezzo allora ho meno superficie".

In effetti il concetto di volume non è così interiorizzato da far convergere gli studenti sulla risposta corretta. La risposta D è stata meno scelta e rappresenta l'impossibilità di fare un ragionamento in quanto non ho la misura. La risposta B che sembra assurda viene comunque presa in considerazione, sebbene in un numero bassissimo di casi. La cosa può essere spiegata dal fatto che la perdita del cubo lascia esposta una parte della superficie prima interna che quindi emergendo dà l'idea dell'aggiunta, di qualcosa in più.

Preparando la lezione, gli studenti si sono interrogati su come far emergere la risposta corretta. In particolare è stato prodotto un file GeoGebra in cui, usando uno slider e facendo ruotare il solido, hanno trovato una strategia che ha aiutato la comprensione. Infatti gli studenti della scuola media hanno capito che non serve la misura per rispondere. Importante è stato anche far manipolare del materiale povero, come cubetti di legno che sono stati costruiti da un genitore e da un fratello di allievi del liceo.



Fig. 2 – Immagine riprodotta con il software GeoGebra

Ma è proprio dalla risposta B quella meno utilizzata che è nata l'idea di considerare un cubo di dimensioni  $3 \times 3 \times 3$ . Più precisamente ci si è chiesti se fosse possibile, perdendo una parte, aumentare la superficie. Di quanto e perché? Che relazione avremmo con il volume?

Nasce così  $C_{3 \times 3}$  e il pezzo mancante, il nome che gli studenti hanno voluto attribuire al nuovo cubo. Il problema è stato costruito con gli studenti del liceo che hanno avuto un ruolo attivo in tutto il suo sviluppo. Anche qui la riproduzione del cubo con GeoGebra e la possibilità di costruirlo con materiale povero hanno dato un notevole valore aggiunto. Gli slider hanno permesso di osservare nello spazio il diverso comportamento dei pezzi persi da  $C_{3 \times 3}$  e capire come e di quanto varia la superficie totale.

Si può verificare che la superficie rimane invariata o aumenta a seconda del posto che occupa il cubetto che si toglie. Infatti le facce esposte quando il cubetto è ancora incastrato sono 3; quando viene tolto vengono scoperte 3 facce. Il cubetto che sta al centro di uno dei lati ha 2 facce esposte; quando si toglie se ne scoprono 4. Se infine si considera il cubetto che sta al centro di una faccia del cubo, ha una sola faccia esposta; se si toglie se ne scoprono 5.

L'uso di GeoGebra consente di muovere il cubo e di visualizzare chiaramente la situazione descritta.

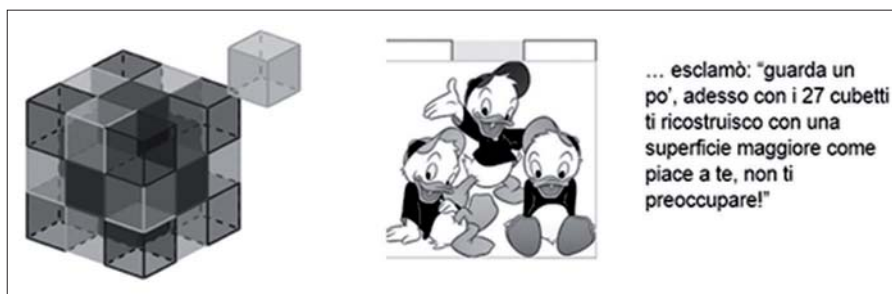


Fig. 3 –  $3 \times 3 \times 3$  e il pezzo mancante

Nell'ultima parte del problema  $3 \times 3 \times 3$  viene fatto cadere apposta e si divide nei suoi 27 cubetti. Gli studenti delle medie lo devono ricostruire con lo stesso volume, ma con più superficie totale sperimentando di nuovo l'indipendenza dei due concetti.

Il problema è stato strutturato in uno *story board* e presentato dagli studenti del liceo.

Nei 45 minuti di intervento per classe sono stati i tutor a gestire le situazioni. Sono state individuate tre fasi. In una prima fase gli alunni al loro posto hanno avuto una scheda e con l'aiuto dei tutor hanno risolto il quesito INVALSI. È stato fondamentale questo momento perché è qui che sono stati messi in luce tutti gli errori, incomprensioni e anche le risposte corrette. I ragazzi tutor sono stati istruiti a non dare la risposta corretta subito, ma ad aiutare i ragazzi delle medie a risolvere il quesito con domande, non confermando subito anche le risposte esatte, ma facendo motivare le risposte stesse e chiedendo il parere agli altri compagni. Quando sono state date più risposte con le loro motivazioni si è passati al file GeoGebra e al corretto risultato. A volte per i tutor non è stato facile ottenere le risposte dagli alunni con relative spiegazioni, ma tutti hanno sempre lavorato con grande impegno e responsabilità. È stato interessante sentire da loro a posteriori come sia stato difficile il lavoro fatto in classe (questo può considerarsi un riconoscimento e una

rivalutazione del lavoro del docente!), ma anche come la responsabilità di spiegare a un proprio pari li renda desiderosi di studiare per essere preparati.

In un secondo tempo è stato letto il nuovo problema e sono stati divisi i ragazzi delle medie in gruppi. Quindi si è dato inizio alla risoluzione con il materiale povero portato: C3x3 è stato fornito in legno per ogni gruppo di quattro o cinque ragazzi della terza media al quale sono stati abbinati uno o due tutor. Infine è stata fatta un'analisi dei risultati collegialmente con il file GeoGebra.

L'insegnante del liceo in queste fasi oltre a passare tra i gruppi si è confrontata con i colleghi della scuola media, con cui ha condiviso esperienze di errori e ostacoli su fondamentali nodi dell'apprendimento nei due livelli scolari, ha discusso della visione tridimensionale e bidimensionale in geometria e il ruolo che da questo punto di vista può giocare GeoGebra. È un'occasione per superare la preoccupazione di mettersi in gioco, da entrambi le parti, e condividere esperienze che in fondo sono comuni.

#### 4. Un ulteriore esempio

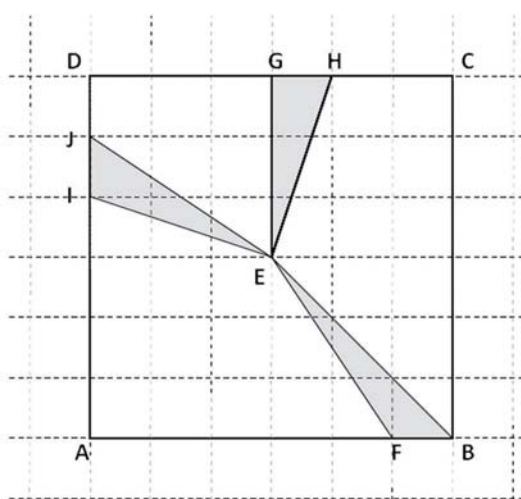
Un altro intervento, il duale nel piano rispetto a quello del paragrafo 3, è il lavoro svolto con il concetto di aree e perimetro (D'Amore e Fandiño Pinnilla, 2005), partendo dall'item illustrato in fig. 4, con le domande e le scelte riportate sotto.

Nell'item A gli studenti hanno subito evidenziato che i tre triangoli hanno diverso perimetro motivando correttamente l'affermazione, mentre per la maggior parte di loro anche le aree erano diverse. Quindi la risposta più frequente è stata la D. A questo punto i tutor hanno cercato di capire le motivazioni degli studenti prima di dare la risposta corretta e dalle spiegazioni sono emerse le seguenti convinzioni:

- i triangoli dalle forme diverse hanno diversa area;
- l'altezza dei due triangoli ottusangoli coincide con un lato (la indicano a parole EF nel triangolo EFB o ricalcandola alla LIM con il dito) quindi le aree sono diverse.

Qualcuno ha mostrato difficoltà nell'individuare l'altezza in quanto sebbene sappia che cosa sia, non procede poiché “esce fuori dalla figura” (difficoltà specifica in un triangolo ottusangolo).

D11. Osserva i triangoli nella seguente figura.



a. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A. I tre triangoli hanno stessa area e stesso perimetro
- B. I tre triangoli hanno stessa area e diverso perimetro
- C. I tre triangoli hanno diversa area e stesso perimetro
- D. I tre triangoli hanno diversa area e diverso perimetro

b. Posiziona sul lato AB del quadrato il punto P in modo che il triangolo AEP abbia area doppia del triangolo EFB.

Fig. 4 – Grado 8 – 2014

Nella seconda parte dell'item, il *b*, è stato più difficile giungere alla soluzione. Il problema più grande da superare è stato di nuovo quello dell'altezza, questa volta per un altro motivo. La maggior parte degli alunni sono partiti dalla formula  $bh/2$  per calcolare l'area di un triangolo e poi si sono fermati all'aspetto algebrico della stessa. Nell'applicazione della formula e nell'interpretazione geometrica è mancato il riconoscimento di *h* come costante.

Solo qualche studente è riuscito ad arrivare alla soluzione nell'item *b*.

GeoGebra è stato fondamentale in entrambe le parti del quesito (*a* e *b*). È stata utilizzata la striscia per fissare il concetto di uguale altezza nonché distanza tra due rette parallele (Gallo e Cantoni, 2016). Lo slider consente di muovere il vertice F: base e altezza rimangono invariate, pur modificandosi il triangolo. Non così gli altri due lati. Ne consegue che l'area è un invariante mentre non lo è il perimetro.

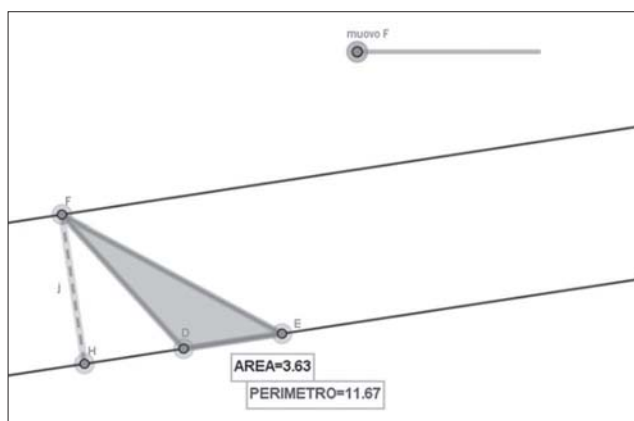


Fig. 5 – Distanza tra due rette parallele e altezza

Nel costruire il problema correlato per il lavoro nei gruppi si è utilizzata la possibile risposta A del primo item, cercando di far emergere come la relazione tra concetto di area e perimetro non sia necessariamente governata da un'uguaglianza. L'idea era quella di accostare triangoli con stessa area, ma alcuni con uguale perimetro e altri no. Di seguito si riporta una parte del problema associato al quesito, che è stato chiamato dagli studenti “La coperta di Minnie” (fig. 6). Si vuole confezionare una coperta quadrata di lato 6 unità in cui nella stoffa quadrata a intreccio vengono inseriti quattro triangoli congruenti lavorati a maglia, come illustrato in figura.

Qual è la percentuale di stoffa che si deve tagliare per inserire le parti fatte a maglia?

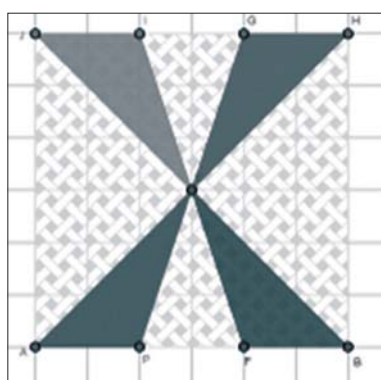


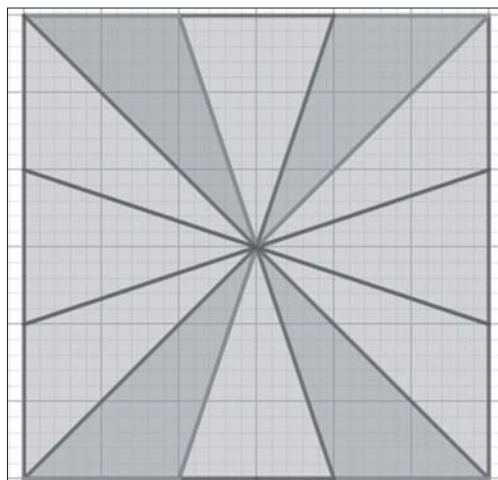
Fig. 6 – Problema: la coperta di Minnie



La ricerca della percentuale di coperta da tagliare per inserire le parti fatte a maglia è stata molto complicata per diversi motivi. Per alcuni la scelta è stato l'ambiente numerico. È però stato difficile individuare la proporzione per determinare la percentuale ovvero  $12 : 36 = x : 100$  e quindi operare il passaggio tra frazione e percentuale attraverso frazioni equivalenti:

$$12/36 = 1/3 = 0,333 \dots$$

Inoltre molti studenti non hanno pensato a una risoluzione legata a un'interpretazione geometrica: infatti si potevano individuare nella coperta i 12 triangoli equivalenti (fig. 7). La frazione sarebbe diventata  $\frac{1}{12}$  equivalente alle altre. Dal punto di vista didattico si può osservare che, pur essendo le tre frazioni equivalenti, l'ultima assume un significato pregnante legato alla rappresentazione geometrica, che supera i calcoli (D'Amore, 2000).



*Fig. 7 – Rappresentazione geometrica della frazione*

In ultimo il valore approssimato della frazione in oggetto ha costituito un ulteriore ostacolo per gli studenti che non sono riusciti a trasformare  $0,3333\dots$  nella forma  $33\%$  o  $33,3\%$  o  $33,33\%$ , ... La difficoltà incontrata è stata quella infatti di non avere un numero con sole due cifre decimali, a cui legare la percentuale, ma infinite cifre, non avendo evidentemente interiorizzato il fatto che una percentuale può essere espressa anche con una parte decimale e in più può essere anche ottenuta da un'approssimazione del valore della frazione (la presenza del numero periodico si è rivelato un ostacolo aggiuntivo).

## 5. Conclusioni

La scelta di realizzare anche questo anno esperienze di *peer education*, strategia educativa che si basa sulla *trasmissione di esperienze e conoscenze tra i membri di un gruppo di pari* (Pellai, Rinaldin e Tamborini, 2002) è stata motivante per gli studenti tutor che hanno acquisito una completa padronanza dei contenuti e stimolante per coloro che hanno ricevuto la proposta didattica. L'utilizzo di GeoGebra ha infine molto favorito il coinvolgimento totale degli studenti.

L'analisi a priori degli errori e/o ostacoli o le difficoltà in Matematica che potevano emergere dalla risoluzione sono stati un elemento fondamentale per il progetto in quanto sono diventati, per i docenti, strumento per la creazione di situazioni problema, risorse per aiutare gli studenti nel processo d'apprendimento.

Con questo progetto si volevano anche perseguire obiettivi specifici, quali favorire interazione tra pari, positiva sia per i ragazzi delle medie sia per quelli del liceo che in questo modo hanno continuato a imparare insegnando in un proficuo clima di lavoro. Altro obiettivo raggiunto è stato quello di favorire contatti diretti con insegnanti della stessa disciplina ma su livelli scolari differenti.

È stato molto importante durante gli incontri dei docenti giungere alla consapevolezza della convergenza tra indicazioni nazionali e obiettivi delle rilevazioni INVALSI.

I quesiti e i problemi hanno permesso di vedere la continuità tra i due livelli scolari, mediante l'analisi delle Indicazioni nazionali.

## Riferimenti bibliografici

- D'Amore B. (2000), "Lingua, Matematica e Didattica", *La matematica e la sua didattica*, 1, pp. 28-47.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005), "Area e perimetro. Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti", *La matematica e la sua didattica*, 2, pp. 165-190.
- Gallo E., Cantoni M. (2016), *Parliamo di Geometria*, intervento seminario a Torino il 25 ottobre 2016, testo disponibile al sito: <https://www.geogebra.org/m/ZV2e8hkP>, data di consultazione 26/1/2021.
- Pellai A., Rinaldin V., Tamborini B. (2002), *Educazione tra pari: manuale teorico-pratico di empowered peer education*, Erikson, Trento.

## *6. I dati INVALSI: studio longitudinale delle abilità numeriche dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria*

di Annamaria Romano, Giovanni Pucciarini

Il presente lavoro intende fornire i risultati di uno studio longitudinale realizzato, nel corso di un triennio, su uno stesso campione di bambini dall'ultimo anno di scuola dell'infanzia alla classe seconda della scuola primaria.

Scopo della ricerca è stato quello di dimostrare se le abilità numeriche possedute dai bambini di 5 anni nella scuola dell'infanzia possano essere considerate “predittive” della prestazione futura nell'ambito logico-matematico. A tal fine è stato condotto uno studio per individuare una possibile correlazione tra il possesso dei precursori della cognizione numerica, i livelli di apprendimento nella classe prima della scuola primaria e gli esiti della prova di Matematica INVALSI del grado 2.

La prima fase della ricerca è stata dedicata alla valutazione dei prerequisiti delle abilità di calcolo mediante l'uso di prove standardizzate. Successivamente si è proceduto alla rilevazione dell'apprendimento delle abilità di calcolo alla fine del primo anno di scuola primaria. I dati raccolti sono stati, infine, messi in relazione con gli esiti della prova di Matematica somministrata, agli stessi alunni, al termine della classe seconda.

Tale lavoro ha richiesto precise procedure di rilevazione e analisi dei dati.

Adottare una prospettiva longitudinale ha consentito di analizzare, di anno in anno, i risultati degli alunni e di poter effettuare, alla fine del triennio, un confronto con gli esiti della prova di Matematica di classe seconda da cui sono state tratte utili indicazioni per la progettazione didattica.

*The present document means to provide outcomes of a longitudinal survey achieved in a triennial path on one sample of children since kindergarten to primary school second class.*

*This survey aims to demonstrate that numerical skills of kindergarten 5 years old children may be considered as “predictive value” of calculus*

*skills in primary school first class and of INVALSI Math Test outcomes in second class.*

*The first phase of the survey focuses on evaluation of calculus skills' prerequisites through standardized tests. Successively we proceeded to survey learning of calculus skills at the end of the primary school first class. This collection of data, lastly, were compared to INVALSI Math Test outcomes at the second class end.*

*This survey requested precise methods of detection and data analysis.*

*The adopted longitudinal perspective let us to analyse our pupils outcomes year by year and to compare them to INVALSI Math Test outcomes at the end of the triennial path, including useful clues for our educational planning.*

## **1. Introduzione**

Una ricerca è un processo complesso la cui ricostruzione deve integrare più tempi e più dimensioni, è un intreccio che deve essere reso in una forma lineare. Il presente lavoro rappresenta, difatti, il tentativo di ricostruire in forma lineare il percorso di ricerca realizzato confrontando i risultati in vari test di Matematica ottenuti da un campione non casuale di bambini dall'età di 5 anni ai 7 anni nell'arco di un triennio. La finalità era quella di individuare una possibile correlazione tra il possesso dei precursori della cognizione numerica al termine della scuola dell'infanzia, i livelli di apprendimento nella classe prima della scuola primaria e gli esiti della prova di Matematica di classe seconda.

La ricerca ha avuto carattere longitudinale ed è iniziata quando i soggetti del campione frequentavano l'ultimo anno della scuola dell'infanzia e si è concluso quando gli stessi soggetti frequentavano la classe seconda della scuola primaria del medesimo istituto. La disponibilità dei dati forniti dai test standardizzati somministrati all'inizio del percorso e degli esiti della prova di Matematica di classe seconda al suo termine, hanno permesso di poter effettuare una lettura statistica dei risultati. Il ricorso agli esiti dello scrutinio finale della classe prima ha consentito una lettura più puntuale dal punto di vista didattico. L'analisi dei numerosi dati disponibili ha permesso di dare inizio a una riflessione sul rapporto dialettico tra la valutazione data dalla scuola e la misurazione standardizzata degli apprendimenti che ha condotto a una positiva conferma dell'ipotesi iniziale.

## **2. Aspetti metodologici**

### **2.1. Contesto**

Il contesto nel quale è stato declinato il progetto di ricerca è l'istituto comprensivo "Perugia 6".

Nato con dimensionamento nell'a.s. 2013/2014, ha rappresentato l'opportunità per realizzare una maggiore integrazione delle scuole del territorio e lo sviluppo di una reale continuità didattica e formativa tra scuole dell'infanzia, primaria e secondaria di primo grado. L'istituto rappresenta, dunque, la formalizzazione di una scuola che cerca di realizzare un percorso formativo coerente, unitario, continuo e progressivo, poiché presenta un'articolazione interna centrata sui bisogni dell'alunno, che prevede la continuità tra i diversi gradi scolastici e consente di porre il discente al centro del processo di formazione. In questa realtà territoriale è presente, già da alcuni anni, un importante flusso migratorio: si tratta sia di trasferimenti di famiglie italiane con genitori in età lavorativa e figli in età scolare dovuti a processi di immigrazione sia da Paesi comunitari ed extracomunitari che dalle regioni meridionali dell'Italia. In un tale contesto sociale l'impegno che la scuola è chiamata a svolgere è proprio quello di promuovere l'educazione all'inclusione e alla cittadinanza, fornendo altresì gli strumenti culturali e le competenze necessarie per eliminare le discontinuità e realizzare un raccordo pedagogico, curricolare e metodologico.

### **2.2. Campione**

Il progetto di ricerca, in quanto concepito come studio longitudinale, ha visto come campione lo stesso gruppo di bambini monitorato a partire dall'ultimo anno della scuola dell'infanzia fino alla fine della classe seconda della scuola primaria. Esso è formato da 60 bambini appartenenti a 6 sezioni di due plessi di scuola dell'infanzia confluiti, nell'anno scolastico successivo, nelle tre classi prime del plesso principale di scuola primaria dell'istituto.

### **2.3. Strumenti**

Per la realizzazione della ricerca ci si è avvalsi di diversi strumenti:

- BIN 4-6: Batteria per la valutazione dell'intelligenza numerica in bambini dai 4 ai 6 anni;

- esiti degli scrutini finali relativi alla Matematica della classe prima;
- esiti delle Prove nazionali di Matematica grado 2.

La BIN 4-6, Batteria per la valutazione dell'intelligenza numerica in bambini dai 4 ai 6 anni (Lucangeli, Molin e Poli, 2012), rappresenta un valido strumento per valutare la conoscenza del bambino, per individuarne i punti di forza e gli eventuali punti di debolezza relativamente agli aspetti cognitivi e metacognitivi implicati nell'apprendimento della Matematica. La scelta è scaturita dall'esigenza di utilizzare uno strumento in grado di esaminare quei processi indicativi dell'avvio della competenza pre-matematica e che possa essere considerato anticipatore del futuro apprendimento. Nella sua versione attuale la batteria è composta da 11 prove relative a quattro aree processuali: semantica, di conteggio, lessicale e pre-sintattica, che rappresentano i processi alla base della costruzione del concetto di numero e, quindi, dell'apprendimento del calcolo. Tali processi possono essere definiti precursori in quanto rappresentano la precondizione di quelle che poi diventeranno le abilità di calcolo e ragionamento aritmetico. Essi sono:

- processi semantici che riguardano la rappresentazione mentale della quantità, la numerosità o meglio il principio della cardinalità del numero;
- processi di conteggio ovvero le abilità di conta;
- processi lessicali che fanno riferimento all'etichetta verbale ovvero alla denominazione del numero;
- processi pre-sintattici legati alla sintassi del numero ovvero le diverse relazioni di grandezza che si trovano all'interno dei numeri grandi o composti da più cifre.

Alcune prove sono composte da item relativi a specifici aspetti processuali e domande di tipo metacognitivo che forniscono la base per una valutazione qualitativa del livello di acquisizione raggiunto dal bambino nella conoscenza numerica. Le prove sono costituite da un "Protocollo per la somministrazione" che fornisce le istruzioni dettagliate riguardo alla sequenza da seguire e l'attribuzione del punteggio, un foglio per delineare il "Profilo individuale" e un quadro di sintesi di tutte le informazioni.

#### ***2.4. Esiti degli scrutini finali***

Un altro elemento che abbiamo voluto utilizzare è stato il voto attribuito in Matematica dagli insegnanti al termine della classe prima della scuola primaria considerato come la sintesi dell'insieme delle osservazioni relative al percorso formativo dell'intero anno scolastico di ciascun alunno.

## ***2.5. Risultati della prova di Matematica di classe seconda***

Nello studio diacronico un ruolo importante è stato dato ai risultati delle Prove nazionali di Matematica 2017 del grado 2. Sono state prese in esame la tavola 1B relativa ai punteggi di Matematica di ciascuna classe e dell'istituto per conoscere quale fosse la situazione rilevata attraverso le Prove nazionali. Fondamentali per il nostro studio sono state le informazioni fornite dai Microdati utilizzate per esaminare e confrontare gli esiti di singoli casi specifici.

## ***2.6. Durata della ricerca***

L'intero progetto è stato realizzato nell'arco di un triennio a partire dall'a.s. 2014-15, quando il campione in esame frequentava la scuola dell'infanzia, all'a.s. 2016-17, anno di frequenza della classe seconda della scuola primaria.

## ***2.7. Azioni della ricerca***

La realizzazione della presente ricerca ha richiesto lo svolgimento delle seguenti fasi:

- 1) formazione degli insegnanti;
- 2) somministrazione della BIN 4-6;
- 3) raccolta, tabulazione e analisi dei risultati della BIN 4-6;
- 4) tabulazione dei voti di Matematica al termine della classe prima di scuola primaria;
- 5) confronto tra risultati della BIN 4-6 ed esiti degli scrutini finali relativi al voto di Matematica;
- 6) analisi dei risultati della prova di Matematica di classe seconda;
- 7) conclusioni.

## ***2.8. Formazione degli insegnanti***

Punto di partenza del progetto è stata la partecipazione degli insegnanti della scuola dell'infanzia a una formazione specifica sul tema dell'intelligenza numerica e della validità di prove standardizzate utilizzabili con bambini dai 4 ai 6 anni. Nel corso della formazione è stata presentata, in maniera approfondita la Batteria per la valutazione dell'intelligenza numerica di cui sono state illustrate sia il protocollo di somministrazione sia le modalità di

attribuzione del punteggio utili per una valutazione qualitativa del livello raggiunto da ciascun bambino nella conoscenza numerica.

## 2.9. Somministrazione BIN

Nel mese di maggio 2015 si è proceduto alla somministrazione della BIN 4-6 a ciascuno dei 60 bambini, della fascia di età compresa tra i 60 e i 72 mesi, frequentanti l'ultimo anno di scuola dell'infanzia.

Le insegnanti, rispettando quanto previsto dal protocollo, hanno proceduto riservando una cura particolare anche alla creazione di un ambiente tranquillo e accogliente al fine di evitare che situazioni di disturbo o fonti di distrazione inficiassero i risultati della prova.

## 2.10. Tabulazione e analisi dei dati

Finita la somministrazione e compilato il profilo individuale si è proceduto alla tabulazione dei risultati parziali relativi a ciascuna area di processo e a quello totale (tab. 1).

*Tab. 1 – Risultati parziali di ciascuna area di processo, risultato totale e livello*

<i>Alunni</i>	<i>Lessicale</i>	<i>Semantica</i>	<i>Counting</i>	<i>Presintassi</i>	<i>Totale</i>	<i>Livello</i>
SI1	16	17	34	12	79	PS
SI2	20	20	40	20	100	CCR
SI3	23	21	40	20	104	CCR
SI4	22	21	40	21	104	CCR
SI5	20	21	40	18	99	CCR
SI6	23	21	40	20	104	CCR
SI7	19	19	40	18	96	PS
SI8	23	21	40	20	104	CCR
SI9	19	20	31	10	80	PS
SI10	23	21	40	17	101	CCR
SI11	6	9	15	3	33	RI
SI12	15	16	12	9	52	RA
SI13	20	19	40	20	99	CCR

Per ogni bambino della scuola dell'infanzia (indicato con la sigla SI seguita da un numero progressivo) è stato indicato il punteggio ottenuto in ciascuna area di processo (semantica, di conteggio, lessicale e pre-sintattica)



e il livello raggiunto nell'intera prova. In questo modo è stato possibile individuare velocemente coloro che evidenziavano una situazione di criticità e, dunque, di richiesta di attenzione (RA) o addirittura una richiesta di intervento immediato (RI), da coloro che invece raggiungevano un livello di prestazione sufficiente (PS) oppure ottimale manifestando di aver raggiunto completamente un livello ottimale (CCR).

Dalla successiva analisi è emerso che il 27,6% del campione evidenziava difficoltà tali da richiedere un intervento immediato nell'area della pre-sintassi e il 25% nell'area lessicale. Il 18,3% del campione esaminato manifestava difficoltà significative in entrambe le aree di processo. Il counting risulta invece essere un punto di forza con un esito positivo della prova nell'83,3% del campione.

Esaminando il punteggio totale di ciascun bambino (tab. 2) emerge che il 41,7% del campione raggiunge un livello di prestazione ottimale, il 45% un livello pienamente sufficiente mentre solo il 13,3% manifesta difficoltà che richiedono l'attivazione di percorsi mirati al potenziamento (5,0%) o a un vero e proprio recupero (8,3%).

*Tab. 2 – Numero di bambini e percentuale del campione per ciascuna fascia di prestazione*

<i>Fascia di prestazione</i>	<i>Numero bambini</i>	<i>Percentuale campione</i>
Criterio completamente raggiunto	25	41,7
Prestazione sufficiente	27	45,0
Richiesta di attenzione	3	5,0
Richiesta di intervento immediato	5	8,3

## ***2.11. Restituzione dei risultati ai docenti delle classi ponte***

I dati così raccolti e tabulati sono diventati oggetto di una riflessione comune a cui hanno partecipato le docenti delle sezioni della scuola dell'infanzia coinvolte nel progetto e le insegnanti delle future classi prime. Tale incontro ha costituito per le insegnanti della scuola dell'infanzia un momento di confronto tra i risultati delle prove e le osservazioni sistematiche effettuate nel corso dell'anno scolastico. Per le docenti della scuola primaria è stata l'occasione per raccogliere dei dati oggettivi per una prima conoscenza dei futuri alunni, ma soprattutto per reperire delle informazioni per la progettazione di attività e di percorsi di potenziamento specifici e ben mirati rispondenti agli effettivi bisogni formativi degli allievi.

I dati raccolti sono stati, altresì, utilizzati per fornire informazioni aggiuntive, in via sperimentale, per la formazione delle classi prime (A, B, C) al fine di ottenere dei gruppi equilibrati ed eterogenei sia nella composizione interna che tra di essi.

## 2.12. La valutazione finale

Al termine della classe prima di scuola primaria si è proceduto alla raccolta e tabulazione dei voti di Matematica per fasce di voto (tab. 3).

Tab. 3 – Numero di bambini e percentuale del campione per ciascuna fascia di voto

<i>Fascia voto Matematica</i>	<i>Numero di bambini</i>	<i>Percentuale campione</i>
9-10	39	65
7-8	18	30
6	3	5

Abbiamo, dunque, pensato di operare un primo confronto tra la fascia di prestazione ottenuta nella BIN e il voto finale in Matematica per poter effettuare le prime riflessioni. Prima di tutto si è proceduto nel tentativo di stabilire la seguente corrispondenza tra i livelli di prestazione della BIN e quattro fasce di voto:

- CCR – Criterio pienamente raggiunto: 9-10;
- PS – Prestazione sufficiente: 7-8;
- RA – Richiesta di attenzione: 6;
- RII – Richiesta di intervento immediato: 6>.

Tab. 4 – Confronto tra esito della BIN e voto di Matematica per ciascun alunno classe I<sup>a</sup>A

<i>% alunni</i>	<i>Risultato BIN</i>	<i>Fascia voto</i>	
35	CCR	9-10	↔
25	PS	9-10	↑
25	PS	7-8	↔
5	RA	7-8	↑
10	RII	7-8	↑

Tab. 5 – Confronto tra esito della BIN e voto di Matematica per ciascun alunno classe 1<sup>a</sup>B

<i>% alunni</i>	<i>Risultato BIN</i>	<i>Fascia voto</i>	
35%	CCR	9-10	↔
5%	CCR	7-8	↓
35%	PS	9-10	↑
15%	PS	7-8	↔
10%	RII	6	↑

Tab. 6 – Confronto tra esito della BIN e voto di Matematica per ciascun alunno classe 1<sup>a</sup>C

<i>% alunni</i>	<i>Risultato BIN</i>	<i>Fascia voto</i>	
50	CCR	9-10	↔
25	PS	9-10	↑
10	PS	7-8	↔
10	RA	7-8	↑
5	RII	7-8	↑

I dati raccolti (tabb. 4, 5, 6), voti e livelli di prestazione, sono stati tabulati in modo da poter avere per ciascun alunno un quadro sinottico del voto finale e del livello di prestazione. A completamento di ciascuna riga è stata posta una freccia con la quale fornire un'immediata indicazione del risultato di tale confronto. Sono state predisposte, dunque, le seguenti tre tabelle, una per ciascuna delle tre classi campione.

L'analisi dei dati messi a confronto ha evidenziato una relazione positiva tra risultati BIN e voti in quanto è stato possibile registrare che il 36,7% degli alunni ha mostrato un miglioramento del proprio livello di prestazione, il 61,7% è rimasto stabile e solo l'1,6% ha mostrato una flessione.

In particolar modo si registra che il 96% del campione che si collocava al livello più alto della BIN 4-6 (CCR) ha mantenuto un voto di fascia alta, il 61,6% dei bambini con Prestazione sufficiente ha migliorato il proprio livello così come quelli che si collocavano ai livelli più bassi (RA e RII).

### **2.13. Analisi dei risultati INVALSI**

La restituzione dei dati INVALSI 2017 relativi alla prova di Matematica di classe seconda ha permesso di poter operare un confronto e trarre informazioni utili. Sono state prese in esame solo alcune delle tavole restituite dall'INVALSI in quanto considerate più significative ai fini della nostra ricerca.

Un valido contributo è stato fornito dai microdati che ci hanno consentito di poter effettuare un confronto tra i risultati della BIN 4-6 somministrate e i risultati di ciascuno studente nella prova di Matematica. A tal proposito sono stati messi a confronto la percentuale di risposte esatte di ciascun alunno nella BIN 4-6 e il punteggio di Matematica normalizzato.

Per ciascuna classe si è proceduto, prima di tutto, a calcolare il coefficiente di correlazione campionaria tra le due serie di dati, per conoscere in quale misura variano insieme e quindi conoscere la loro dipendenza. La situazione che ne emersa è la seguente:

- classe 2<sup>a</sup>A  $cov(A,B) = 256,98$ ;
- classe 2<sup>a</sup>B  $cov(A,B)=348,45$ ;
- classe 2<sup>a</sup>C  $cov(A,B)=291,60$ .

In tutti e tre i casi la covarianza assume un valore positivo il quale indica che le due serie di dati hanno un comportamento che potremmo definire “concorde”.

Abbiamo di seguito calcolato anche l’indice di Pearson ( $r$ ):

- classe 2<sup>a</sup>A  $r = 0,53$ ;
- classe 2<sup>a</sup>B  $r = 0,70$ ;
- classe 2<sup>a</sup>C  $r = 0,76$ .

Il valore dell’indice per ciascuna classe campione si avvicina a 1 e ciò conferma che le due variabili considerate sono direttamente correlate.

Abbiamo pensato di rappresentare anche attraverso dei grafici quanto emerso calcolando i vari indici.

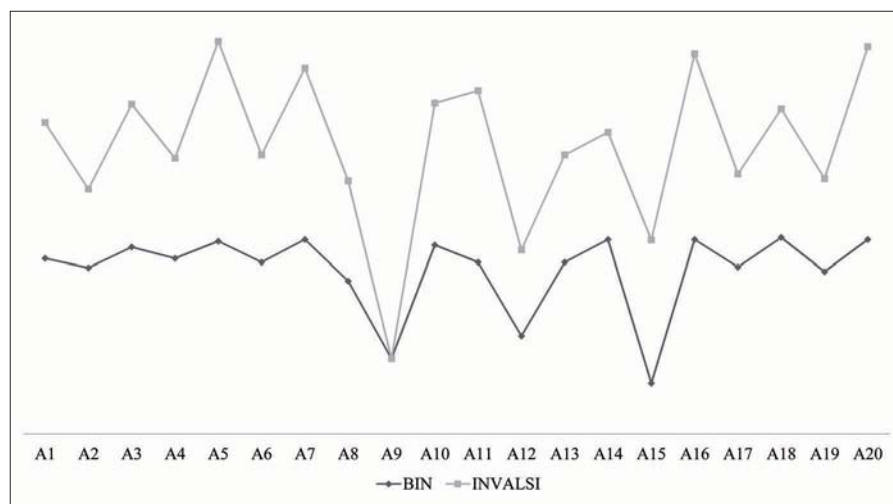


Fig. 1 – Confronto tra risposte esatte BIN e percentuale risposte esatte INVALSI – 2<sup>a</sup>A

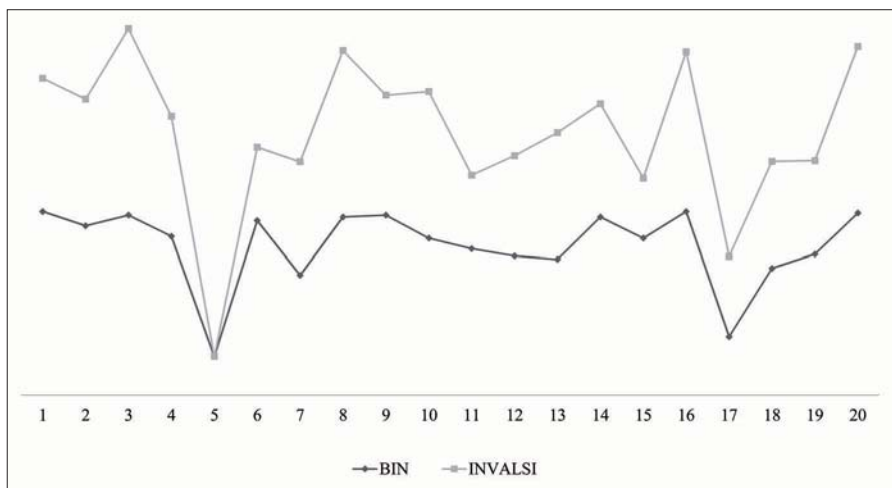


Fig. 2 – Confronto tra risposte esatte BIN e percentuale risposte esatte INVALSI – 2<sup>a</sup>B

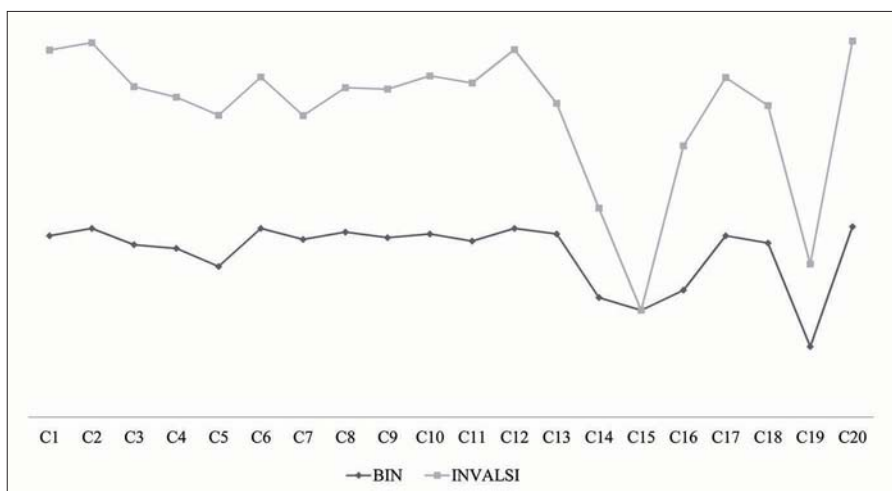


Fig. 3 – Confronto tra risposte esatte BIN e percentuale risposte esatte INVALSI – 2<sup>a</sup>C

I grafici mettono a confronto il risultato della BIN con la percentuale di risposte corrette date dallo stesso alunno di ciascuna classe alla prova di Matematica di classe seconda. Si nota una corrispondenza tra l'andamento degli esiti in ciascuna prova di ogni alunno. Gli alunni A9 e A15 della classe 2<sup>a</sup>A (fig. 1) evidenziano una performance inferiore al resto della classe in entrambe le prove. Allo stesso modo gli alunni B5 e B17 della 2<sup>a</sup>B (fig. 2) e C19 della 2<sup>a</sup>C (fig. 3).

Di notevole interesse si è rivelato l'uso dei microdati anche per esaminare alcuni casi particolari (tab. 7). Abbiamo deciso di esaminare i dati relativi agli studenti che nella BIN 4-6 si erano collocati al livello ottimale di prestazione (CCR) e che nel corso del primo anno di scuola primaria avevano conseguito una votazione finale compresa nella fascia più alta (9/10-10/10). Abbiamo scelto di prendere in esame solo alcuni i dati relativi al Punteggio WLE di Matematica (stima delle abilità secondo il modello di Rasch) su scala nazionale relativi a ciascuno dei 25 studenti del campione in possesso dei requisiti sopra indicati.

*Tab. 7 – Punteggio WLE di Matematica degli alunni con livello di prestazione ottimale*

<i>Studente</i>	<i>WLE_MAT_200</i>
A5	348,39
A7	262,74
A10	231,13
A14	201,23
A16	287,68
A18	189,91
A20	307,71
B1	231,13
B3	348,39
B6	178,30
B8	273,74
B9	218,59
B14	212,68
B16	262,74
B20	273,74
C1	307,71
C2	307,71
C6	245,33
C8	237,95
C10	245,33
C11	253,47
C12	287,68
C13	224,72
C17	253,47
C20	307,71

Dall'analisi dei dati si evince che il 95% degli alunni in esame ha conservato un livello di abilità significativamente superiore alla media nazionale

(+148,39) mentre solo due alunni (A18 e B6) si collocano al di sotto della media nazionale.

A completamento del lavoro abbiamo voluto esaminare anche quei casi che manifestavano delle carenze e che nella BIN 4-6 evidenziavano una Richiesta di attenzione o di Intervento immediato (tab. 8). Dall'analisi abbiamo escluso due alunni (A11 e B5) in quanto certificati in base alla L. 104/92.

Tab. 8 – Punteggio WLE di Matematica degli alunni con livello di prestazione insufficiente

Studente	WLE_MAT_200
A12	184,17
A15	231,13
B17	184,17
C14	189,91
C15	0,00
C19	184,17

La tabella mostra che solo uno studente (A15) ha raggiunto un livello significativamente superiore alla media rispetto al resto del campione che continua a manifestare carenze nelle abilità di Matematica.

### 3. Conclusioni

Il lavoro condotto nell'arco di un triennio ci ha permesso di “sperimentare” la capacità predittiva della BIN 4-6. La somministrazione della stessa ai bambini dell'ultimo anno della scuola dell'infanzia era nata dall'esigenza di affiancare alle tradizionali Schede di Osservazione, di carattere prettamente qualitativo, uno strumento in grado di fornire dei dati oggettivi che permettessero di individuare il possesso dei precursori delle abilità numeriche necessari per l'apprendimento futuro. I test standardizzati utilizzati, infatti, hanno consentito di valutare una gamma di abilità, da quelle spaziali a quelle verbali, prima ancora di sintetizzare le prestazioni in un punteggio globale di *competenza matematica* (Butterwort, 2005). Lo scopo era principalmente quello di individuare uno strumento utile alla prevenzione delle difficoltà in Matematica per poter individuare in maniera precoce i soggetti a rischio. Solo successivamente abbiamo pensato di utilizzare i dati raccolti per capire se fossero in grado di prevedere la prestazione futura e il grado di associazione tra precursori e abilità di calcolo.

Il confronto tra i livelli di prestazione dei bambini nella BIN 4-6 e le fasce di voto in Matematica alla fine del primo anno di scuola primaria ha eviden-

ziato una relazione positiva tra le due serie di dati, in particolar modo nelle performance ottimali.

Il successivo confronto effettuato anche mediante l'uso di coefficienti di correlazione tra le prestazioni ottenute con la BIN 4-6 e i punteggi di Matematica forniti dall'INVALSI tramite i Microdati ha evidenziato, anche in questo caso, una correlazione positiva.

I positivi risultati della nostra ricerca costituiscono uno stimolo a continuare il lavoro iniziato approfondendo e sviluppandone alcuni aspetti al fine di utilizzare i risultati per promuovere il miglioramento delle pratiche didattiche e per consolidare quelle più efficaci.

## **Riferimenti bibliografici**

Butterworth B. (2011), *Numeri e calcolo*, Erickson, Trento.

INVALSI (2017), *Rilevazione nazionale degli apprendimenti 2016-17 Rapporto risultati*, testo disponibile al sito: [https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/Rapporto\\_Prove\\_INVALSI\\_2017.pdf](https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/Rapporto_Prove_INVALSI_2017.pdf), data consultazione 26/1/2021.

INVALSI (2018), *Quadro di riferimento delle prove INVALSI di Matematica*, testo disponibile al sito: [https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR\\_MATEMATICA.pdf](https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf), data consultazione 26/1/2021.

Lucangeli D., Molin A., Poli S. (2012), *BIN 4-6. Batteria per la valutazione dell'intelligenza numerica in bambini dai 4 ai 6 anni*, Erickson, Trento.



## *7. Maiali, cani e galline. Riflessioni sulla prova INVALSI di Matematica per la classe quinta primaria del maggio 2018*

di Chiara Saletti, Fabio Brunelli

Gli autori, docenti in un istituto comprensivo di Firenze, prendono in esame otto dei trentacinque quesiti del fascicolo INVALSI di Matematica proposto alle classi quinte della scuola primaria nel maggio 2018.

Dopo un'analisi degli item, in rapporto con le Indicazioni nazionali, le usuali prassi didattiche e i libri di testo, riportano una lettura dei risultati di due classi quinte della scuola di appartenenza. All'inizio dell'anno scolastico 2018/19 alcuni quesiti ritenuti più significativi sono stati riproposti in una classe seconda di una scuola secondaria di primo grado dello stesso quartiere e di pari livello scolastico con risultati non del tutto scontati.

Gli autori vorrebbero offrire con il presente contributo materiali e spunti di lavoro utili ai Dipartimenti di Matematica degli istituti comprensivi.

*The authors, teachers in a Comprehensive Institute in Florence, take in examination eight of the thirtyfive INVALSI questions of the issue of mathematics proposed to the fifth classes of the primary school in May 2018.*

*After an analysis of selected items, in relationship with the National Indications, the usual didactic routines and textbooks, the authors bring an interpretation of the results of two fifth classes of the school of affiliation. The are besides compared with the evaluations of their teachers and with the student psychological profiles. Later, some questions, held more meaningful, have been proposed to the beginning of the scholastic year 2018/19 in a second class of a secondary school of first degree with interesting considerations and didactic confirmations. The contribution sets under a lens of enlargement difficulties, mistakes and misconceptions of the students respect to the mathematics: for this reason it is useful for teacher training and it proposes to offer material and starting point to the Departments of Mathematics of the Comprehensive Institutes.*

## 1. Introduzione

Il contesto della nostra ricerca è l'istituto comprensivo "Masaccio" nato nel settembre 2010 dall'unione di cinque scuole fiorentine. L'istituto si estende su un territorio abbastanza ampio; comprende tre plessi di scuola primaria: "Giotto" con annessa la scuola dell'infanzia, "Enriques-Capponi", "Andrea del Sarto" e il plesso "Masaccio" di secondaria di primo grado. Il contesto socio-culturale da cui proviene la stragrande maggioranza dell'utenza è di livello medio e medio-alto. Gli alunni che frequentano le scuole dell'istituto provengono principalmente dal quartiere. La popolazione scolastica rispecchia, quindi, realtà diverse per condizioni personali, sociali e culturali e presenta, conseguentemente, bisogni e problematiche di diverso tipo. L'incidenza di studenti con cittadinanza non italiana è relativamente poco significativa.

L'11 maggio del 2018 si è svolta la prova di Matematica che ha riguardato le classi seconde e quinte della scuola primaria. Puntualmente si è sollevata qualche polemica: «Anche INVALSI ammette che il test non serve a nulla. Ma ormai i buoi sono scappati». «Prove INVALSI: cosa devono misurare? Non lo sanno neppure gli esperti», «Prova INVALSI Matematica quinta primaria: fuori dal mondo! Lontana dalle problematiche degli alunni».

Insieme a seducenti proposte commerciali: *Come prepararsi alle Prove INVALSI 2018, INVALSI primaria: niente panico, basta allenarsi, Testi per prepararsi alle prove INVALSI.*

Noi abbiamo ancora una volta scelto di prendere in mano i fascicoli, leggerli e rifletterci sopra.

Da qui l'idea di uno studio qualitativo, per i numeri presi in considerazione, che fosse utile in primo luogo a noi e secondariamente a tutti i colleghi interessati.

Il confronto fra le due classi quinte primarie è motivato dal fatto che nella sezione A l'insegnante ha dedicato tempo, fin dalla classe prima, alla discussione collettiva, all'argomentazione e al problem solving, curando al contempo anche l'insegnamento della lingua italiana; mentre nella sezione B è stata condotta una didattica più tradizionale, nella preoccupazione di portare avanti un adeguato numero di contenuti disciplinari.

Come nostra abitudine, abbiamo esteso la nostra attenzione a una classe di livello più alto, nello specifico una classe seconda di una scuola secondaria di primo grado. L'esperienza ci suggerisce, infatti, che questi confronti risultano ricchi di spunti di riflessione. Spesso abbiamo osservato che alunni più scolarizzati, davanti a situazioni problematiche, rinunciano, forse per pigrizia mentale, alle loro intuizioni, cercando di ricordare la regola giusta da applicare.

Vorremmo poter fornire ai colleghi una metodologia che consenta un migliore utilizzo dei quesiti INVALSI, che non si riducano a mero strumento di valutazione di sistema, ma possano essere utilizzati come preziosa risorsa didattica, una volta adattati alle proprie classi.

La nostra ipotesi è che, dietro a una risposta corretta o scorretta di un allievo ci sia molto altro: processi cognitivi, ragionamenti e intuizioni, che solo con tempi più lunghi, risposte aperte e nostre interviste, possono venire alla luce.

## 2. Analisi dei quesiti e risultati di due classi quinte e di una classe seconda di una scuola secondaria di primo grado

Nel 2018, anno preso in considerazione, erano presenti nel nostro comprensivo sette classi quinte. Riguardo alla Matematica i loro risultati generali si attestano al 57,5%, a fronte di un 52,9% per la Toscana, di un 51,4% del Centro e di un 49,2% della media nazionale. Dobbiamo purtroppo rilevare che per tre classi i dati non risultano presenti.

Ci siamo limitati all'esame di due classi quinte della nostra scuola che indicheremo con "5<sup>a</sup>A" e "5<sup>a</sup>B", entrambe con un background socioculturale medio-alto. La 5<sup>a</sup>A è una classe di livello "alto", che fin dalla prima ha avuto la continuità di un docente che insegna Italiano e Matematica e che da anni lavora sul problem solving, ottenendo buoni risultati in gare matematiche regionali. La 5<sup>a</sup>B è invece una classe più normale, di livello "medio-basso".

Per il nostro studio abbiamo scelto nove quesiti, quelli che ci apparivano più interessanti e che coprivano i quattro ambiti di contenuto. Nella tabella che segue abbiamo raccolto le sigle dei quesiti, facendo riferimento anche alla dimensione della competenza alla quale ciascuno di essi afferisce. A ogni quesito abbiamo dato un soprannome.

*Tab. 1 – I quesiti scelti suddivisi per ambito e dimensione*

<i>Dimensioni delle competenze</i>	<i>Numeri</i>	<i>Figure</i>	<i>Relazioni e funzioni</i>	<i>Dati e previsioni</i>
Risolvere problemi	D29 Il contenitore*	D20 L'esagono D23 La grande T*	D17 Gli animali* D12 Lava e sbianca*	
Argomentare	D33 Divisibilità			D18 Palline D24 Dadi
Conoscere	D27 La frazione*			

Alla fine del mese di settembre 2018, abbiamo riproposto cinque dei nove quesiti già presi in esame (nella tabella precedente sono evidenziati da un asterisco) in una classe seconda di una scuola secondaria di primo grado di Firenze. La classe era di livello medio e composta da 23 alunni.

Questi sono i risultati che abbiamo ottenuto nella classe seconda secondaria di primo grado riuniti in una tabella.

*Tab. 2 – Classe 2<sup>a</sup> secondaria primo grado: risultati ottenuti dagli studenti*

	<i>D27</i>	<i>D12</i>	<i>D17</i>	<i>D29</i>	<i>D23</i>	<i>Misura in decimi</i>	<i>Valutazione in Matematica</i>
1	Si	Si	Si	Si	Si	10	7
2	No	Si	Si	No	Si	6	6
3	Si	Si	Si	Si	Si	10	9
4	–	Si	Si	Si	–	6	8
5	No	Si	–	Si	Si	6	8
6	No	Si	Si	–	Si	6	6
7	No	Si	Si	Si	–	6	9
8	–	Si	Si	Si	Si	8	8
9	No	–	–	No	Si	2	6/7
10	Si	Si	–	–	–	4	8
11	No	Si	Si	Si	Si	8	9
12	No	No	No	No	No	0	5
13	No	No	No	No	No	0	6
14	Si	–	Si	No	Si	6	7
15	No	No	Si	Si	Si	6	9
16	No	Si	–	Si	Si	6	9
17	Si	–	–	No	Si	4	–
18	No	–	No	No	Si	2	9
19	No	–	Si	No	Si	4	6
20	Si	Si	Si	No	No	6	6
21	No	Si	Si	Si	Si	8	7
22	Si	–	Si	No	Si	6	7
23	No	Si	–	–	Si	4	6
	30,4%	60,8%	60,8%	43,4%	73,9%		

## D27. La frazione

<b>D27.</b>	<b>Quale dei seguenti numeri corrisponde a ottantasei decimi?</b>
A.	<input type="checkbox"/> 0,86
B.	<input type="checkbox"/> 8,6
C.	<input type="checkbox"/> 86
D.	<input type="checkbox"/> 860

Fig. 1 – Il testo dell’item D27 di grado 5 del 2018

La dimensione del quesito è quella della conoscenza. L’ambito è quello numerico, in particolare il delicato passaggio da frazione a numero decimale.

Per rispondere alla domanda l’allievo doveva passare dalla rappresentazione linguistica di una frazione alla rappresentazione matematica del corrispondente numero decimale.

Il passaggio non è banale. Nella nostra esperienza di insegnanti sono frequentissimi gli errori del tipo: “ $1/2$  è uguale a  $1,2$ ”. Questo tipo di errore si trascina, purtroppo, specialmente negli allievi di livello medio-basso, per tutto il triennio della scuola secondaria di primo grado e anche in quella di secondo grado.

Le Indicazioni nazionali chiedono esplicitamente, oltre che di saper leggere e scrivere i vari tipi di numeri, anche di confrontarli, ordinarli e rappresentarli sulla linea dei numeri.

In entrambe le classi analizzate, l’item ha mietuto numerose vittime e le percentuali delle risposte corrette si attestano al 41,7% per la 5<sup>a</sup>A, mentre per la 5<sup>a</sup>B siamo sul 43,5%. Da notare che, mentre nella 5<sup>a</sup>A i distrattori *a* e *c* raccolgono ciascuno un 25%, nella 5<sup>a</sup>B il distrattore *a* ha un 30,4% mentre *c* il 17,4%.

Purtroppo, l’argomento “trasformazione di una frazione in numero decimale” viene spesso affrontato sotto forma di esercizi ripetuti, senza generare una vera e propria competenza. È come se mancasse un’adeguata conoscenza della frazione e del numero decimale, e si acquisisse solo un’abilità meccanica nel passare dall’una rappresentazione all’altra.

Nella classe 2<sup>a</sup> della scuola secondaria di primo grado le risposte corrette purtroppo scendono al 30,43%. Il peggioramento del risultato potrebbe imputarsi al fatto che nell’usuale prassi didattica l’argomento “numeri decimali e frazioni” spesso è affrontato al secondo anno. Gli allievi avrebbero quindi avuto un intero anno scolastico per dimenticare ciò che avrebbero appreso nella scuola primaria.

Il protocollo di Alessio, un alunno pienamente sufficiente, ci fa riflettere:

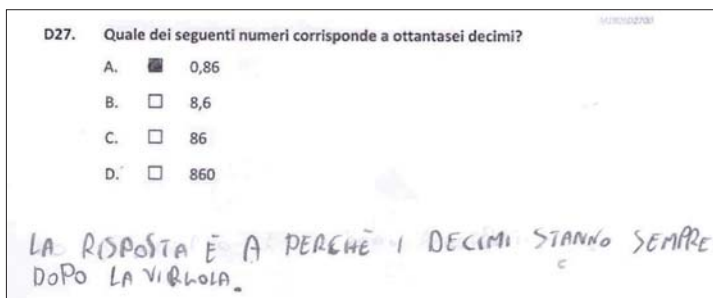


Fig. 2 – Il protocollo di Alessio studente di 2<sup>a</sup> secondaria di primo grado

“La risposta è A perché i decimi stanno sempre dopo la virgola”.

Alessandro, alunno con la media del nove dichiara: “Ottantasei decimi è uguale a 0,86. Sono abbastanza sicuro, ma non so quale operazione fare”.

Sofia, un'alunna con la media dell'otto, ha lasciato il foglio in bianco e nell'intervista ammette: “Non sono sicura, non so che operazione fare”.

Grazia, media del nove, confessa: “Avevo scritto che ottantasei decimi era uguale a 0,86, perché era una frazione impropria. Ora rivedendo la domanda, ho capito che, essendo una frazione impropria, deve essere maggiore di uno, ma non so quale delle tre risposte, ci devo pensare”.

Anche Camilla, alunna di livello sufficiente, sceglie come risposta 0,86 e spiega: “Ho scelto questa risposta perché nei decimi prima c'è lo zero, dopo la virgola e poi il numero”.

## D29. Il contenitore

**D29. Francesco deve riempire di olio un contenitore da 50 litri.**

Ha già riempito i  $\frac{6}{10}$  del contenitore.

Quanti litri di olio deve ancora aggiungere per riempire completamente il contenitore?

Risposta: .....litri

Fig. 3 – L'item D29 di grado 5 del 2018

La dimensione del quesito è quella dei problemi. L'ambito è quello numerico e sono coinvolte anche misure di capacità.

Per rispondere alla domanda l'allievo doveva utilizzare la frazione  $\frac{6}{50}$  come operatore sulla misura 50 litri. Le frazioni vengono introdotte nella

scuola primaria proprio come operatori; successivamente viene messo in evidenza il loro significato di numeri. L'aspetto di rapporto generalmente viene rimandato alla scuola secondaria di primo grado.

L'argomento rientra pienamente tra gli obiettivi di apprendimento da raggiungere al termine della classe quinta: "Utilizzare numeri decimali, frazioni e percentuali per descrivere situazioni quotidiane".

Per le nostre classi riscontriamo un andamento diverso: nella 5<sup>a</sup>A il 58,3% ha dato risposta corretta e il 41,7% risposta errata; mentre nella 5<sup>a</sup>B registriamo il 39,1% di risposte corrette e il 56,5% di risposte errate, a cui dobbiamo sommare un 4,3% di risposte mancanti.

Come tutti i quesiti INVALSI anche questo si presterebbe a essere affrontato in gruppo con la consegna di argomentare il procedimento seguito. Si potrebbe chiedere agli alunni di preparare un cartellone esplicativo comprendente un disegno, una qualunque rappresentazione grafica della situazione-problema.

Questa volta la classe della scuola secondaria ha risposto meglio: abbiamo registrato il 43,5 % di risposte corrette.

Alessio, allievo di livello sufficiente, ammette: "Ho confuso i litri già messi con quelli da mettere" (fig. 4).

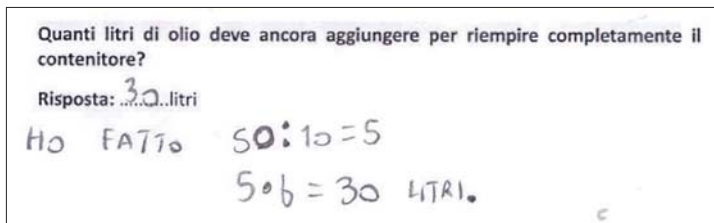


Fig. 4 – Dal fascicolo di Alessio studente di 2<sup>a</sup> secondaria di primo grado

Camilla: "Ho risposto 4 litri, perché 6/10 corrisponde a 6 interi colorati [?]. Per riempirlo tutto mancano altri 4 litri".

Giorgia ha la media dell'otto. Tuttavia, dopo avere rappresentato correttamente la frazione 6/10, lascia in bianco la risposta del problema:

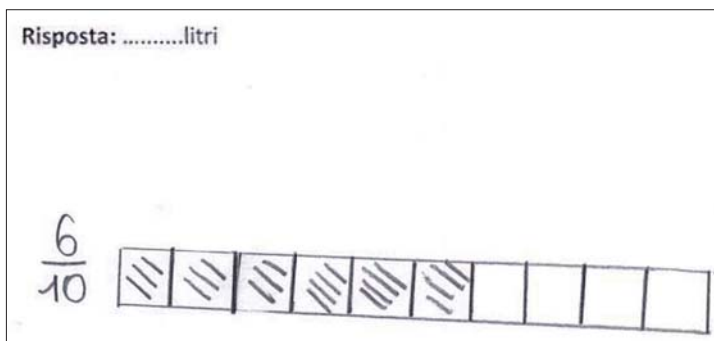


Fig. 5 – Il protocollo di Giorgia con risposta mancante nonostante la corretta rappresentazione grafica

Helason fa un passo avanti. Rappresenta anche i 50 litri, ma non riesce ad applicare correttamente l'operatore  $6/10$ .

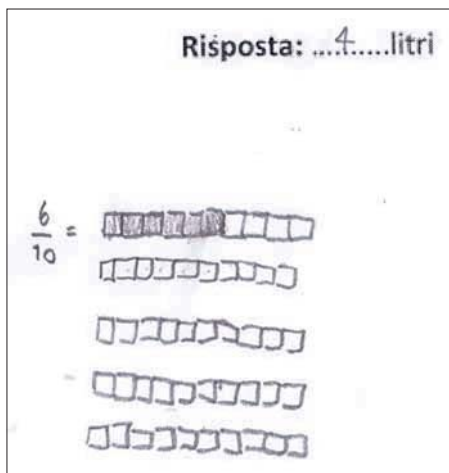


Fig. 6 – Il protocollo di Helason

Se pensiamo che la frazione come operatore (almeno sulle torte) è un cavallo di battaglia della scuola primaria e del primo anno della scuola secondaria, dobbiamo proprio convenire che abbiamo ancora molto lavoro da fare.



### D33. Divisibilità

<b>D33.</b>	<b>30 e 75 sono divisibili per 15. Tutti i numeri divisibili per 15 sono sempre divisibili anche per:</b>
A.	<input type="checkbox"/> 6 e 5
B.	<input type="checkbox"/> 10 e 5
C.	<input type="checkbox"/> 3 e 5
D.	<input type="checkbox"/> 10 e 3

Fig. 7 – L'item D33 di grado 5 del 2018

La dimensione del quesito è quella dell'Argomentare. L'ambito è quello numerico.

Per rispondere correttamente alla domanda l'allievo doveva individuare i divisori di un numero divisibile per 15.

Le Indicazioni nazionali chiedono che l'alunno si muova con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali.

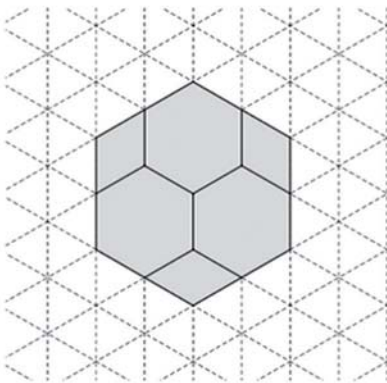
Si tratta dell'unico quesito del fascicolo che affronta l'ambito numerico nella dimensione dell'argomentazione. Riteniamo la cosa interessante. Nella tradizione dell'insegnamento della Matematica in Italia l'argomentare e il dimostrare trovano maggiore spazio in Geometria piuttosto che in Aritmetica e Algebra, dove abbiamo una netta prevalenza di calcolo meccanico.

L'andamento delle risposte di entrambe le classi quinte analizzate si presenta sostanzialmente analogo; mentre nella 5<sup>a</sup>A, che ha un 58,3% di risposte corrette, le risposte a e c non raccolgono alcun sostenitore, nella 5<sup>a</sup>B, che ha un 56,5% di risposte corrette, le risposte a e c raccolgono ciascuna il 4,3%. Le risposte mancanti sono l'8,3% per la 5<sup>a</sup>A e il 4,3% per la 5<sup>a</sup>B.

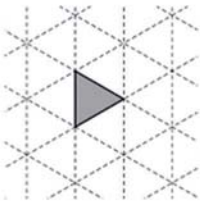
Sotto a questo quesito c'è un concetto matematico importante: la transitività della relazione di divisibilità tra i numeri naturali. In questo senso potremmo definire il quesito pre-algebrico e preparatorio al livello scolastico successivo.

## D20. L'esagono

**D20.** Filippo ha a disposizione delle tessere a forma di esagono regolare e di rombo. Con queste tessere compone la seguente figura.



Poi Filippo ricopre completamente l'intera figura usando, senza sovrapporle, solo tessere a forma di triangolo equilatero come questa:



**Quante tessere a forma di triangolo equilatero utilizza?**  
**Risposta:** .....

Fig. 8 – L'item D20 di grado 5 del 2018

La dimensione del quesito è quella dei problemi. L'ambito è quello della Geometria.

Per rispondere correttamente alla domanda l'allievo doveva determinare l'area di un esagono regolare, confrontando due differenti tassellazioni del piano.

Tra gli obiettivi delle Indicazioni nazionali vi è quello di “determinare l'area di rettangoli e triangoli e di altre figure per scomposizione o utilizzando le più comuni formule”.

L'esagono in figura non è collocato in posizione standard: con un lato parallelo al bordo basso del foglio. Anche i trapezi e il triangolo equilatero sono collocati in modo inusuale. Inoltre si parla di aree senza fornire numeri e unità di misura. Tutti questi fatti potrebbero aver creato difficoltà a qualche allievo abituato a un insegnamento tradizionale della Geometria.

Entrambe le quinte analizzate registrano una maggioranza di risposte corrette: 58,3% per la A e 52,2% per la B; quello che fa la differenza è invece la percentuale di risposte mancate: 4,2% della A contro un 17,4% della B. Ancora una volta si nota una tendenza da parte della 5ªB a lasciare in bianco quei quesiti che richiedono uno maggiore sforzo nella comprensione della consegna.

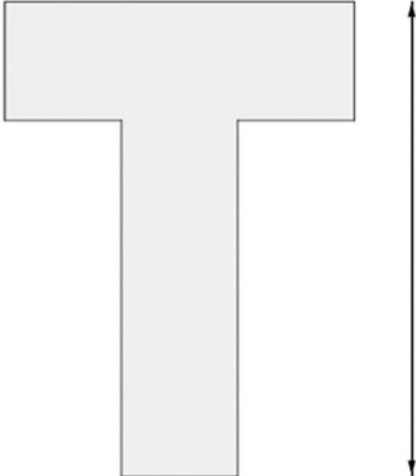
I quesiti INVALSI, dall'anno 2000 a oggi, hanno sempre avuto un effetto secondario non istituzionalizzato: dare indicazioni didattiche ai docenti, "fare tendenza", oseremo dire "fare formazione". Questo quesito è un esempio classico: la Geometria qui è "pura", svincolata dai calcoli e dalle formule, si basa sul "vedere – osservare – ragionare".

Questo tipo di Geometria non è una novità in Italia, anzi, il quesito sarebbe piaciuto a Federigo Enriquez (1871-1946) e anche agli estensori dei programmi della scuola media del 1979 (tra cui Emma Castelnuovo). Purtroppo questo "stile italiano di fare Matematica", basato sull'osservazione e sull'intuizione, percorre tutto il Novecento, ma resta troppo spesso inascoltato dai libri di testo e dalla maggioranza degli insegnanti.

Un'ultima osservazione: le due tassellazioni del quesito, stampate in dimensioni maggiori su cartoncino, potrebbero diventare un gioco tipo puzzle geometrico per bambini di età inferiore o semplicemente un modello di aiuto per risolvere il problema attraverso la manipolazione.

## D23. La grande T

D23. Osserva questa figura.



12 cm

16 cm

Quanto misura il perimetro della figura?

A.  28 cm

B.  44 cm

C.  56 cm

D.  48 cm

Fig. 9 – L'item D23 di grado 5 del 2018

La dimensione del quesito è quella dei problemi. L'ambito è quello della Geometria.

Per rispondere correttamente alla domanda l'allievo doveva determinare il perimetro di una figura irregolare (poligono convesso). I dati numerici non sono nel testo, ma indicati nella figura.

Tra gli obiettivi delle Indicazioni nazionali vi è quello di "Determinare il perimetro di una figura utilizzando le più comuni formule o altri procedimenti".

Nel caso delle due quinte analizzate riscontriamo un andamento decisamente diverso. La 5<sup>a</sup>A registra un 70,8% di risposte corrette, con 12,5% per il

distrattore  $a$ , e 8,3% ciascuno al  $b$  e al  $d$ . Diversamente nella 5<sup>a</sup>B registriamo un 43,5% di risposte corrette, 13% per il distrattore  $a$ , 26,1% per il  $b$  e 17,4% per il  $d$ .

Per allievi di età più elevata il problema è facile: si tratta semplicemente di sommare quattro numeri  $12 + 12 + 16 + 16 = 56$  cm. Tra le quattro risposte possibili quella corretta è la terza. Il primo distrattore è 28 cm, semiperimetro della figura, il secondo è 44 cm, perimetro parziale della figura senza il lato superiore, l'ultimo distrattore è 48 cm, perimetro del quadrato di lato 12 cm.

La difficoltà del quesito sta nel fatto che la figura non è regolare. Alcuni allievi potrebbero affermare: “Non conosciamo questa figura, non l'abbiamo studiata, non sappiamo qual è la formula da applicare”. Nel quesito non sono date le misure dei singoli segmenti che formano la figura, ma due misure complessive, dalle quali andavano ricavate le misure dei segmenti. Si poteva anche osservare che il perimetro era equivalente a quello del rettangolo di misure 12 cm per 16 cm.

La tradizione scolastica dell'insegnamento della Geometria è di applicare formule a figure note; per aggiungere difficoltà agli esercizi le misure fornite sono numeri più grandi, oppure decimali, o forniti in modo indiretto (la somma della base e dell'altezza è..., la loro differenza è...).

Questo quesito alla scuola secondaria è andato bene: con un 74% di risposte corrette.

Azzurra sembra qui occupata, più che dalla Geometria, da una sorta di gioco del “numerando”, dove cerca di ottenere uno dei numeri proposti come risultato aritmetico a partire dai dati numerici del problema.

B.	<input checked="" type="checkbox"/>	44 cm
C.	<input type="checkbox"/>	56 cm
D.	<input type="checkbox"/>	48 cm

H0      COTCOTOT0       $12 + 16 = 28$  ~~non~~

$4 + 4 = 8$

$4 + 4 = 8$

$28 + 8 + 8 = 44$

Fig. 10 – Il protocollo di Azzurra relativo all'item D23

## D12. Lava e sbianca

**D12. Osserva questi flaconi di detersivo.**



Quale detersivo costa meno a parità di quantità?  
Scrivi come hai fatto per trovare la risposta e completa la frase.

.....  
.....  
.....

A parità di quantità, il detersivo che costa meno è .....

Fig. 11 – L'item D12 di grado 5 del 2018

La dimensione del quesito è quella dei problemi. L'ambito è quello delle Relazioni e funzioni.

Per rispondere alla domanda l'allievo doveva fare il confronto tra i rapporti di quantità e prezzo di due detersivi differenti per trovare la confezione più conveniente. Per essere accettata come giusta la risposta doveva contenere anche il procedimento seguito per ottenere la risposta.

Le Indicazioni chiedono: "Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria".

La difficoltà del problema risiede nel fatto che il testo fornisce i costi relativi a quantità differenti di prodotto. Le strategie per rispondere alla domanda sono diverse.

Le più semplici sono:

- dividere il prezzo di Lava Sbianca, 6 euro:  $3 = 2$  euro (mezzo litro di Lava Sbianca) che è minore di 2,50 euro (prezzo di mezzo litro di Bianco Pulito);
- oppure moltiplicare il prezzo di Bianco Pulito:  $2,50 \times 3 = 7,50$  euro (prezzo di un litro e mezzo di Bianco Pulito) che è maggiore di 6 euro (Lava Sbianca).

Le classi prese in esame evidenziano, ancora una volta, un andamento non analogo, in quanto per la 5<sup>a</sup>A abbiamo un 70,8% di risposte corrette, 16,7% di risposte errate e il 12,5 degli studenti non ha risposto alla domanda. Per la 5<sup>a</sup>B, invece, le risposte corrette sono il 56,5%, quelle errate il 17,4%, in linea con l'altra classe, ma il 26,1% degli studenti della classe non ha dato risposta alla domanda.

L'argomento "frazioni – rapporti – percentuali" purtroppo mette in crisi gli studenti italiani dalla scuola primaria all'università. Al di là delle torte, al di là degli esercizi sulle proporzioni, al di là di semplici percentuali, appena i quesiti delle prove standardizzate esterne diventano meno banali il nostro studente medio è in difficoltà.

Gli insegnanti da parte loro non sono soddisfatti, ma non riescono a staccarsi dalle routine didattiche (torte e proporzioni). Speriamo che quesiti come questo richiama l'importanza dello sviluppo di un corretto "pensiero proporzionale", al di là di definizioni e di tante regole talvolta inutili.

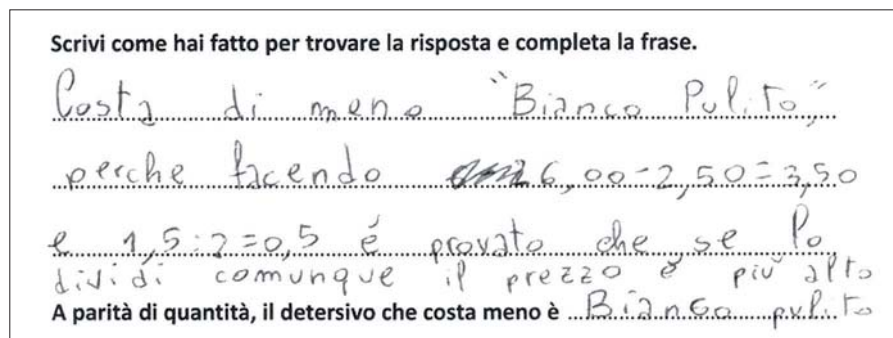


Fig. 12 – Un protocollo errato della 5<sup>a</sup>B

Osserviamo qui il ricorso alla sottrazione, errore tipico nei problemi che richiedono il ragionamento proporzionale.

Al contrario abbiamo nel seguito il protocollo corretto di un alunno che immagina di confrontare tre litri dei due differenti prodotti:

O COMPRATATO TRE LITRI DI UNO E TRE  
 LITRI DI UN ALTRO E POI O NOTATO  
 che il "BIANCO PULITO" COSTA € 1,500 mentre l'altro costa  
 12,00 EURO  
 A parità di quantità, il detersivo che costa meno è ..... il "DANA E sbianca"

Fig. 13 – Il protocollo corretto di uno studente di 5<sup>a</sup>

Le risposte corrette a questo quesito nella classe seconda della scuola  
 secondaria di primo grado sono state il 61%, peggiori di quasi 10 punti per-  
 centuali rispetto a quelli della 5<sup>a</sup>A.

D12. Osserva questi flaconi di detersivo.

QUESTO CONTIENE 3 VOLTE  
 QUELLO DA 0,5 LITRI

PERÒ SE FACCO  
 IL COSTO E  
 LO MOLTIPLICO PER  
 TRE CIOÈ  
 $0,5 \times 2,50 =$   
 $0,5 \times 2,50 =$   
 $0,5 - 2,50 =$   
 7,50

1  
 $0,5 +$   
 $0,5 +$   
 $0,5 =$   
 $1,5$

LAVA E SBIANCA  
 1.5 litri  
 € 6,00

BIANCO PULITO  
 0,5 litri  
 € 2,50

Quale detersivo costa meno a parità di quantità?  
 Scrivi come hai fatto per trovare la risposta e completa la frase.

QUELLO DA 6 EURO PERCHÉ STA 3  
 VOLTE QUELLO DA € 2,50 ESSEMPIO:

A parità di quantità, il detersivo che costa meno è QUELLO DA € 6

$2,50 +$   
 $2,50 +$   
 $2,50 =$   
 $7,50$

$0,5 +$   
 $0,5 +$   
 $0,5 =$   
 $1,5$

QUELLO DA 0,5  
 LITRI CONTIENE  
 3 VOLTE DI PIÙ  
 DI QUELLO DA  
 0,5 LITRI

PERÒ SE FACCO IL COSTO E  
 LO MOLTIPLICO. PER TRE  
 VOLTE VIENE DI PIÙ DI QUELLO  
 DA € 6

Fig. 14 – Un protocollo errato di uno studente di 2<sup>a</sup> secondaria di primo grado



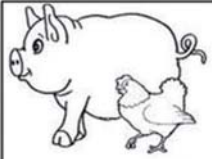
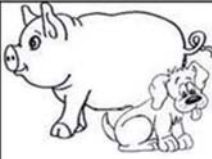

Ci si poteva aspettare qualcosa di meglio, essendo l'età degli alunni maggiore di un anno e mezzo. Forse che i ripassi delle prime due settimane di scuola non sono stati sufficienti per rimuovere le ruggini estive?

Consideriamo la prova errata di Lucilla, alunna con la media del nove: "Ho sempre aumentato di 1,50 il detersivo Bianco Pulito per tre volte e ho trovato 4,50 euro [?]. Poi ho visto che 6 euro è maggiore di 4,50 euro quindi il detersivo che costa meno è Bianco Pulito [?].

Camilla argomenta in modo troppo debole e non accettabile: "Costa meno il detersivo da 1,5 litri, perché nonostante abbia 1,5 litri ha un costo migliore rispetto a il secondo".

### D17. Gli animali

**D17. Osserva le immagini.**

 <p>Insieme pesano 30 kg</p>	 <p>Insieme pesano 34 kg</p>	 <p>Insieme pesano 10 kg</p>
---	---	---

**Quanto pesa il cane?**

**Risposta: ..... kg**

Fig. 15 – L'item D17 di grado 5 del 2018

La dimensione del quesito è quella dei problemi.

L'ambito è quello delle Relazioni e funzioni, in particolare il delicato passaggio dall'Aritmetica all'Algebra.

Per rispondere alla domanda l'allievo doveva in primo luogo interpretare la consegna fornita in parte da dati numerici e in parte dalla figura, successivamente trovare il peso del cane, sfruttando le relazioni tra questo dato e gli altri forniti dal testo.

Il quesito ne ricorda altri dello stesso tipo riportati frequentemente nei giornalini di enigmistica.

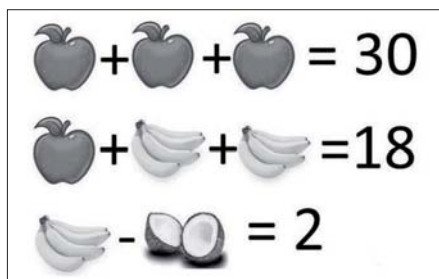


Fig 16 – Tipico esempio di gioco enigmistico

Questi quesiti possono essere modellizzati semplicemente da sistemi di equazioni di primo grado. Nel nostro caso il sistema poteva essere questo:

$$x + y = 30$$

$$x + z = 34$$

$$y + z = 10$$

Confrontando le prime due relazioni si può ricavare che  $z$  è maggiore di 4 rispetto a  $y$  e poiché la terza relazione ci dice che  $y$  e  $z$  insieme valgono 10, allora  $z$  deve essere 7 e  $y$  deve essere 3.

Oppure, sommando i dati forniti dalle due relazioni, si ottiene che il doppio di  $x$  più  $y$  più  $z$  vale 64. Togliendo da 64 il numero 10, che è il valore di  $y$  e  $z$  dato dalla terza relazione, si ha che il doppio di  $x$  deve valere 54, da cui  $x = 27$ .

In classe quinta primaria non è possibile pensare a una modellizzazione algebrica, tuttavia è possibile pensare a risoluzioni mediante tentativi e ragionamenti vari.

Tutti gli alunni delle due classi quinte prese in esame hanno risposto all’item, infatti non risultano mancate risposte: in 5<sup>a</sup>A le risposte corrette sono il 54,2% (errate sono il 45,8%); mentre per la B le risposte corrette sono il 39,1% e quelle errate il 60,9%.

L’Aritmetica nella scuola italiana viene affrontata tradizionalmente come palestra di calcoli: quasi sempre si chiede agli alunni di eseguire operazioni, calcolare espressioni, più di rado viene chiesto di trovare numeri conoscendo le relazioni che li legano tra loro.

D’altra parte le Indicazioni chiedono da tempo: “Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria”.

In questa tabella abbiamo raccolto tutti le risposte numeriche fornite dagli alunni della prima A.

Tab. 3 – Le risposte numeriche degli alunni della 5ªA all'item D17

12					X											
11					X											
10					X											
9					X											
8					X											
7					X											
6					X											
5					X	X										
4		X			X	X										
3		X			X	X										
2		X	X		X	X										
1	X	X	X		X	X										X
	Risposte mancanti	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16			

Ci consola che solo un alunno abbia fornito la risposta poco realistica di 16 kg relativa al peso del cane.

Nella classe seconda della scuola secondaria di primo grado il quesito degli animali ha ottenuto quasi il 61% di risposte corrette, nettamente meglio rispetto alla scuola primaria. Le risposte mancanti sono state tuttavia maggiori di quelle errate.

Camilla argomenta: “Ho provato a togliere 2 da 30, ma non andava bene. Allora ho tolto 3 dal peso della gallina e del maiale e veniva 27. Ho aggiunto altri 7 per [raggiungere] il peso della seconda figura e veniva 34kg. Quindi penso che il cane pesi 7 e insieme alla gallina che pesa 3 fanno 10kg, così penso che il cane pesi 7kg”.

Ecco il procedimento di Diana, che sembra procedere con dei tentativi un poco alla cieca e alla fine risponde erroneamente 5.

The image shows a student's handwritten work for item D17. At the top, it says "Risposta: .....5..... kg". Below this, there are several vertical division problems:

- $34 \overline{) 2}$  with a remainder of 17.
- $30 \overline{) 2}$  with a remainder of 15.
- $20 \overline{) 2}$  with a remainder of 5.
- $30 - 17 = 13$  (circled)
- $30 - 5 = 25$  (circled)
- $34 - 25 = 9$  (circled)
- $30 - 1 = 29$  (circled)
- $34 - 29 = 5$  (double-underlined)

Fig. 17 – Il protocollo di Diana e i suoi tentativi di risoluzione dell'item D17


Con l'intervista abbiamo ricostruito il suo procedimento. Prima Diana lavora con la divisione:  $30: 2 = 15$ ;  $34: 2 = 17$ ;  $18: 2 = 5$ .

Non sembra giustamente soddisfatta e prova con la sottrazione:

- $30 - 17 = 13$  [dalla prima figura, ma la gallina non può pesare 13kg!];
- $30 - 5 = 25$  [sempre dalla prima figura, il peso del maiale potrebbe essere 25kg];
- $34 - 25 = 9$  [dalla seconda figura, ma non sembra convinta da questo possibile peso del cane];
- $30 - 1 = 29$  [dalla prima figura, sarebbe un maiale da 29kg e un pollo da 1kg];
- $34 - 29 = 5$  [dalla seconda figura, abbiamo tolto un maiale da 29kg e ci è rimasto un cane da 5kg! Peccato che non controlla i risultati ottenuti con le informazioni della terza figura].

### D18. Palline

**D18.** Andrea ha tre sacchetti che contengono palline bianche e palline nere.



Andrea afferma: "Se metto tutte le palline dei tre sacchetti in un unico sacchetto e pesco ad occhi chiusi, la probabilità di estrarre una pallina nera è uguale alla probabilità di estrarre una pallina bianca".

Andrea ha ragione?

Andrea ha ragione perché .....

.....

.....

Andrea non ha ragione perché .....

.....

.....

Fig. 18 – L'item D18 di grado 5 del 2018

La dimensione del quesito è quella dell'argomentazione. L'ambito è quello relativo alla Statistica e probabilità.

Per rispondere alla domanda l'allievo doveva produrre un'argomentazione valida in una situazione di equiprobabilità.

L'argomento rientra pienamente tra gli obiettivi di apprendimento da raggiungere al termine della classe quinta: "In situazioni concrete, di una coppia di eventi intuire e cominciare ad argomentare qual è il più probabile, dando una prima quantificazione nei casi più semplici, oppure riconoscere se si tratta di eventi ugualmente probabili".

Le nostre due classi quinte hanno fatto registrare un andamento abbastanza omogeneo nelle risposte: quelle corrette, nella A, sono l'83,3% e nella B il 78,3%.

Il calcolo delle probabilità è stato introdotto nella scuola media italiana nel 1979 e nella scuola elementare nel 1985. Tuttavia, dopo quasi quarant'anni, continua a essere un argomento poco amato e poco trattato dalla maggior parte dei docenti. Non è questa la sede per analizzare le cause di questo fenomeno. Dobbiamo ammettere in ogni caso che la presenza di quesiti di probabilità nei fascicoli INVALSI di tutti gli anni e di tutti i livelli scolastici sta finalmente spingendo gli insegnanti verso questa branca della Matematica, così importante per la formazione del cittadino di domani.

Ecco un protocollo errato dove l'allievo ha contato tutte le palline nere e tutte le palline bianche dei tre sacchetti.

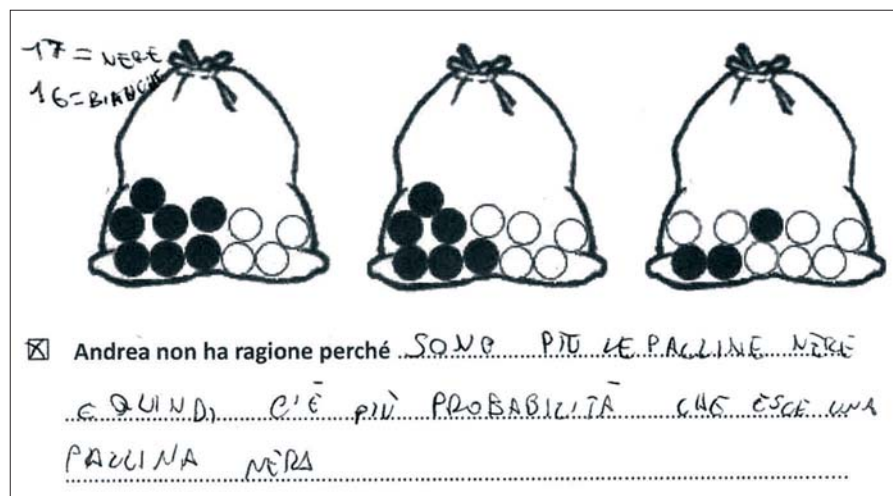



Fig. 19 – Il protocollo errato di un alunno della 5ªB

## D24. Dadi

D24. Alcuni bambini giocano con un dado a sei facce non truccato. Vince chi ha scommesso sul numero che è uscito più volte dopo 20 lanci. Dopo ogni lancio, su una tabella, mettono una crocetta (X) vicino al numero che è uscito.

Dopo 17 lanci la situazione è la seguente:

NUMERO	
1	X X X
2	X X
3	X X X
4	X X X X X
5	X
6	X X X



a. Adele dice: "È inutile continuare a giocare, tanto chi ha scommesso sul 4 ha già vinto".

Adele ha ragione? Scegli una delle risposte e completa la frase.

Adele ha ragione perché .....

.....

.....

Adele non ha ragione perché .....

.....

.....

b. Al diciottesimo lancio del dado quale numero ha più probabilità di uscire?

A.  Il 4 perché è uscito più volte nei lanci precedenti

B.  Il 5 perché è uscito meno volte nei lanci precedenti

C.  Nessuno perché in ogni lancio tutti i numeri hanno la stessa probabilità di uscire

D.  Il 3 perché è un numero fortunato

Fig. 20 – L'item D24 di grado 5 del 2018

Anche per questo secondo quesito di probabilità la dimensione è quella dell'argomentazione. L'ambito è Dati e previsioni.

Per rispondere alla domanda l'allievo doveva rispondere a due richieste:

- per la prima argomentare su situazioni di incertezza, identificando dei controesempi efficaci;
- per la seconda riconoscere che l'esito del lancio di un dado è indipendente dai lanci precedenti e produrre un'argomentazione valida in una situazione di equiprobabilità.

Anche questo quesito rientra tra gli obiettivi di apprendimento delle Indicazioni: "In situazioni concrete, di una coppia di eventi intuire e cominciare ad

argomentare qual è il più probabile, dando una prima quantificazione nei casi più semplici, oppure riconoscere se si tratta di eventi ugualmente probabili”.

Le nostre quinte hanno risposto al quesito in modo diverso e alquanto curioso. Per quanto riguarda il quesito a), il 54,2% degli studenti della 5<sup>a</sup>A hanno dato la risposta corretta, il 20,8% riposta errata e ben il 25% mancata risposta; al contrario il 73,9% degli alunni della 5<sup>a</sup>B hanno risposto correttamente, il 21,7% in modo errato e solo il 4,3% ha mancato la risposta.

Al quesito b) la 5<sup>a</sup>A ha dato il 91,7% di risposte corrette, 4,2% al distrattore A e 4,2% mancate risposte; gli altri due distrattori, B e C non hanno irretito alcun studente di questa classe. La 5<sup>a</sup>B, invece, ha dato il 73,9% di risposte corrette, il 17,4% degli studenti ha scelto il distrattore A, mentre i distrattori C e D hanno totalizzato il 4,3% ciascuno.

Il protagonista invisibile e incombente del quesito è la *legge dei grandi numeri*, della quale gli studenti italiani hanno un’idea intuitiva spesso erronea. Se tutti sono d’accordo che la probabilità di avere testa lanciando una moneta sia  $1/2$  (qualcuno risponde il 50%). Quando si chiede il risultato del lancio della stessa moneta ove si siano registrate tre croci consecutive, la maggior parte degli studenti (e diversi adulti) rispondono erroneamente che la probabilità è maggiore di  $1/2$ .

Il quesito D24 ipotizza cinque uscite del numero 4 dopo 17 lanci di un dado (il risultato medio atteso sarebbe 2,83). La prima domanda chiede, avendo ancora da effettuare tre lanci del dado, se è inutile continuare a giocare e perché. Le risposte *aperte argomentate* come questa sono le più difficili (ma forse proprio quelle di cui la scuola italiana ha più bisogno).

La seconda domanda chiede (con una certa malizia) quale numero tra i sei possibili ha la maggiore probabilità di uscita al diciottesimo lancio. La ricerca didattica individua una delle misconcezioni più diffuse in campo probabilistico quella di ritenere più probabile l’uscita dei numeri in qualche modo “ritardatari” (o in certi casi anche i numeri usciti più di frequente). Intorno a queste misconcezioni girano purtroppo in Italia grosse cifre, molti giochi d’azzardo e anche discreti guadagni da parte dello Stato.

### 3. Conclusioni

La differenza dei risultati nelle due classi quinte da noi prese in esame indicherebbe che una didattica fondata sul problem solving e sulla valorizzazione di procedimenti e argomentazione porti a lungo termine risultati migliori nelle prove oggettive esterne, in modo particolare a una maggiore comprensione dei testi e a una corrispondente riduzione delle mancate rispo-

ste.

Dall'analisi dei fascicoli delle due classi quinte si evidenzia infatti la tendenza, soprattutto nella 5<sup>a</sup>B, di lasciare in bianco le risposte relative a item, che, in realtà solo apparentemente, vengono considerati più complessi dallo studente per la modalità in cui sono posti; alcuni ragazzi sembrano spaventarsi di fronte a un quesito posto in modo diverso dal contesto quotidiano, o che richiede molta concentrazione e attenzione nella lettura, semplicemente perché lungo!

Il fatto che lo stesso docente curi l'insegnamento della Matematica e della lingua italiana sembra un altro fattore positivo.

I testi dei quesiti INVALSI si riconfermano materiali preziosi per il lavoro degli insegnanti nelle classi: da utilizzare non tanto per la valutazione, quanto come spunti per attività laboratoriali in gruppo e punti di partenza per discussioni collettive.

Sul versante della valutazione si conferma l'importanza di esaminare i procedimenti degli allievi, le loro argomentazioni scritte, evitando in ogni caso di limitarsi alla registrazione dei risultati. Molto utili si confermano anche le interviste finali, in cui l'allievo legge e spiega il proprio protocollo.

I risultati della scuola secondaria non sono a nostro parere soddisfacenti rispetto a quelli della scuola primaria. Sembra che la permanenza degli studenti nella scuola non faccia crescere più di tanto le loro competenze matematiche.

Occorre quindi ricercare un insegnamento più efficace, che miri maggiormente ad ancorare i saperi disciplinari e sviluppare competenze a lungo termine.

La nostra ultima conclusione riguarda i dipartimenti di Matematica (dove ci sono) degli istituti comprensivi, spesso inutilmente affannati nell'assemblaggio di "test d'ingresso" e di "prove di livello" per il miglioramento della scuola. Il suggerimento è quello di lavorare su pochi argomenti, scegliere materiali di qualità, sperimentarli nelle classi con diverse metodologie, riflettere collegialmente sugli errori più frequenti e sulle difficoltà degli alunni.

## Riferimenti bibliografici

- AA.VV. (2018), *Gruppo GIS-Ce-Se-Di. Valutare per insegnare. Chi ha paura delle prove INVALSI*, Torino, testo disponibile al sito: [http://www.apprendimentocooperativo.it/img/mat\\_invalsi\\_2018h.pdf](http://www.apprendimentocooperativo.it/img/mat_invalsi_2018h.pdf), data di consultazione 26/1/2021.
- Bolondi G., Fandino Pinilla M.I. (2009), "Le prove INVALSI di matematica nelle primarie, Valutazione in matematica", *Vita Scolastica*, 11, 63, pp. 15-17.



- D'Amore B. (1999), *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora, Bologna.
- Garuti R. (2013), *L'interpretazione e l'uso dei risultati INVALSI da parte delle scuole*, testo disponibile al sito: [http://www.provincia.bz.it/servizio-valutazione-italiano/download/Garuti\\_13\\_12\\_12\\_Merano2.pdf](http://www.provincia.bz.it/servizio-valutazione-italiano/download/Garuti_13_12_12_Merano2.pdf), data di consultazione 26/1/2021.
- Gauthier D. (2015), “Matematica: l'importanza di argomentare”, *Science Magazine*, 4, febbraio, pp. 28-28, testo disponibile al sito: <https://it.pearson.com/content/dam/region-core/italy/pearson-italy/pdf/scienze/Archivio%20Magazine%20in%20PDF/SCIENCE%20MAGAZINE%20-%20Archivio%20-%20PDF%20-%202004.pdf>, data di consultazione 26/1/2021.
- INVALSI (2018), *Prova matematica 5 primaria 2018*, testo disponibile al sito: [https://INVALSI-areaprove.cineca.it/docs/2018/MAT\\_G05\\_Fascicolo\\_1\\_MS2018.pdf](https://INVALSI-areaprove.cineca.it/docs/2018/MAT_G05_Fascicolo_1_MS2018.pdf), data di consultazione 26/1/2021.
- MIUR (2012), “Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione”, *Annali della Pubblica Istruzione*, numero speciale.
- Pozio S. (2015), *Strumenti per le scuole nella restituzione dei dati INVALSI*, testo disponibile al sito: [https://www.invalsi.it/invalsi/doc\\_eventi/12-2014/4/S\\_Pozio.pdf](https://www.invalsi.it/invalsi/doc_eventi/12-2014/4/S_Pozio.pdf), data di consultazione 26/1/2021.
- Tomasi L. (2017), *Riflessioni sulla valutazione in matematica e sulle prove INVALSI*, disponibile al sito: <https://events.math.unipd.it/formazione-insegnanti-2017/sites/default/files/Tomasi.pdf>, data di consultazione 26/1/2021.

## 8. *La Matematica nell'esame di Stato di fine primo ciclo e nella prova INVALSI 2018*

di Ottavio Giulio Rizzo, Paola Gario, Laura Branchetti

In questo lavoro poniamo l'attenzione sul possibile impatto delle nuove modalità di somministrazione delle prove INVALSI G8 sulla didattica in aula nel primo ciclo e sull'esame di Stato per quanto riguarda la Matematica. Dopo una riflessione sul tema, presentiamo gli obiettivi, la metodologia e i primi risultati di una rilevazione condotta a fine anno scolastico 2017/2018 con un gruppo di insegnanti di Matematica e Scienze nelle regioni Lombardia e Liguria.

*In this work we focus on the possible effects of the new ways of administering the G8 INVALSI tests on Mathematics in-the-classroom teaching and on the middle school final exams. After a reflection on the topic, we describe the goals, the methodology and preliminary results of the first part of a long-term research, carried out at the end of the 2017/2018 school year with a group of middle school Mathematics teachers in the regions Lombardia and Liguria (Italy).*

### **1. Introduzione**

Gli ultimi quadri di riferimento per la prova INVALSI di Matematica (INVALSI, 2018b) invitano esplicitamente «a riflettere sull'importante effetto di ricaduta che il complesso delle prove delle Rilevazioni nazionali ha sull'intero sistema scolastico e sulle sue scelte didattiche». Scopo di questo lavoro è presentare l'idea complessiva e i primi passi di una ricerca in corso che esplora queste ricadute nell'ambito della Matematica, con particolare attenzione all'esame di Stato conclusivo del primo ciclo d'istruzione, all'interno di un progetto di ricerca-azione rivolto agli insegnanti di Matematica e Scienze della scuola secondaria di primo grado.

Ogni cambiamento sistemico produce ripercussioni sulla didattica d'aula e sulle prove cui compete la valutazione finale degli apprendimenti. Le modifiche cui sono state sottoposte le prove INVALSI G8, alla fine del primo ciclo, ci hanno motivati a porre l'attenzione su questo possibile impatto dal momento che tali prove, fin dalla loro introduzione, hanno interrogato il mondo della scuola in modo significativo producendo discussioni, riflessioni, confronti vivaci – e anche molto vivaci! – tra i soggetti protagonisti, con un indotto di attività di formazione e di cambiamenti nella prassi didattica, sia di contenuto sia di metodo.

Ci è parso dunque interessante costruire un'occasione di riflessione sull'esperienza passata per metterla a confronto con quella del presente, raccogliendo innanzitutto le opinioni dei docenti di Matematica che hanno fatto parte delle commissioni del nuovo esame di Stato (2018). Abbiamo così deciso di approfittare di questa discontinuità per proporre un'iniziativa di ricerca e di formazione rivolta agli insegnanti di Matematica finalizzata all'elaborazione di buone pratiche per salvare gli elementi dell'esperienza passata riconosciuti come positivi (noi pensiamo che ve ne siano) e mettere i soggetti in grado di riconoscere le possibilità che il nuovo scenario può aprire, per approfittarne e per volerlo al meglio.

Sono stati coinvolti docenti in servizio nelle scuole del territorio delle città metropolitane di Milano e di Genova o in altre province lombarde. L'iniziativa, che affianca le attività di accompagnamento e di monitoraggio sul tema promosse dagli Uffici scolastici regionali delle diverse realtà territoriali, mira a consolidare e a rafforzare la collaborazione scuola-università al fine di attivare processi di reciproca crescita professionale.

In questo articolo verranno presentati: il quadro normativo, gli interrogativi e le riflessioni che hanno motivato la creazione di un gruppo di ricerca-azione, la metodologia della fase preliminare della ricerca e alcune riflessioni a partire dalle risposte degli insegnanti, che possono orientare i passi futuri del lavoro del gruppo e aprire una riflessione anche coinvolgendo altre sedi e altri soggetti interessati a queste tematiche.

## **2. Il quadro normativo**

Le norme in materia di valutazione e certificazione delle competenze nel primo ciclo ed esami di stato (d.lgs. 62/2017) prevedono che dall'anno scolastico 2017/2018 le prove INVALSI non facciano più parte dell'esame di Stato: il sostenerle ne costituisce solo un indispensabile requisito d'accesso. A questa novità, che di per sé già pone molti interrogativi, si è aggiunta la

nuova modalità di somministrazione computer based (o CBT, *Computer based test*) e l'anticipo al mese di aprile.

Non essendo più la prova INVALSI parte integrante dell'esame di Stato, essa rilascia una certificazione separata che affianca quella dei docenti della Commissione, ai quali compete in toto la valutazione finale degli alunni, senza condizionarla direttamente.

Sul fronte del rinnovato esame di Stato conclusivo del primo ciclo di istruzione (DM 741/2017), l'art. 8 chiarisce gli obiettivi generali delle prove scritte e fissa alcuni aspetti a cui la commissione d'esame, su indicazione dei docenti della disciplina, deve attenersi nella stesura delle tracce. Per quanto riguarda la Matematica, gli obiettivi generali devono essere dispiegati nelle quattro aree (o ambiti, secondo la terminologia INVALSI): Numeri; Spazio e figure; Relazioni e funzioni; Dati e previsioni. Stabilisce la tipologia degli esercizi che possono essere proposti distinguendoli in: a) problemi articolati su una o più richieste; b) quesiti a risposta aperta. Per la preparazione delle tracce scritte la commissione potrà «fare riferimento anche ai metodi di analisi, organizzazione e rappresentazione dei dati, caratteristici del pensiero computazionale». Infine, viene posta la questione dell'indipendenza reciproca degli esercizi con la precisazione che «qualora vengano proposti più problemi o quesiti, le relative soluzioni non devono essere dipendenti l'una dall'altra, per evitare che la loro progressione pregiudichi l'esecuzione della prova stessa».

Le “Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione” (2012) elencano undici traguardi di competenze, assieme a un elenco di quarantacinque obiettivi di apprendimento. Per comodità li riportiamo qui di seguito utilizzando la notazione di INVALSI (2018) che è difforme da quella della piattaforma GESTINV 2.0 (Bolondi, Ferretti e Gambini, 2017) dove TS-XII sta per T1, TS-XIII sta per T2 e così via:

- T1: l'alunno si muove con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, ne padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e il risultato di operazioni;
- T2: riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi;
- T3: analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni;
- T4: riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza;
- T5: spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati;
- T6: confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi;

- T7: produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (per esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione);
- T8: sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di un'argomentazione corretta;
- T9: utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni,...) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale;
- T10: nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, ...) si orienta con valutazioni di probabilità;
- T11: ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla Matematica attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà.

### 3. Quadri teorici di riferimento

Il nostro progetto di ricerca, per quanto riguarda il lavoro collettivo tra insegnanti, farà riferimento alla teoria dell'attività (Engeström, 1999) per quanto riguarda l'attività sociale di costruzione dell'artefatto Prova di stato al fine di ottenere una valutazione conclusiva del percorso scolastico. La teoria dell'attività è una «teoria psicologia e multidisciplinare con un'enfasi naturalistica che offre un quadro concettuale per descrivere le attività e offre delle lenti prospettive sulla pratica che legano gli individui e i sistemi sociali» (Barab, Evans e Baek, 2004, citato da Núñez, 2009, traduzione degli autori). Nel modello teorico, il cui schema è riassunto in fig. 1, nel nostro contesto l'esito è la prova di stato somministrata agli alunni di una data scuola, che costituisce la comunità; le regole sono quelle esplicite e cogenti della normativa ministeriale (in particolare il DM 741/2017), quelle esplicite e indicative delle Indicazioni nazionali o dei Quadri di riferimento delle prove INVALSI di Matematica, quelle implicite imposte dalla comunità sotto forma di prassi.

Un importante punto di vista sulle scelte degli insegnanti è quello proposto dai numerosi lavori di ricerca, a livello internazionale, sulle convinzioni degli insegnanti di Matematica (vedi in particolare Goldin *et al.*, 2016) in particolare quelle relative a cosa sia la Matematica, come si valuti efficacemente un apprendimento di Matematica, cosa sia più importante prendere in considerazione se si presenta una tensione tra aspetti pedagogici-educativi in senso ampio e didattici, nel senso della didattica disciplinare (vedi, fra gli altri, Fennema e Franke, 1992; Törner, 2002). Al contempo, è necessario ricordare anche i recenti studi sulla contrapposizione dialettica fra convinzioni

professate e pratica perché, come ricorda Leatham (2006): «dobbiamo avere interpretato scorrettamente le implicazioni di quei convincimenti, a meno che ci siano altri convincimenti che hanno preso la precedenza» (traduzione ed enfasi degli autori), dove l'ipotesi di alterità viene ribadita da Cross Francis (2015) come spiegazione di un'inconsistenza solo apparente. Va infine ricordato che se non è in generale possibile separare convinzioni personali da convinzioni del gruppo sociale di riferimento, essendo queste il prodotto di interazioni sociali (Hoyles, 1992), ancor meno è possibile farlo nella produzione collettiva di un artefatto comunitario come è una prova d'esame per un intero istituto comprensivo.

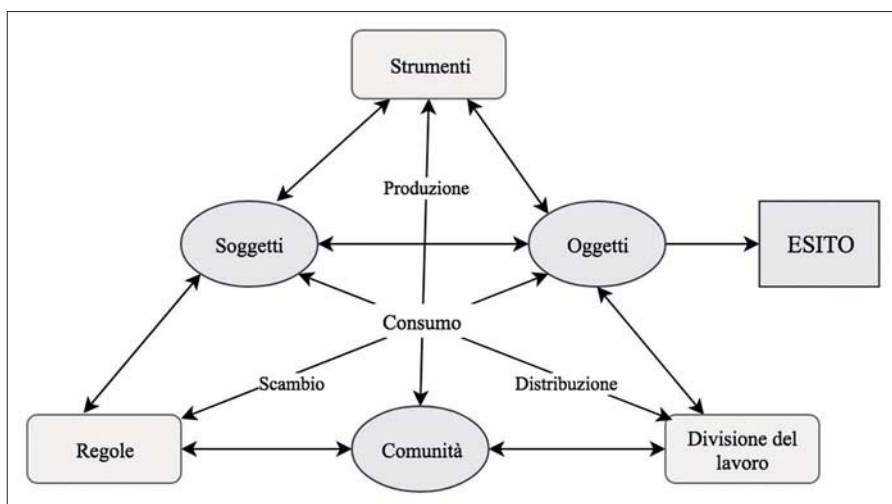


Fig. 1 – Teoria dell'attività

Inoltre, è importante prendere in considerazione il ruolo dei fattori affettivi, in particolare nel caso di valutazioni standardizzate. Uno strumento per farlo è il quadro dell'identità del docente di Matematica di Van Zoest e Bohl (2005) in cui i fattori affettivi dominano l'interazione fra gli aspetti del *Self-in-Mind* e gli aspetti del *Self-in-Community*.

#### 4. Il quadro di riferimento delle prove INVALSI di Matematica

Come già ricordato, dall'anno scolastico 2017/2018 la prova dell'ultimo anno della scuola secondaria di primo grado non fa più parte dell'esame di Stato e non incide sul voto finale dell'allievo; ciò è in linea con lo spirito e

gli obiettivi generali di una valutazione che è di sistema e non nasce per valutare il singolo studente. L'esito della prova è però restituito ai docenti e alle famiglie tramite un descrittore quantitativo su una scala crescente di valori interi da 1 a 5 (livelli) che appare nella certificazione delle competenze dello studente. Tale scelta ha naturalmente i limiti di ogni valutazione espressa su scala lineare, ma non più della valutazione che comunemente viene riportata nei documenti "in uscita" dalla scuola secondaria di primo grado e ha il pregio di descrivere il risultato della prova di Matematica in termini di competenze raggiunte, con una descrizione di che cosa è in grado di fare uno studente appartenente a un certo livello rispetto ai traguardi delle Indicazioni nazionali tramite esempi di quesiti a cui è in grado di rispondere lo studente del dato livello (INVALSI, 2018a).

Nel quadro di riferimento (INVALSI, 2018b) vengono illustrati i criteri per la costruzione della prova CBT e le scelte che portano a poter confrontare studenti su prove diverse ma equivalenti nella struttura e dal punto di vista dell'andamento statistico. Il tema dell'equivalenza tra prove è senz'altro il più complesso (si veda Boninsegna *et al.*, 2017) sia dal punto di vista della confrontabilità dei risultati da un punto di vista didattico (la variabilità degli argomenti trattati dal docente di classe e le metodologie usate possono avvantaggiare studenti che rispondono a certe domande invece che ad altre) e dal punto di vista della confrontabilità della prova con le prove dell'esame di Stato. Nondimeno, vista la meticolosa analisi degli item rispetto alle Indicazioni nazionali e l'equilibrio tra ambiti e dimensioni (Conoscere, Risolvere problemi, Argomentare) garantito dall'algoritmo che genera casualmente le prove a partire da una banca prove comune, è possibile operare questi confronti almeno in termini di obiettivi e traguardi presi in esame e valutati dalle prove. Per questa ragione la nostra analisi sarà condotta prevalentemente in termini di capacità delle prove scritte proposte per l'esame di Stato e delle prove INVALSI CBT di coprire traguardi e obiettivi e restituire un quadro complessivo della competenza matematica in uscita dal primo ciclo.

## **5. La ricerca: domande preliminari, metodologia e strumenti**

Alla base del nostro progetto di ricerca di lungo termine col gruppo di insegnanti stanno alcuni interrogativi:

- Quale impatto aveva prima e quale impatto ha ora la prova INVALSI sulla valutazione finale dei docenti? C'è stato un mutamento nella percezione dopo il passaggio alla modalità CBT, lo spostamento temporale e il fatto non facciano più parte dell'esame di Stato?

- Cosa valutano i docenti in riferimento alle Indicazioni nazionali? Quanto i docenti tengono conto nella preparazione della prova dei traguardi per lo sviluppo delle competenze?
- Quali convinzioni, nei confronti della prova INVALSI di per sé e nei confronti delle ricadute delle prove, emergono dalle scelte dei docenti? Quali rispetto all'efficacia delle prove somministrate nell'esame di Stato?
- Quali ostacoli incontrano i docenti che vorrebbero modificare la struttura tradizionale della prova?

Allo scopo di iniziare a sondare le possibili correlazioni tra i nuovi quadri normativi delle prove INVALSI e le scelte degli insegnanti relative all'esame di Stato e alla loro prassi di insegnamento, in aula e in sede di valutazione finale, su iniziativa della Sezione di Milano della Mathesis è stato predisposto un questionario (Gario, Gilberti e Rizzo, 2018) che è stato somministrato, a esami appena conclusi, e che ha coinvolto 36 docenti di Matematica e Scienze della scuola secondaria di primo grado. Per dare maggiore concretezza alle risposte al questionario, è stato richiesto agli intervistati di consegnare le tracce, o loro parti, delle prove scritte predisposte per l'esame di Stato 2018 nei rispettivi istituti di appartenenza. Non tutti hanno potuto corrispondere a questa seconda richiesta, in ogni caso l'iniziativa ha permesso di raccogliere 21 prove provenienti da 18 realtà scolastiche distinte. L'obiettivo di questa prima raccolta dati era quella di analizzare le percezioni degli insegnanti e le loro eventuali reazioni di fronte alle nuove somministrazioni, che hanno cambiato sia il ruolo della prova in termini di valutazione degli apprendimenti dei singoli studenti, sia la modalità con cui tali apprendimenti vengono rilevati. Un'analisi a priori ci ha suggerito l'importanza dell'analisi dell'eventuale impatto di questa nuova modalità (CBT, con prove diverse per ciascuno studente), in quanto ci sono due elementi di novità che potrebbero avere delle ricadute sulle scelte degli insegnanti, sia in aula che in fase di progettazione della prova: la valutazione CBT, cambiando lo strumento di rilevazione, potrebbero cambiare le strategie di risoluzione da parte degli studenti (Lemmo, Maffei e Mariotti, 2015), dunque tale scelta potrebbe avere un impatto anche sulle competenze che vengono rilevate (per esempio nell'ambito della Geometria, ma non solo). Inoltre, il fatto che non ci sia più un'unica prova – la prova INVALSI – che era in diversi contesti terreno di confronto tra docenti e occasione di riflessione critica sulle competenze valutate dalla prova, ci è sembrato un tema su cui riflettere con i docenti a partire dalle loro impressioni. Uno degli obiettivi della costituzione di un gruppo di ricerca-azione su questo tema è infatti anche quello di non lasciare che queste occasioni di confronto si riducano o scompaiano per il solo fatto che non ci sia più la prova come terreno comune di dibattito.



La sezione introduttiva raccoglie i dati personali del docente e della scuola di appartenenza. Le domande si articolano poi in tre parti. Nella prima le domande raccolgono le opinioni sui cambiamenti introdotti nella prova INVALSI 2018 di Matematica, sollecitando un confronto tra passato e presente. Nella seconda le domande riguardano la traccia scritta di Matematica per l'esame di Stato 2018 e puntano anche a sondare la soddisfazione dell'insegnante prima della sua somministrazione e di metterla a confronto con quella percepita a prova avvenuta. L'ultima pone domande sull'esperienza complessiva, che al momento dell'intervista si era appena conclusa, e chiede agli intervistati suggerimenti per altre domande e la loro disponibilità a proseguire la collaborazione per il progetto.

## 6. Alcune evidenze dai questionari

La domanda che apre il questionario chiede ai docenti come ricordano di aver accolto nel 2017 le novità riguardanti la prova INVALSI e vuole verificare eventuali cambiamenti di opinioni alla luce dell'esperienza che si era appena conclusa. Quasi il 90% dichiara di non aver cambiato opinione ma è il caso di segnalare che in questo campione solo il 18% aveva nel 2017 un'opinione contraria o fortemente contraria (l'8%) alle novità.

Per quanto sia modesta la rappresentatività del nostro campione, è da notare che se pochi sono coloro che ritengono che le nuove modalità introdotte nel 2018 portino alla scomparsa o all'affievolimento di ricadute positive della prova sulla didattica, quasi la metà degli intervistati ha sospeso il giudizio. E a questo proposito ci pare interessante riportare il timore che possa andare perduta l'«innovazione della didattica della Matematica; [l']attenzione alle competenze più che alle nozioni; [l']attenzione al problem solving più che agli esercizi ripetitivi».

La domanda “Quanto la proposta dei problemi e dei quesiti per la traccia della prova scritta di Matematica per l'esame di Stato 2018 è stata condizionata dalle prove INVALSI di Matematica? Provi a sintetizzarne modi e ragioni” ha fatto emergere in alcuni contesti la presenza di regole implicite, dettate dal contesto. Alcuni spunti di riflessione relativi all'impatto sulle prove emersi in alcune risposte sono i seguenti:

- la scuola non era pronta a cambiare. La traccia dell'esame è stata impostata in modo ancora molto tradizionale, tenendo poco in considerazione l'approccio in uso nelle prove INVALSI, nonostante il desiderio di alcuni docenti di inserire nella valutazione nuovi quesiti che valutassero in modo più simile alle prove INVALSI;

- è cominciata una riflessione ma solo tra pochi docenti e si è mantenuta una prova d'esame molto simile a quella degli anni precedenti;
- aver sottratto la prova INVALSI dal processo di valutazione dell'esame le ha rese più 'innocue' e meno rilevanti agli occhi dei colleghi, soprattutto quelli più legati ai metodi tradizionali di insegnamento e di verifica delle abilità e conoscenze in Matematica.

Le risposte dei docenti restituiscono un'immagine del dibattito nelle scuole che presta, al momento, attenzione al fatto che la prova non abbia più impatto sulla valutazione finale del singolo studente, mentre non ci sono riflessioni esplicite sulla modalità CBT e le novità che potrebbe portare. Emerge inoltre forte il fatto che venga dato all'esame di Stato un ruolo specifico e che tale prova sia molto legata alle pratiche didattiche dei docenti, dunque l'inserimento di una nuova tipologia di quesiti che provenivano da una valutazione esterna sembra creare resistenze che prevalgono sulla volontà di alcuni docenti di salvare qualcosa di positivo in termini di valutazione del raggiungimento da parte degli studenti di traguardi a cui le prove INVALSI davano molto spazio.

## **7. Le prove scritte per l'esame di Stato: spunti per la ricerca**

Questa prima indagine costituisce la materia grezza da cui prenderà le mosse il lavoro di formazione del gruppo di ricerca-azione. Per tale ragione non diamo un quadro esauriente ed esaustivo degli esiti, ma ci limiteremo alla considerazione delle nove tracce che ci sono state consegnate.

L'attribuzione dei traguardi alle tracce delle prove, a cui sopra abbiamo fatto riferimento, è il frutto di un'esercitazione svolta dagli studenti del corso di Storia e Didattica della Geometria della laurea magistrale in Matematica (Università di Milano).

A titolo puramente esemplificativo, prendendo in considerazione 36 esercizi (per un totale di 148 richieste), riportiamo alcuni risultati che potrebbero innescare importanti discussioni tra i docenti pensando agli obiettivi della prova dell'esame di Stato.

Gli esercizi si distribuiscono in modo quasi equo sulle tre aree Numeri, Spazio e figure, Dati e previsioni, anche se con una certa prevalenza della seconda; solo 4 esercizi puntano all'area Relazioni e funzioni. Questo dato pare in contrasto con quanto restituisce il questionario. Alla domanda "Nella prova scritta vi sono aree che hanno avuto maggior presenza delle altre?" i 26 che hanno risposto "no", sui 38 intervistati dal questionario, descrivono una situazione di diffusa equidistribuzione tra le diverse aree; e coloro che

hanno risposto “sì” attribuiscono alla Geometria (Spazio e figure) la maggior presenza. Questa immagine è confermata dalle risposte alla domanda successiva che chiede, questa volta, l’opinione del docente: “Delle quattro aree, ve n’è una che a suo avviso è stata trascurata rispetto alle altre?”; qui le risposte negative sono 29. La parziale discrepanza tra l’analisi delle tracce degli scritti e le risposte dei docenti potrebbe segnalare da un lato i limiti del questionario come strumento d’indagine in questa tematica così complessa, che coinvolge i docenti a diversi livelli (consapevolezza della disciplina e della valutazione, vincoli istituzionali, aspetti emotivi, convinzioni), in quanto il confine tra fatti, convinzioni, opinioni e ricordi è fragile; dall’altro emerge l’importanza di approfondire, mediante interviste e discussioni a seguire, le ragioni di questa discrasia fra percezione e realtà fattuale.

In tutte le nove tracce esaminate gli esercizi proposti portano il nome di quesito, termine che non è usato nel senso indicato dalla norma ministeriale: non si tratta di quesiti a risposta aperta ma di problemi articolati su più richieste tra cui le domande aperte sono assai rare, dell’ordine di qualche unità su 148 richieste. In generale un esercizio è riconducibile a uno solo dei 4 ambiti, che non viene indicato esplicitamente, né viene indicata la difficoltà, né si palesa una progressione di difficoltà. Mancano in generale contestualizzazioni in altre discipline scientifiche però, mentre le nuove indicazioni ministeriali hanno cancellato l’obbligo dell’esercizio di Scienze, la tradizione degli anni precedenti, che invece lo prevedeva, pare essere stata conservata dalla gran parte dei docenti intervistati. L’interpretazione di questo dato verrà sottoposta all’attenzione del gruppo di ricerca.

Per quanto riguarda l’attribuzione degli undici traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado, le tracce esaminate evidenziano i traguardi T1, T2 e T9 tra quelli più mirati. Ma il traguardo T1 è mirato solo in parte in quanto nessun esercizio richiede di stimare la grandezza di un numero. Seguono poi i traguardi T3 e T7 ma per il traguardo T3 gli esercizi non chiedono di prendere decisioni. Rari o molto rari sono i traguardi T4, T5, T6 e T10. Del tutto assenti gli esercizi che mirano ai traguardi T8 e T11.

Le criticità che abbiamo segnalato sono state condivise con i docenti coinvolti ed esse sono il punto di partenza per il lavoro del gruppo di ricerca.

## 8. Conclusioni

Il lavoro presentato è un work-in-progress per cui le conclusioni sono essenzialmente degli obiettivi per ulteriori ricerche.

Le risposte e i commenti alle domande del questionario e le tracce delle prove restituiscono molti spunti d'interesse. Si tratta in effetti di una documentazione che dà ragione d'essere agli interrogativi che hanno originato l'iniziativa. Confermandone i presupposti essenziali e modificandone nel contempo altri, ne ha stimolato di nuovi così da rendere necessario apportare cambiamenti alle linee secondo cui a priori si pensava di sviluppare il progetto. La costituzione degli intervistati in gruppo di ricerca-azione e una prima attività di formazione che prende le mosse dalle risposte sono il passo successivo del lavoro.

A una prima analisi del questionario è emerso che l'ampia riflessione che potrebbe scaturire tra i docenti relativamente alle nuove modalità di somministrazione e al nuovo ruolo della prova INVALSI al termine del primo ciclo, con focus sulla valutazione degli apprendimenti di Matematica alla fine del primo ciclo, sulla relazione con le Indicazioni nazionali e sul ruolo che viene attribuito a questa prova, al momento si sta articolando prevalentemente sulla tensione tra dinamiche interne alla scuola e le spinte all'innovazione che provengono dai documenti ministeriali, con una forte prevalenza delle dinamiche interne e delle tradizioni valutative che caratterizzano l'esame di Stato. Tale dimensione è quella che sembra influenzare maggiormente le scelte collegiali degli insegnanti relative alla prova, e al momento sembra far passare in secondo piano una riflessione sulla rilevanza e la significatività di una nuova prova che integri gli obiettivi più tradizionali della valutazione finale con le importanti innovazioni, basate anche sulla ricerca didattica, che hanno orientato la costruzione dei quesiti delle prove INVALSI. Un obiettivo della ricerca-azione sarà quella di guidare i docenti al riconoscimento e alla valorizzazione di questi elementi innovativi e alla progettazione di una prova innovativa che tenga insieme le due esigenze di tradizione e innovazione. In questo processo avranno certamente un forte impatto le convinzioni degli insegnanti, e questa ricerca ci ha fornito alcuni elementi su cui impostare la riflessione, almeno nella fase iniziale.

Poiché il questionario è stato compilato prima che gli insegnanti avessero accesso alle certificazioni delle competenze sarà necessario un follow up, riguardo alle convinzioni (o forse sarebbe meglio dire timori) che molti hanno espresso rispetto alle ricadute didattiche delle nuove modalità sia temporali che CBT, quando sarà disponibile la parte di esercizi che INVALSI renderà pubblica.

Dai pochi dati analizzati emerge un significativo disallineamento fra le convinzioni espresse rispetto alla copertura dei traguardi di competenze e all'effettiva copertura. Occorrerà innanzitutto effettuare una raccolta dati più ampia per quanto riguarda le prove dell'esame di Stato preparate nei tanti contesti scolastici con cui siamo entrati in contatto per questa ricerca, per capire la reale dimensione del fenomeno e quali sono gli elementi di maggiore interesse. Saranno inoltre condotte interviste e focus group per comprenderne più a fondo le ragioni e comprendere se e in che modo, fattivamente, un'innovazione è realmente possibile, e quali sono gli strumenti migliori per il gruppo per avviare una riflessione profonda in assenza di una prova comune, ma potendo contare su un comune Quadro di riferimento in stretta relazione con le Indicazioni nazionali e con la ricerca in didattica della Matematica. In questo progetto di ricerca i tanti risultati e prodotti di ricerca realizzati a partire dai dati INVALSI saranno utilizzati per discutere con i docenti e riflettere insieme su quello che è emerso da tali dati, a livello nazionale, e che può motivare un'innovazione a livello di valutazione finale anche in assenza del "dovere" normativo che prima era imposto alle scuole.

Una frazione significativa degli insegnanti raggiunti ha manifestato insoddisfazione per il fatto di non aver potuto offrire nelle tracce delle prove per l'esame di Stato esercizi più "simili" a quelli INVALSI, in quanto le loro argomentazioni non sono riuscite a convincere la maggior parte dei colleghi impegnati nella costruzione della prova comune: anche in questo caso le interviste saranno un mezzo per determinarne i motivi partendo dalle esperienze concrete nelle scuole.

## Riferimenti bibliografici

- Barab S.A., Evans M.A., Baek E.-O. (2004), "Activity Theory As a Lens for Characterizing the Participatory Unit", in D.H. Jonassen (ed.), *Handbook of Research on Educational Communications and Technology*, Erlbaum, Mahwah, 2<sup>nd</sup> ed., pp. 199-214.
- Bolondi G., Ferretti F., Gambini A. (2017), "Il database GESTINV delle prove standardizzate INVALSI: uno strumento per la ricerca", in P. Falzetti (a cura di), *I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca*, FrancoAngeli, Milano, pp. 43-48.
- Boninsegna R., Bolondi G., Branchetti L., Giberti L., Lemmo A. (2017), "Uno strumento per analizzare l'impatto di una variazione nella formulazione di un quesito INVALSI di Matematica", in P. Falzetti (a cura di), *I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca*, FrancoAngeli, Milano, pp. 101-109.

- Cross Francis D. I. (2015), “Dispelling the notion of inconsistencies in teachers’ mathematics beliefs and practices: A 3-year case study”, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18, 2, pp. 173-201.
- Engeström Y. (1999), “Activity theory and individual and social transformation”, in Y. Engeström, R. Miettinen, R.-L. Punamäki (eds.), *Perspectives on activity theory*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 19-38.
- Fennema E., Franke M.L. (1992), “Teachers’ knowledge and its impact”, in D.A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, Macmillan, New York, pp. 147-164.
- Gario P., Gilberti A., Rizzo O. G. (2018), “La matematica nell’esame di Stato di fine primo ciclo e nella prova INVALSI 2018: un questionario”, *Mathesis*, 38, pp. 45-50, testo disponibile al sito: [https://drive.google.com/file/d/1aKtmrLSaCdjB4AOnh\\_Vm4BohpzfcHQq/view](https://drive.google.com/file/d/1aKtmrLSaCdjB4AOnh_Vm4BohpzfcHQq/view), data di consultazione 26/1/2021.
- Goldin G. A., Hannula M. S., Heyd-Metzuyanım E., Zhang Q., Middleton J. A., Jansen, A., Lutovac, S. (2016), *Attitudes, Beliefs, Motivation, and Identity in Mathematics Education*, Springer Open.
- Hoyles C. (1992), “Mathematics Teaching and Mathematics Teachers: A Meta-Case Study”, *For the Learning of Mathematics*, 12, 3, pp. 32-44.
- INVALSI (2018a), *Esempi di domande per ambiti e livelli di competenza – MATEMATICA*, testo disponibile al sito: [https://www.proveinvalsi.net/img/pdf/Esempi\\_di\\_domande\\_per\\_ambiti\\_e\\_livelli\\_di\\_competenza\\_MATEMATICA.pdf](https://www.proveinvalsi.net/img/pdf/Esempi_di_domande_per_ambiti_e_livelli_di_competenza_MATEMATICA.pdf), data di consultazione 26/1/2021.
- INVALSI (2018b), *Quadro di riferimento delle prove INVALSI*, testo disponibile al sito: <https://invalsi-areaprove.cineca.it/index.php?form=home>, data di consultazione 26/1/2021.
- Leatham K.R. (2006), “Viewing Mathematics Teachers’ Beliefs as Sensible Systems”, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 1, pp. 91-102.
- Lemmo A., Maffei L., Mariotti M. A. (2015), *Studio preliminare sull’introduzione di Computer-Based Testing (CBT)*, Rapporto tecnico, testo disponibile al sito: [https://www.researchgate.net/publication/325314540\\_Studio\\_preliminare\\_sull'introduzione\\_di\\_Computer-Based\\_Testing\\_CBT](https://www.researchgate.net/publication/325314540_Studio_preliminare_sull'introduzione_di_Computer-Based_Testing_CBT), data di consultazione 26/1/2021.
- MIUR (2012), “Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell’infanzia e del primo ciclo di istruzione”, *Annali della Pubblica Istruzione*, Numero speciale.
- Núñez I. (2009), “Activity Theory and the Utilisation of the Activity System according to the Mathematics Educational Community”, *Educate*, December, pp 7-20.
- Törner G. (2002), “Mathematical Beliefs – A Search for a Common Ground: Some Theoretical Considerations on Structuring Beliefs, Some Research Questions, and Some Phenomenological Observations”, in G.C. Leder, E. Pehkonen, G. Törner (eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?*, Springer, Dordrecht, pp. 73-94.
- Van Zoest L., Bohl J. (2005), “Mathematics Teacher Identity: a framework for understanding secondary school mathematics teachers’ learning through practice”, *Teacher Development*, 9, 3, pp. 315-345.

## *9. L'analisi di quesiti INVALSI su aree e perimetri in verticale e in continuità tra I e II ciclo*

di Ivan Graziani, Stefano Babini

La nostra ricerca è stata condotta su studenti del I e II ciclo, in verticale, attraverso la somministrazione di un fascicolo che abbiamo assemblato con vari quesiti delle prove INVALSI degli scorsi anni su aree e perimetri.

Tali prove sono state scelte, grazie al sito [www.gestinv.it](http://www.gestinv.it), tra quelle uscite per i livelli 2, 5, 8 e 10.

Lo scopo della nostra ricerca era quello di verificare quali item, e quali aspetti in particolare, potevano creare difficoltà tra gli studenti delle diverse fasce di età.

Per tale motivo il nostro campione di ricerca è stato formato da alunni della quinta primaria, delle seconde e terze della secondaria di I grado e da studenti dei primi quattro anni della secondaria di II grado in diversi indirizzi di studio. In tutto gli studenti a cui è stato somministrato il questionario sono stati 707.

Nel nostro lavoro abbiamo considerato, in base alle Indicazioni nazionali del primo ciclo e al Quadro di riferimento INVALSI, principalmente i quesiti che riguardavano, in modo più o meno diretto, le aree e i perimetri di diversi poligoni e per l'ambito Spazio e figure abbiamo analizzato principalmente la dimensione di "Conoscere" e "Risolvere problemi".

Abbiamo effettuato un'analisi dei risultati ottenuti e un confronto con quelli ottenuti dal campione nazionale per i vari quesiti e nelle rispettive classi di somministrazione, anche per controllare la verticalità dell'apprendimento.

Dopo le somministrazioni, abbiamo coinvolto studenti e docenti delle classi, in modo laboratoriale, nell'analisi e riformulazione di alcuni quesiti nei quali si erano registrate le principali difficoltà.

Abbiamo potuto osservare che diversi errori sono stati commessi dagli studenti di 18 anni e non da quelli di 10 anni. Ciò non è quello che normal-



mente ci si aspetta, infatti dovrebbe accadere che la competenza aumenti o che, almeno, si consolidi durante il percorso scolastico. In base alle nostre interviste sottoposte ai ragazzi più grandi, abbiamo potuto dedurre che, spesso, loro rispondono in modo meccanico, senza ragionare troppo, soprattutto su quesiti che, all'apparenza, sembrano facili. Torna quindi, come sempre, alla ribalta l'importanza della comprensione del testo, competenza trasversale e fondamentale per un buon esito anche nelle prove di Matematica.

*Our research has been conducted on I e II cycle student, vertically through the submission of a dossier containing several questions of areas and perimeters from INVALSI tests from recent years. These tests were selected from [www.gestinv.it](http://www.gestinv.it) site, corresponding with levels 2, 5, 8 and 10.*

*The purpose of our research was to verify which items and which particular aspects could create difficulty among students from different age groups. For this reason, the research sample was constituted by students from fifth grade of the Primary School, second and third grades of the first level of Secondary School and the first four grades of second level of Secondary School. In total, 707 students were submitted to the survey, all of them from different study areas.*

*Based on National Indications of the first cycle and INVALSI Reference Board, our research mainly considered questions about areas and perimeters of different polygons. While for "Space and Figures", "Knowledge" and "Solving problems" parameters were the main objects analyzed.*

*In order to check the verticality of learning, we have carried out an analysis of the results obtained from this study and we have compared them with the results from the national sample. This comparison took in consideration the different questions and the respective school year where the study was applied.*

*After the tests were submitted, we placed students and teachers to work together in a practical way in order to analyze and to reformulate the difficult questions.*

*We observed that several mistakes have been made by 18-year-old students and not by 10-year-old students. This is not what is normally expected. In fact, the skill should increase or at least strengthen during schooling. Based on our interviews with older students, we could deduce that they often answered mechanically, without much reasoning, especially on questions that, apparently, seemed easy.*

*In conclusion, as always, the importance of text comprehension, a transversal skill, is crucial also for the success in Maths tests.*



## 1. Introduzione

I concetti di area e perimetro sono spesso poco interiorizzati dagli studenti e gli esercizi vengono svolti dagli studenti meccanicamente nei periodi canonici in cui si affrontano normalmente a scuola. Tuttavia, questo sapere appreso, molte volte, non riesce a diventare un sapere competente.

Abbiamo analizzato alcune prove INVALSI degli anni passati, recuperate grazie al prezioso sito GESTINV, e abbiamo costruito un fascicolo “speciale”, dedicato a area e perimetro, contenente domande di gradi scolastici differenti (G5, G6, G8 e G12) ma caratterizzate dallo stesso ambito e dagli stessi stimoli. Secondo noi questa modalità potrebbe essere utile anche nella normale prassi didattica per verificare, soprattutto per alcuni argomenti particolari, il reale livello di competenza raggiunto dagli studenti.

Per verificare quali fossero i reali nodi concettuali nei diversi ordini di scuola, abbiamo coinvolto alcuni nostri colleghi, che ringraziamo per la grande disponibilità, nella somministrazione del fascicolo “aree e perimetri” agli studenti delle classi quinte delle primarie, prime e seconde delle secondarie di I grado e prime, seconde e quarte di differenti indirizzi delle secondarie di II grado. La risposta dei colleghi coinvolti ha superato enormemente le nostre più rosee aspettative e i fascicoli che si sono stati restituiti sono stati oltre 700.

Dall’analisi dei fascicoli, abbiamo deciso di analizzare in particolare alcuni degli item che avevano avuto risultati significativi per il nostro progetto di ricerca. Abbiamo sempre confrontato i risultati anche con quelli del campione nazionale, rilevato grazie al sito GESTINV.

L’aspetto particolare della verticalità e della continuità ci ha consentito di effettuare anche alcuni confronti interessanti e di analizzare come un apprendimento di tipo meccanico non comporta, nella realtà dei fatti, il consolidamento di una competenza matematica concreta e spendibile.

## 2. Le fasi di lavoro

### *2.1. Ricerca dei quesiti in coerenza con il nostro intento*

Il nostro intento principale era quello di analizzare l’andamento di alcune prove su aree e perimetro con differenti livelli di difficoltà e in verticale, per verificare se alcuni concetti matematici potevano essere assimilati correttamente nei diversi gradi di scuola.

Per tale motivo la ricerca effettuata sul sito GESTINV si è orientata verso quesiti che avevano riscontrato particolari difficoltà quando sono stati somministrati.

Abbiamo, inoltre, deciso di costruire un unico fascicolo da somministrare senza alcuna variazione nei diversi gradi scolastici.

## ***2.2. Composizione del fascicolo***

Il fascicolo è stato composto con 18 domande equamente distribuite tra i gradi G5, G8 e G10 (con cinque domande per ciascun grado) con l'aggiunta anche di tre domande tratte dal grado G6 (corrispondente alla prima media).

Abbiamo scelto, in particolare, domande che avevano avuto risultati al di sotto delle aspettative per i diversi gradi, ma anche domande di livello superiore che potevano essere risolte anche dai gradi inferiori.

Dopo averlo assemblato, abbiamo provato a vedere se poteva essere risolto in un'ora, ma lasciando comunque la scelta della durata soprattutto per la scuola primaria.

## ***2.3. Scelta del campione***

Il campione al quale abbiamo pensato da subito era formato dalle quinte classi della primaria, dalle tre della secondaria di I grado e alle prime quattro della secondaria di II grado.

Abbiamo quindi chiesto la disponibilità ai docenti dei diversi gradi, avendo una risposta al di là delle nostre migliori aspettative.

Le scuole che sono state coinvolte per questo progetto sono state:

- scuole primarie di Castrocaro Terme (FC), di Santa Sofia (FC) e “Rivalta” di Forlì città;
- scuole secondarie di I grado di Galeata (FC), di Santa Sofia (FC), di Villafranca (FC) e “Maroncelli” e “Zangheri” di Forlì città;
- scuole secondarie di II grado – licei: artistico (Parma), classico (Imola) e scientifico (Forlì); istituti tecnici: commerciale (Forlì), per geometri (Forlì) e industriale (Forlì); istituto professionale alberghiero di forlimpopoli (fc).

Gli studenti coinvolti sono stati in totale 748: 133 delle scuole primarie, 249 delle secondarie di I grado e 366 delle scuole secondarie di II grado.

## ***2.4. Somministrazione fascicolo***

Il fascicolo è stato somministrato tra i mesi di marzo e maggio, con date scelte dai docenti somministratori. Sono stati somministrati nelle loro scuole e poi siamo passati a ritirarli per la loro correzione. Successivamente con alcuni colleghi, in particolare della scuola primaria, abbiamo analizzato alcune delle risposte fornite dagli studenti che ci avevano colpito in modo particolare.

## ***2.5. Ipotesi di ricerca e quadro teorico***

Dall'analisi dei dati ottenuti nel nostro campione abbiamo deciso di confrontare i risultati solo di alcuni item particolarmente significativi, che hanno registrato degli esiti sorprendenti, sia in positivo che in negativo.

Dalla nostra ipotesi di ricerca iniziale che supponeva di trovare differenze in verticale relative agli ordini di scuola a favore degli studenti più grandi, visti i risultati abbiamo virato verso l'analisi degli errori e la ricerca delle loro cause.

Come quadro teorico abbiamo lavorato sulle misconcezioni (Sbaragli, 2006; Fandiño Pinilla e D'Amore, 2006; D'Amore e Sbaragli, 2011), sul contratto didattico (Brousseau, 1986; D'Amore, 2003; Zan e Baccaglini-Frank, 2017) sulla lettura selettiva del testo di un problema (Zan, 2016) e sulle differenze tra lo studente abile e quello competente (Trincherò, 2017).

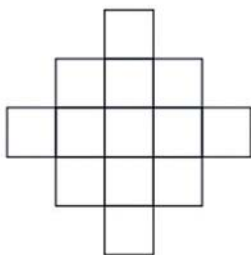
## ***2.6. Analisi dei risultati ottenuti (confronto in verticale)***

Abbiamo suddiviso gli item analizzati in due sottogruppi:

- il primo composto da 4 item tra loro correlati per argomento o stimolo iniziale;
- il secondo composto da 6 item significativi per la loro tipologia, ma senza diretta correlazione.

Per il primo gruppo abbiamo scelto un quesito uscito per il grado 10 nel 2017 (fig. 1).

**D12.** La seguente figura è composta da 13 quadrati tutti di lato 1 cm.

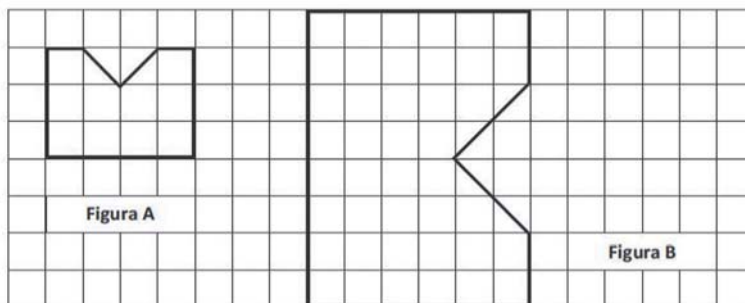


Se il lato di ciascun quadrato si dimezza allora la superficie della figura diventa ..... cm<sup>2</sup>

Fig. 1 – Item per il G10 del 2017

Lo abbiamo poi correlato con un quesito uscito per il grado 6 (prima “media”) nel 2012 (fig. 2).

**D29.** Osserva le due figure:



Indica quale delle seguenti affermazioni è vera.

- A.  L'area della figura A è la metà dell'area della figura B
- B.  L'area della figura B è il triplo dell'area della figura A
- C.  L'area della figura B è il quadruplo dell'area della figura A
- D.  L'area della figura A è due terzi dell'area della figura B

Fig. 2 – Item per il G6 del 2012

Lo stimolo era simile perché, per entrambi, si voleva vedere come si modificavano le aree dimezzando o raddoppiando i lati. Il grado di difficoltà era

però differente legato soprattutto alla tipologia di risposta, nel primo caso era più difficile perché era richiesta una risposta univoca, mentre nel secondo era da scegliere tra quattro alternative.

*Tab. 1 – Risultati del nostro campione e confronto col campione nazionale*

<i>1° item G10-2017</i>	<i>Corretta</i>	<i>Sbagliata</i>
5 <sup>a</sup> primaria	61,7%	38,3%
2 <sup>a</sup> sec. I grado	49,3%	50,7%
3 <sup>a</sup> sec. I grado	66,4%	33,6%
1 <sup>a</sup> sec. II grado	39,1%	60,9%
2 <sup>a</sup> sec. II grado	57,2%	42,8%
4 <sup>a</sup> sec. II grado	54,7%	45,3%
Campione nazionale	34,7%	65,3%

Dall'analisi dei dati per il primo item (tab. 1) emerge che, nonostante che il quesito fosse per il grado 10, i risultati migliori si hanno per la quinta primaria e per la terza secondaria di I grado. Stupisce il risultato basso della prima secondaria di II grado, anche se comunque migliore rispetto al dato nazionale. Questo rientra in una misconcezione classica che mette in relazione diretta il lato di un poligono con la sua area (Sbaragli, 2006; Fandiño Pinilla e D'Amore, 2006).

*Tab. 2 – Risultati del nostro campione e confronto col campione nazionale*

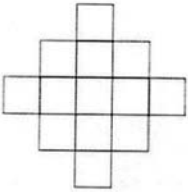
<i>2° item G6-2012</i>	<i>Corretta</i>	<i>Sbagliata</i>
5 <sup>a</sup> primaria	70,7%	29,3%
2 <sup>a</sup> sec. I grado	75,7%	24,3%
3 <sup>a</sup> sec. I grado	68,1%	31,9%
1 <sup>a</sup> sec. II grado	55,6%	44,4%
2 <sup>a</sup> sec. II grado	69,6%	30,4%
4 <sup>a</sup> sec. II grado	72,6%	27,4%
Campione nazionale	44,6%	55,4%

Anche per il secondo item (tab. 2) si rilevano risultati complessivamente migliori per il primo ciclo rispetto al secondo e migliori nella classe seconda della secondaria di I grado rispetto alla terza.

Un errore classico del primo item, soprattutto nella secondaria di II grado, è stato quello di dividere a metà l'area della figura, anche con calcoli (fig. 3).

**DOMANDA 1**

**D12.** La seguente figura è composta da 13 quadrati tutti di lato 1 cm.



$13 \cdot \frac{1}{2} =$

Se il lato di ciascun quadrato si dimezza allora la superficie della figura diventa .....  $6,5$  ..... cm<sup>2</sup>

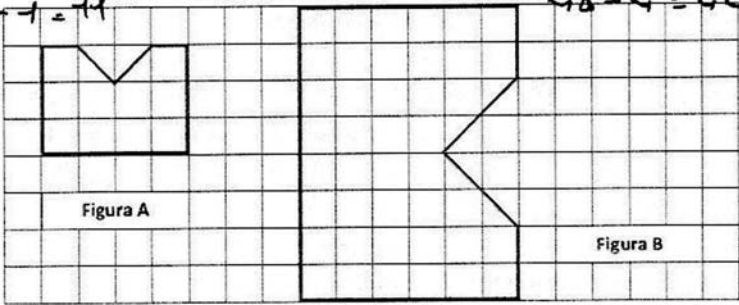
Fig. 3 – Risoluzione errata di uno studente della secondaria

Tutte le classi, in linea con il campione nazionale, hanno avuto un risultato migliore per il secondo item rispetto al primo. Questo è legato, secondo noi, principalmente alla tipologia di risposta richiesta.

Nel secondo item molti studenti sono ricorsi al conteggio dei quadratini delle due figure (fig. 4).

**DOMANDA 18**

**D29.** Osserva le due figure:



Indica quale delle seguenti affermazioni è vera.

A. L'area della figura A è la metà dell'area della figura B

B. L'area della figura B è il triplo dell'area della figura A

C. L'area della figura B è il quadruplo dell'area della figura A

D. L'area della figura A è due terzi dell'area della figura B

Fig. 4 – Esempio di conteggio eseguito da uno studente della primaria

Una strategia che invece ha condotto all'errore è stata quella di confrontare le due figure o parti di esse (fig. 5).

**D29. Osserva le due figure:**

**Indica quale delle seguenti affermazioni è vera.**

- A.  L'area della figura A è la metà dell'area della figura B
- B.  L'area della figura B è il triplo dell'area della figura A
- C.  L'area della figura B è il quadruplo dell'area della figura A
- D.  L'area della figura A è due terzi dell'area della figura B

Fig. 5 – Errore dettato dal confronto stimato fra le due figure

Abbiamo poi scelto altri due item, uno del grado 5 del 2017 (fig. 6 e tab. 3) e uno del grado 8 del 2016 (fig. 7 e tab. 4).

**D14. Osserva la figura.**

1 cm

Quanto misura l'area della parte del quadrato colorata in grigio?

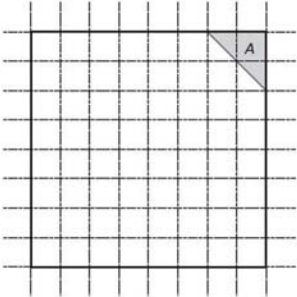
Risposta: ..... cm<sup>2</sup>

Fig. 6 – Item per il G5 del 2017

Tab. 3 – Risultati del nostro campione e confronto col campione nazionale

3° item G5-2017	Corretta	Sbagliata
5ª primaria	77,4%	22,6%
2ª sec. I grado	65,4%	34,6%
3ª sec. I grado	66,4%	33,6%
1ª sec. II grado	53,4%	46,6%
2ª sec. II grado	63,0%	37,0%
4ª sec. II grado	52,6%	47,4%
Campione nazionale	22,5%	77,5%

D8. Osserva la figura.



L'area del triangolo grigio A misura  $8 \text{ m}^2$ . Quanto misura il perimetro del quadrato?  
 Scrivi come fai per trovare la risposta e poi riporta sotto il risultato.

.....  
 .....  
 .....

Risultato: ..... m

Fig. 7 – Item per il G8 del 2016

Tab. 4 – Risultati del nostro campione e confronto col campione nazionale

4° item G8-2016	Corretta	Sbagliata
5ª primaria	56,4%	43,6%
2ª sec. I grado	41,9%	58,1%
3ª sec. I grado	43,4%	56,6%
1ª sec. II grado	34,6%	65,4%
2ª sec. II grado	44,2%	55,8%
4ª sec. II grado	57,9%	42,1%
Campione nazionale	28,1%	71,9%



Anche in questo caso, pur essendo diversa la tipologia di risposta (la prima univoca, mentre la seconda era da giustificare), veniva richiesto di ricavare l'area di una superficie partendo da alcune informazioni fornite.

I risultati rilevati per entrambi gli item (tabb. 3-4) rilevano una percentuale maggiore di risposte esatte nella scuola primaria rispetto alla secondaria di I grado.

Per il primo item ciò è accaduto principalmente per il fatto che i ragazzi della primaria hanno contato i quadretti, o scomposto il poligono in più parti (fig. 8).

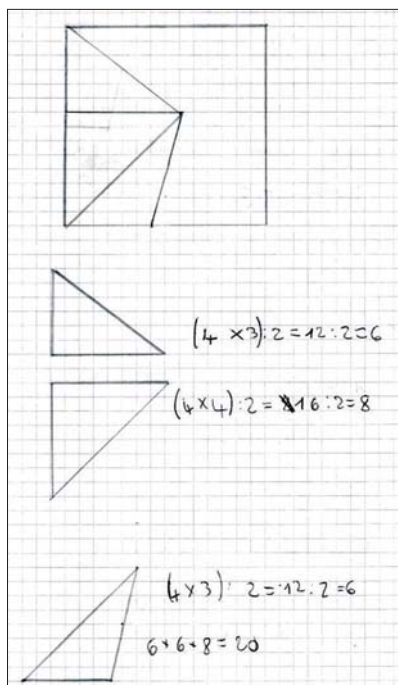


Fig. 8 – Risoluzione di uno studente di una quinta primaria

Invece quelli delle secondarie hanno “provato” a eseguire calcoli, in alcuni casi particolarmente fantasiosi. Nel primo esempio (fig. 9), lo studente ha suddiviso il poligono in un trapezio e un triangolo rettangolo, sbagliando il calcolo dell'area del triangolo.

Nel secondo (fig. 10) è stato considerato erroneamente il poligono come trapezio e utilizzato conseguentemente la formula risolutiva.

In questo quesito emerge proprio la differenza esistente tra la tipologia di studente abile e quella di studente competente, di cui parla Trincherò (2017).

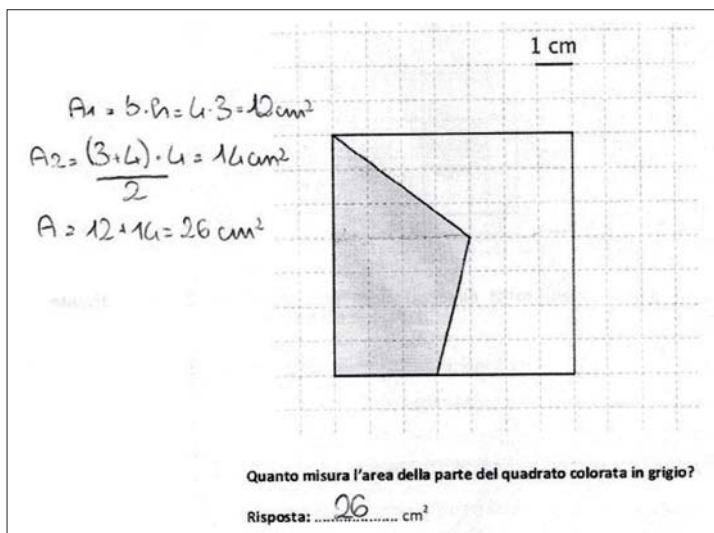


Fig. 9 – Esempio di risoluzione errata

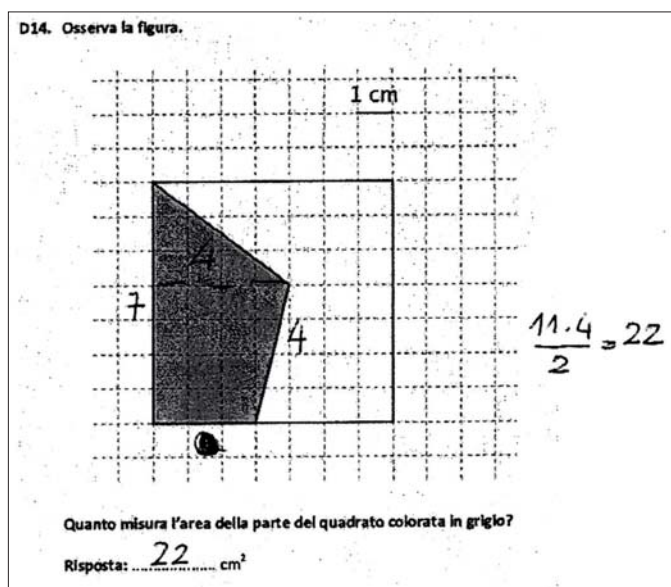


Fig. 10 – Esempio di risoluzione errata, considerando il poligono come un trapezio

Per il secondo item invece l'aspetto premiante per gli studenti della primaria è stato legato al fatto di essere stati abituati ad argomentare dalle loro insegnanti. Nei dati disaggregati delle singole scuole della secondaria di I grado

emergono, infatti, situazioni differenti per i diversi istituti e abbiamo potuto sapere dai vari insegnanti che non tutti fanno attività legate all'argomentazione sia scritta sia orale. In quelle dove tali attività vengono regolarmente svolte (scuola A) i risultati sono stati significativamente migliori (tab. 5).

Tab. 5 – Dati disaggregati per la 2<sup>a</sup> secondaria I grado e confronto col campione nazionale

4° item G8-2016	Corretta	Sbagliata
2 <sup>a</sup> sec. I grado A (34 alunni)	58,8%	41,2%
2 <sup>a</sup> sec. I grado B (19 alunni)	42,1%	57,9%
2 <sup>a</sup> sec. I grado C (22 alunni)	40,9%	59,1%
2 <sup>a</sup> sec. I grado D (61 alunni)	32,8%	67,2%
Campione nazionale	28,1%	71,9%

Gli studenti della primaria hanno trovato il lato del quadratino e poi lo hanno moltiplicato per calcolare il lato del quadrato e quindi anche il suo perimetro (fig.11).

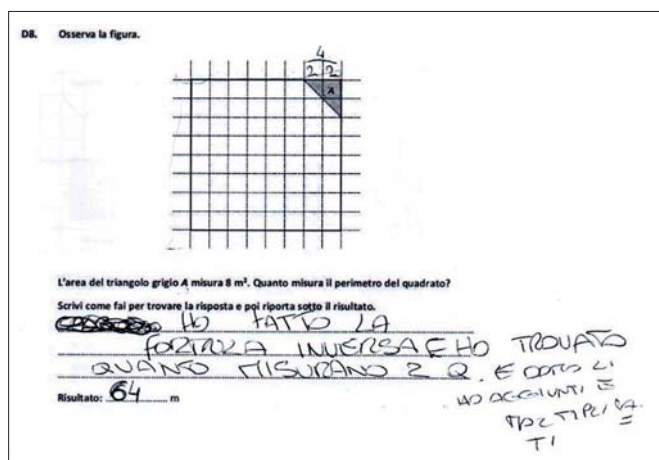
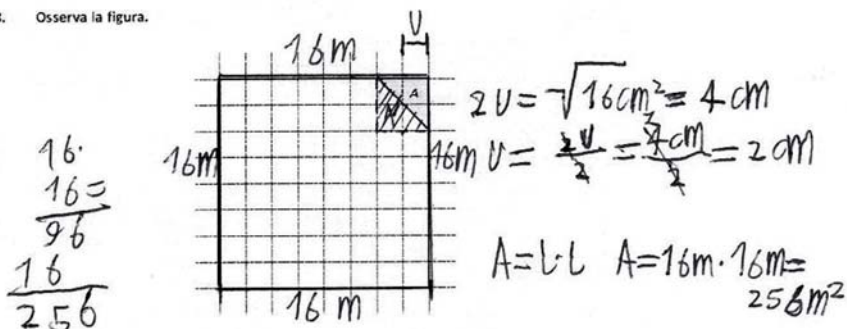


Fig. 11 – Esempio di risoluzione di uno studente della quinta primaria

Un errore tipico è stato invece quello di confondere il perimetro con l'area. Quindi, dopo aver trovato la misura del lato del quadratino, hanno calcolato la misura della superficie (fig. 12), o per una lettura selettiva del testo (Zan, 2016) o proprio confondendo il perimetro con l'area (D'Amore, 2003; Fandiño Pinilla e D'Amore, 2006).

D8. Osserva la figura.



L'area del triangolo grigio A misura  $8 \text{ m}^2$ . Quanto misura il perimetro del quadrato?

Scrivi come fai per trovare la risposta e poi riporta sotto il risultato.

se A misura  $8 \text{ m}^2$  allora A' misurerà  $8 \text{ m}^2$  anch'esso.  
 quindi il quadrato risultante ha area di  $16 \text{ m}^2$ . Per ottenere  
 la misura del lato basta ~~per~~ calcolare la radice =

Risultato:  $256 \text{ m}$

quadrato dell'area. Poi bisogna  
 dividere per due per ottenere  
 l'unità e calcolare l'area del  
 quadrato con la formula  
 $A = \text{lato} \cdot \text{lato}$

Fig. 12 – Esempio di una risoluzione errata di uno studente della secondaria

Per il secondo gruppo di quesiti abbiamo scelto quelli che hanno dato i risultati più particolari considerando i differenti gradi scolastici.

Il primo item, uscito per il grado 8 nel 2017 (fig. 13 e tab. 6), lo abbiamo selezionato perché si prestava in modo particolare a essere risolto e analizzato in verticale, sia per la somiglianza con il tangram, sia per l'analisi di parti di aree presentate come frazioni. In questo caso il contratto didattico (Brousseau, 1986; Zan, 2016), ha fatto agire gli studenti del I e II ciclo in modo diverso, i primi in modo più pratico, i secondi in modo più legato ai calcoli.

D3. Il quadrato ABCD, di lato 1, è stato scomposto come mostrato in figura.

Quale tra le seguenti espressioni corrisponde alla scomposizione del quadrato ABCD?

A.  Area ABCD =  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

B.  Area ABCD =  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

C.  Area ABCD =  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

D.  Area ABCD =  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$

Fig. 13 – Item per il G8 del 2017

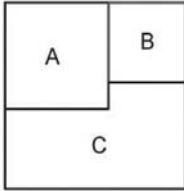
Tab. 6 – Risultati del nostro campione e confronto col campione nazionale

5° item G8-2017	Corretta	Sbagliata
5ª primaria	88,0%	12,0%
2ª sec. I grado	69,9%	30,1%
3ª sec. I grado	77,0%	23,0%
1ª sec. II grado	75,9%	24,1%
2ª sec. II grado	79,0%	21,0%
4ª sec. II grado	74,7%	25,3%
Campione nazionale	56,7%	43,3%

Anche in questo caso il risultato è stato migliore nelle classi della primaria rispetto alla secondaria di I grado, nonostante la tipologia di risposta multipla poteva aiutare a scegliere quella giusta.

Il secondo che abbiamo scelto è stato somministrato nel grado 10 nel 2016 (fig. 14 e tab. 7). Questo ci è piaciuto soprattutto perché si partiva da aree di poligoni per arrivare a calcolare il perimetro di un altro poligono.

**D9.** Un quadrato è formato da due quadrati A e B e da un poligono C, come mostrato in figura.



L'area di A è 16 e quella di B è 9.

Calcola il perimetro del poligono C.

Risposta: .....

Fig. 14 – Item per il G10 del 2016

Tab. 7 – Risultati del nostro campione e confronto col campione nazionale

6° item G10-2016	Corretta	Sbagliata
5ª primaria	57,1%	42,9%
2ª sec. I grado	63,2%	36,8%
3ª sec. I grado	73,5%	26,5%
1ª sec. II grado	38,3%	61,7%
2ª sec. II grado	54,3%	45,7%
4ª sec. II grado	53,7%	46,3%
Campione nazionale	35,2%	64,8%

Questo item all'apparenza poteva sembrare un po' troppo difficile per la scuola primaria, ma, sorprendentemente, i loro risultati sono stati migliori rispetto a quelli della secondaria di II grado.

In questo caso sono stati pochi gli studenti che hanno confuso area e perimetro, mentre l'errore più comune è stato quello di scrivere come risposta 21 anziché 22, dimenticando di considerare il piccolo segmento comune ai poligoni A e C.

Abbiamo poi selezionato un quesito composto da due item che è stato somministrato per il grado 8 nel 2014 (fig. 15 e tab. 8). Questo quesito lo abbiamo scelto perché, a causa della particolarità della richiesta del secondo item (tab. 9), si sono riscontrate alcune diversità nelle risposte date dagli studenti nei vari gradi scolastici.

**D11. Osserva i triangoli nella seguente figura.**

**a. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?**

A.  I tre triangoli hanno stessa area e stesso perimetro

B.  I tre triangoli hanno stessa area e diverso perimetro

C.  I tre triangoli hanno diversa area e stesso perimetro

D.  I tre triangoli hanno diversa area e diverso perimetro

**b. Posiziona sul lato AB del quadrato il punto P in modo che il triangolo AEP abbia area doppia del triangolo EFB.**

Fig. 15 – Quesito con 2 item per il G8 del 2014

Tab. 8 – Risultati del nostro campione e confronto col campione nazionale

8° item G8-2014 a	Corretta	Sbagliata
5ª primaria	59,4%	40,6%
2ª sec. I grado	69,9%	30,1%
3ª sec. I grado	74,3%	25,7%
1ª sec. II grado	57,9%	42,1%
2ª sec. II grado	71,7%	28,3%
4ª sec. II grado	55,8%	44,2%
Campione nazionale	44,5%	55,5%

Tab. 9 – Risultati del nostro campione e confronto col campione nazionale

9° item G8-2014 b	Corretta	Sbagliata
5ª primaria	60,2%	39,8%
2ª sec. I grado	69,1%	30,9%
3ª sec. I grado	70,8%	29,2%
1ª sec. II grado	60,2%	39,8%
2ª sec. II grado	71,7%	28,3%
4ª sec. II grado	68,4%	31,6%
Campione nazionale	59,1%	40,9%

a. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

A.  I tre triangoli hanno stessa area e stesso perimetro

B.  I tre triangoli hanno stessa area e diverso perimetro

C.  I tre triangoli hanno diversa area e stesso perimetro

D.  I tre triangoli hanno diversa area e diverso perimetro

b. Posiziona sul lato AB del quadrato il punto P in modo che il triangolo AEP abbia area doppia del triangolo EFB.

Fig. 16 – Esempio di risoluzione di uno studente

Osservando i risultati del nostro campione si può notare che la percentuale delle risposte corrette non aumenta in modo sensibile dal passaggio della primaria alla secondaria di secondo grado. In alcuni passaggi da un livello di scuola a quello successivo si è verificata una diminuzione di percentuale di risposte corrette.



La maggior parte degli errori del secondo item è collegata però a una misconcezione (Sbaragli, 2006; Sbaragli e D'Amore, 2011) molto comune tra gli studenti (fig. 16) che considera l'altezza solo quando è "verticale" (Zan e Baccaglioni-Frank, 2017).

Il quinto item selezionato, uscito nel 2013 per il grado 8, ci è piaciuto perché si doveva ragionare sulla relazione esistente tra area e perimetro (fig. 17 e tab. 10).

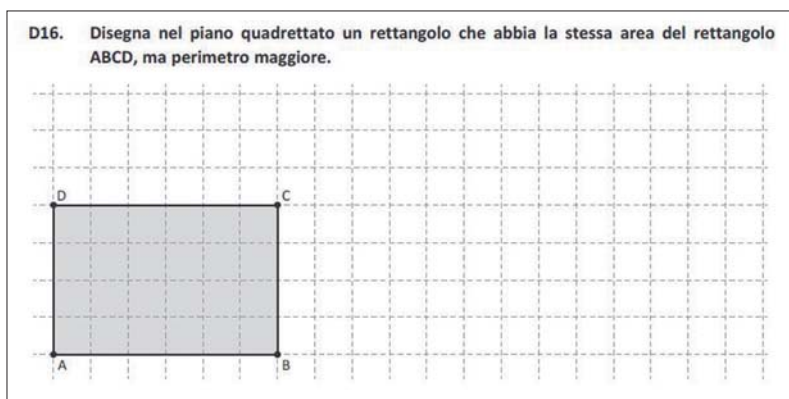


Fig. 17 – Item per il G8 del 2013

Tab. 10 – Risultati del nostro campione e confronto col campione nazionale

10° item G8-2013	Corretta	Sbagliata
5ª primaria	70,7%	29,3%
2ª sec. I grado	80,1%	19,9%
3ª sec. I grado	77,9%	22,1%
1ª sec. II grado	60,2%	39,8%
2ª sec. II grado	74,6%	25,4%
4ª sec. II grado	58,9%	41,1%
Campione nazionale	57,8%	42,2%

Questo item è stato quello in cui abbiamo trovato le risposte più fantasiose (fig. 18) e gli studenti si sono sbizzarriti a disegnare dei rettangoli molto particolari.

Infatti, nonostante la parola rettangolo comparisse ben due volte nel testo della domanda, alcuni studenti della secondaria di II grado hanno rappresentato dei rettangoli veramente particolari.

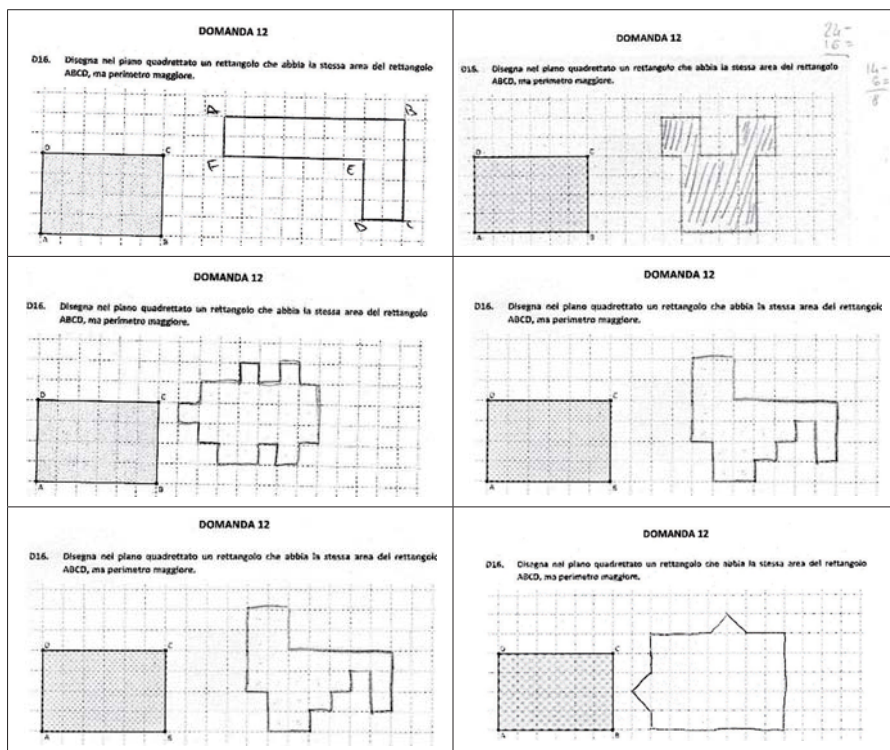


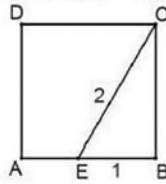
Fig. 18 – Risposte errate di alcuni studenti

Per questo item uno dei motivi ipotizzabili che può avere portato i ragazzi a sbagliare può essere ricollegabile alla “lettura selettiva del testo” (Zan, 2016).

L’ultimo item scelto è quello che ci ha stupito maggiormente per gli esiti che abbiamo rilevato nei diversi gradi. È un item uscito nel 2013 per il grado 10 (fig. 19 e tab. 11).

L’avevamo inserito nel fascicolo pur sapendo che per il grado 5 sarebbe stato molto difficile, richiedendo la conoscenza del teorema di Pitagora e il significato di radice quadrata, ma volevamo vedere se riuscivano a stimare l’area ugualmente.

D27. ABCD è un quadrato, il segmento EC è lungo 2 dm e il segmento EB è lungo 1 dm.



La superficie del quadrato ABCD misura

- A.  3 dm<sup>2</sup>
- B.  4 dm<sup>2</sup>
- C.  5 dm<sup>2</sup>
- D.   $4\sqrt{3}$  dm<sup>2</sup>

Fig. 19 – Item per il G10 del 2013

Tab. 11 – Risultati del nostro campione e confronto col campione nazionale

11° item G10-2013	Corretta	Sbagliata
5 <sup>a</sup> primaria	19,5%	80,5%
2 <sup>a</sup> sec. I grado	72,1%	17,9%
3 <sup>a</sup> sec. I grado	69,9%	30,1%
1 <sup>a</sup> sec. II grado	29,3%	70,7%
2 <sup>a</sup> sec. II grado	60,1%	39,9%
4 <sup>a</sup> sec. II grado	66,3%	33,7%
Campione nazionale	35,0%	65,0%

Siamo rimasti stupiti non solo dal fatto che circa il 20% del nostro campione della scuola primaria ha risposto correttamente, ma soprattutto per il fatto che solo il 29,3% della scuola secondaria di I grado ha risposto bene.

Come si può osservare vi è stata una diminuzione sensibile di risposte corrette nel passaggio terza secondaria di primo grado alla secondaria di secondo grado. Risultato teoricamente non atteso se si considera una progressione nell'apprendimento nel passaggio da un livello di scuole a quello successivo.

## ***2.7. Osservazione approfondita dei quesiti che hanno dato esiti interessanti e analisi di alcuni errori ripetuti***

Nel primo item analizzato, che era a risposta univoca (fig. 1 – item per il G10 del 2017), la maggior parte degli errori in tutti i gradi di scuola è stato 6,5, che consisteva sostanzialmente nel dividere a metà il numero di quadrati della figura, senza particolari ragionamenti sul significato di tale operazione.

Per il secondo item, che era a risposta multipla (fig. 2 – item per il G6 del 2012), la scelta è caduta prevalentemente sulla risposta A (l'area della figura A è metà dell'area della figura B), dettata dal fatto di aver osservato che i lati della figura A sono la metà di quelli di B.

Anche il terzo item (fig. 6 – item per il G5 del 2017) a risposta univoca ha dato un risultato errato ricorrente (22), che secondo noi è stato fatto per aver considerato il numero dei quadretti colorati senza considerare se fossero interamente colorati o solo in parte.

Nel sesto item a risposta univoca (fig. 14 – item per il G10 del 2016) la maggior parte degli errori “veniali” è stata quello di non considerare, o dimenticare, un piccolo lato di dimensione 1 e quindi rispondere 20 anziché 21.

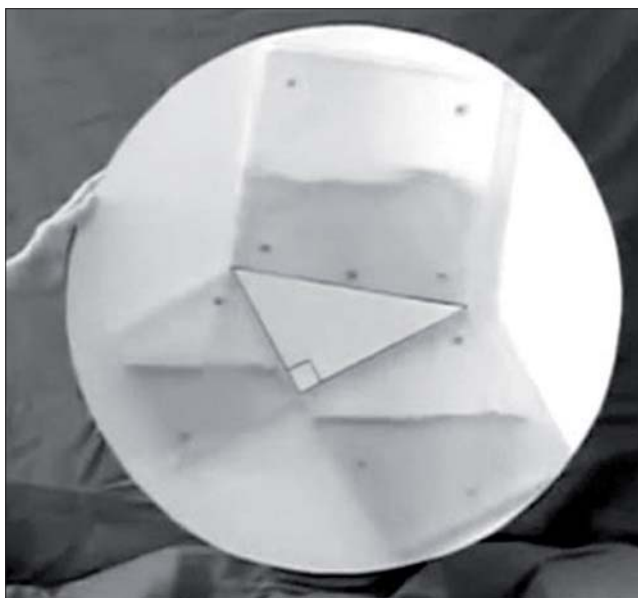
Per il settimo quesito (fig. 15 – quesito con 2 item per il G8 del 2014) per quanto riguarda il primo item, che è a risposta multipla, l'errore più frequente è stato scegliere il “distrattore” A, che sosteneva che i tre triangoli hanno stessa area e stesso perimetro, considerando solo l'uguaglianza di base e altezza, senza valutare gli altri lati dei triangoli.

Nel secondo item, gli studenti che hanno tracciato male il segmento hanno segnato il segmento perpendicolare da E ad AB, disegnando sostanzialmente un'altezza “verticale” senza però tenere conto della dimensione della base.

Il nono item (fig. 19 – Item per il G10 del 2013) è stato quello che ci ha incuriosito maggiormente, soprattutto per il buon risultato in una delle classi della scuola primaria.

Abbiamo quindi chiesto alla maestra della classe quinta dove il risultato era stato particolarmente positivo come avessero fatto a risolvere correttamente il quesito. La spiegazione data dai ragazzi è stata quella che si ricordavano della rappresentazione mobile del teorema di Pitagora (fig. 20) vista durante l'uscita didattica al Museo del Calcolo, Mateureka di Pennabilli (Rimini).

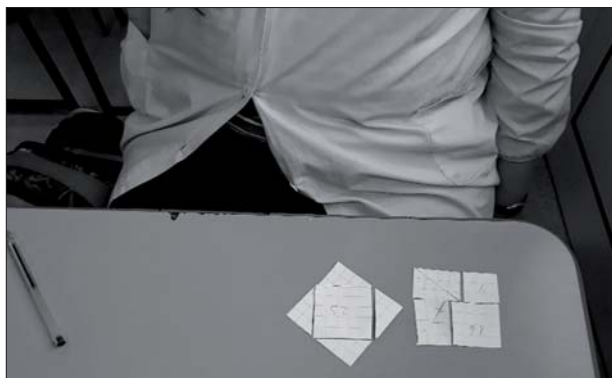
Questo potrebbe essere uno dei classici esempi di “situazioni non didattiche” riportate da Brousseau (1986) e D'Amore (2003).



*Fig. 20 – Struttura mobile per la spiegazione del Teorema di Pitagora simile a quella del museo*

In Matematica è sempre importante il principio del “se faccio imparo”, ma in molti casi anche esempi significativi e rappresentazioni dinamiche possono aiutare a interiorizzare meglio alcuni concetti.

In un'altra classe sempre della primaria avevano fatto un'attività laboratoriale sul teorema di Pitagora utilizzando 8 triangoli rettangoli congruenti (con cateti di 3 e 4 e ipotenusa di 5) e tre quadrati di lato 3, 4 e 5 (fig. 21-22).



*Fig. 21 – Attività laboratoriale sul teorema di Pitagora in una classe della primaria*

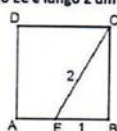


Fig. 22 – Attività laboratoriale sul teorema di Pitagora in una classe della primaria

Altri bambini hanno detto che sono andati per esclusione, “togliendo il 4 e il 5 che erano troppo grandi e quell’altro ( $4\sqrt{3}$ ), perché strano”.

L’errore più comune tra i ragazzi più grandi è stato invece proprio la scelta del risultato “strano”, facendo bene il procedimento per il calcolo della misura del lato, ma poi confondendo, anche in questo caso, l’area con il perimetro. Qui forse ha giocato un ruolo particolare trovare tra i risultati proprio la radice appena calcolata (fig. 23).

D27. ABCD è un quadrato, il segmento EC è lungo 2 dm e il segmento EB è lungo 1 dm.



La superficie del quadrato ABCD misura

A.   $3 \text{ dm}^2$

B.   $4 \text{ dm}^2$

C.   $5 \text{ dm}^2$

D.   $4\sqrt{3} \text{ dm}^2$

$\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

Fig. 23 – Esempio di risoluzione di uno studente

In questo caso è stato applicato correttamente il teorema di Pitagora, ma la risposta è stata sbagliata ugualmente.

### 3. Conclusioni

Dall'analisi dei risultati si nota immediatamente che la percentuale di risposte corrette in molti casi non accresce all'aumentare del livello di scuola. Questo perché, come detto nella premessa, l'apprendimento degli studenti è spesso dovuto all'esecuzione di esercizi ripetitivi che non porta a un apprendimento significativo.

Abbiamo osservato anche che in alcuni casi, item che potevano essere risolti anche solo attraverso un semplice conteggio, come hanno fatto negli ordini di scuola inferiori, sono stati sbagliati perché affrontati attraverso ragionamenti e calcoli più complessi di quelli richiesti.

Un'altra considerazione che possiamo fare è che alcuni concetti possono essere assimilati meglio se lo studente fa esperienze che lo colpiscono, o comunque lo affasciano, come nel caso di una visita al museo, ma sicuramente anche con attività di tipo laboratoriale.

Il laboratorio di matematica è particolare proprio perché non si realizzano manufatti tangibili, da portare a casa, ma si possono costruire saperi significativi e duraturi negli studenti.

Da osservare inoltre che, in generale, gli item somministrati hanno ottenuto risultati migliori rispetto al campione nazionale. Questo, a nostro avviso, perché la concentrazione con la quale vengono svolte le prove del "nostro fascicolo" è stata probabilmente maggiore rispetto a quella che gli studenti hanno solitamente durante la Prova nazionale.

### Riferimenti bibliografici

- Brousseau G. (1986), "La relation didactique: le milieu", *Actes de la IV<sup>ème</sup> Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, IREM, Paris, pp. 54-68.
- D'Amore B. (2003), *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*, Pitagora, Bologna.
- D'Amore B., Sbaragli S. (2011), *Principi di base di Didattica della Matematica*, Pitagora, Bologna.
- Fandiño Pinilla M.I., D'Amore B. (2006), *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici*, Erickson, Trento.
- Sbaragli S. (2006), *Le misconcezioni in aula. Articolo di divulgazione*, NRD Dipartimento di Matematica, Università di Bologna.
- Trincherò R. (2017), *Costruire e certificare competenze con il curricolo verticale nel primo ciclo*, Rizzoli, Milano.
- Zan R. (2016), *I problemi di matematica*, Carrocci, Roma.
- Zan R., Baccaglioni-Frank A. (2017), *Avere successo in matematica. Strategie per l'inclusione e il recupero*, Utet, Torino.

## *10. Formulazione degli item matematici e strategie di soluzione: alcuni esempi da uno studio empirico condotto al grado 8*

di Giorgio Bolondi, Clelia Cascella, Chiara Giberti

Questo lavoro è parte del progetto “Variazioni 2”, che ha permesso di studiare l’impatto di una variazione nella formulazione di un quesito di Matematica, sulle risposte degli studenti. Le analisi sono basate sulla somministrazione a un campione di 1.648 studenti, di quattro varianti di una stessa prova INVALSI. Le diverse forme del test contengono gli stessi quesiti: alcuni di questi sono stati variati nella formulazione mentre una parte consistente di quesiti è inserita invariata in tutti i fascicoli in modo da permettere una procedura di ancoraggio dei risultati. In questo lavoro, presentiamo l’analisi di due quesiti, entrambi proposti a seguito di variazioni del contesto. Le analisi permettono di studiare l’effetto che può avere il contesto in cui viene presentato un quesito matematico non solo sulla difficoltà percepita dagli studenti ma anche sulle strategie di soluzione che sembrano cambiare in funzione della presenza/assenza di un contesto reale.

*This paper reports on some preliminary results from the research project “Variazioni 2” aimed at understanding if and how variations of items phrasing affect students’ answers.*

*For the purposes of this paper, four anchored tests consisting of the same stem-items (i.e. items with the same question intent and the same math content but different phrasing) were administered to a sample of 1648 students attending grade 8. In this paper, we have analysed two items with different context.*

*Our analysis allows studying the effect of variations relative to the context on item difficulty, and students’ solving strategy. Results confirmed that variations in items context strongly affect both students’ solving strategies and item difficulty.*



## 1. Introduzione

Quali e quanti fattori influiscono sulla probabilità che uno studente dia una risposta corretta a un item e che ruolo essi hanno nell’attivazione di una specifica strategia di soluzione anziché di un’altra?

Per rispondere a questa domanda nel progetto denominato “Variazioni 2” (Bolondi, Cascella e Giberti, 2020), è stato condotto uno studio sperimentale su un campione probabilistico di studenti di grado 8, stratificato sia per regione sia per background socio-culturale della famiglia dello studente. A partire da una prova INVALSI somministrata a livello censuario nello stesso grado scolastico (che ha coinvolto circa 500.000 studenti), sono state costruite 3 ulteriori prove, distribuite agli studenti, insieme a quella originale INVALSI, secondo un meccanismo di somministrazione a spirale che consente di somministrare le quattro prove agli studenti in modo casuale, sia all’interno della stessa classe, sia tra classi diverse. Questo meccanismo di somministrazione rende probabilisticamente equivalenti – cioè direttamente comparabili – i gruppi di soggetti che rispondono a test diversi: le differenze osservate in relazione a due o più prove possono quindi essere considerate un’indicazione diretta della differenza in termini di difficoltà tra di esse. Inoltre, al fine di garantire la comparabilità diretta tra le risposte date dagli studenti alle prove, ciascuna di esse contiene un nucleo di item invarianti e comuni a tutte, utilizzati per ancorare ed equalizzare i test su una sola metrica, uguale per tutte le prove, attraverso la quale esprimere lungo lo stesso tratto latente le difficoltà di tutti gli item e le abilità di tutti gli studenti coinvolti nella rilevazione. Infine, per capire quali elementi della formulazione attivino strategie di soluzione differenti, ogni item (a meno di quelli utilizzati per ancoraggio) è stato proposto in ciascuno dei quattro fascicoli variando un solo elemento della formulazione da un fascicolo all’altro.

Ogni variazione è stata concepita per investigare l’effetto sulla performance: 1) di specifiche misconcezioni; 2) del contesto (reale o matematico); 3) dei dati numerici (per es. diversi registri semiotici o diversi valori numerici); 4) del formato di risposta; 5) delle rappresentazioni grafiche.

In questo articolo, la metodologia e i risultati del progetto “Variazioni 2” verranno utilizzati per studiare l’effetto che può avere il contesto in cui viene presentato un quesito matematico non solo sulla difficoltà percepita dagli studenti ma anche sulle strategie di soluzione messe in atto in funzione della presenza/assenza di un contesto reale. Questo studio, sebbene certamente necessiti di un approfondimento qualitativo (per es., interviste dirette a studenti e insegnanti), consente già di osservare l’effetto diretto di ciascuna variazione in termini di performance e fornisce un ricco set di informazioni

attraverso cui verificare le ipotesi fatte in sede di costruzione delle domande circa gli errori e le strategie risolutive più frequenti.

## 2. Quadro teorico

### 2.1. *Variazioni nella formulazione di un quesito matematico*

Ogni volta che gli studenti affrontano una domanda in Matematica, molteplici fattori influiscono sulle loro risposte perciò, soprattutto quando una domanda fa parte di una prova standardizzata, il *question intent* deve essere ben definito e preciso; solo così si può affermare che lo studente che risponde correttamente ha raggiunto la conoscenza/competenza per la cui valutazione l'item è stato costruito. Restano però diverse componenti che condizionano la risoluzione di un quesito e che esulano dal *question intent*: prima fra tutti la formulazione. Se un quesito risulta complesso come formulazione, lo studente potrebbe avere difficoltà a comprenderlo, rispondendo in maniera errata per questo motivo.

Le ricerche sul tema della formulazione di un quesito in Matematica e quelle specifiche sui cosiddetti *word problems* (problemi verbali) sono numerose nel campo della didattica: per esempio, una recente review della letteratura di queste ricerche nel campo dell'aritmetica è stata proposta da Daroczy *et al.* (2015).

La letteratura del settore non si è occupata solo di variazioni nella formulazione nel caso di *word problems* e in contesto aritmetico. L'influenza della comprensione del testo e della maggiore o minore reperibilità delle informazioni è fondamentale nella risoluzione di un qualsiasi problema. Si può pensare che anche piccole variazioni del modo in cui un problema viene posto, possano quindi modificare sensibilmente le risposte degli studenti, andando a incidere anche sulle strategie risolutive adottate (D'Amore, 2014). A tal proposito, Duval nel 1991 definisce queste modifiche nella formulazione usando il termine variabili redazionali, termine ripreso poi da Colette Laborde (1995) con l'intento di includere in questa categoria di variazioni anche quelle di tipo non verbale, come per esempio l'introduzione/modifica di immagini.

Il problema maggiore che queste ricerche si trovano ad affrontare è come confrontare due diverse formulazioni di uno stesso quesito: non è possibile, infatti, chiedere a uno studente di rispondere a due versioni di una stessa domanda senza che la risposta alla seconda versione somministrata sia influenzata dall'aver già risposto alla prima (Branchetti e Viale, 2015; Bolondi,

Branchetti e Giberti, 2018; Bolondi, Cascella e Giberti, 2020). Questa problematica insorge particolarmente in ricerche in cui una o più versioni dello stesso quesito vengono proposte allo stesso gruppo di studenti (e.g. Lepik, 1990; Cummins *et al.*, 1988; De Corte, Verschaffel e De Win, 1985; Thevenot *et al.*, 2007) e, in alcuni casi, viene parzialmente risolta cambiando l'ordine in cui i quesiti vengono sottoposti agli studenti (e.g. Vicente, Orrantia e Verschaffel, 2007) oppure lasciando trascorrere del tempo tra il momento in cui gli studenti affrontano la prima versione e il momento in cui affrontano la seconda (De Corte *et al.*, 1985). Un altro approccio a questa problematica, riscontrato in diverse ricerche, consiste nel somministrare le diverse versioni a diversi gruppi di studenti (Nesher, 1976) perdendo però così in termini di comparabilità dei risultati, oppure svolgendo ricerche qualitative basate su interviste e analisi di protocolli (e.g. Spanos *et al.*, 1988).

## ***2.2. L'influenza del contesto nella risoluzione di un quesito matematico***

La formulazione di un quesito viene sicuramente influenzata dalla presenza/assenza di un contesto reale in cui viene posto il problema matematico. L'influenza della presenza di un contesto reale e della tipologia del contesto stesso sulle risposte degli studenti è già stata ampiamente studiata nella ricerca in didattica della Matematica.

Nel 1992 Stern e Lehrndorfer hanno mostrato che un problema posto in un contesto familiare per gli studenti può essere di grande aiuto per la comprensione e la risoluzione; tematica trattata anche approfonditamente da Roth nel 1996 proprio focalizzandosi il suo studio su studenti frequentanti il grado 8. Diversi studi, più recenti, hanno analizzato anche quanto l'introduzione di un contesto potesse cambiare la difficoltà di un problema (e.g. Léger *et al.*, 2002). Van Den Heuvel-Panhuizen nel 2005 analizzato tre principali funzioni che la presenza di un contesto potrebbe avere sul processo risolutivo degli studenti. In particolare, il contesto potrebbe: migliorare l'accessibilità ai problemi, contribuire alla trasparenza e all'elasticità dei problemi, e suggerire strategie risolutive agli studenti.

Anche nelle valutazioni standardizzate il contesto in cui viene proposto un quesito risulta molto importante e la vicinanza/lontananza del contesto dalle esperienze reali dello studente devono essere tenute fortemente in considerazione, visto che la stessa prova viene svolta da studenti con background anche molto diversi. Nelle indagini OECD-PISA, per esempio, il ruolo del contesto nei quesiti matematici è fondamentale, e viene esplicitato anche nella prima frase della definizione di *mathematical literacy*: «Mathematical

literacy is an individual's capacity to formulate, employ and interpret mathematics in a variety of contexts» (OECD, 2016).

Questo articolo propone l'analisi di due quesiti tratti dalle prove INVALSI di Matematica. Ogni quesito è stato proposto agli studenti in varie forme, a seguito di variazioni sul contesto del problema, ma senza modificarne il contenuto matematico e il *question intent*. Attraverso la metodologia utilizzata (Biondi, Cascella e Giberti, 2020) è possibile studiare l'influenza della presenza/assenza del contesto in un quesito e misurarne gli effetti sulle performance degli studenti. Inoltre, l'analisi quantitativa dei dati e lo studio dei *distractor plot* delle domande nelle diverse forme, permettono di fare delle ipotesi anche sul diverso approccio degli studenti nell'approccio a un problema in contesto o senza contesto e capire se questo porta a diverse strategie risolutive.

### 3. Metodo: il progetto “Variazioni 2”

Il progetto “Variazioni 2” si propone di studiare variazioni nella formulazione di alcuni quesiti superando le limitazioni descritte precedentemente attraverso una metodologia basata sull'*Item Response Theory* e l'ancoraggio di diverse prove.

Per studiare l'impatto di determinate variazioni nella formulazione di un item, nel progetto “Variazioni 2”, si è scelto di partire da un test di Matematica che INVALSI ha somministrato nel 2011 agli studenti della 3<sup>a</sup> secondaria di I grado. A partire da questa prova, sono stati sviluppati tre ulteriori test, contenenti una parte di domande invariate rispetto al test originale, che costituiscono il *Core Test* (CT), e altri quesiti inseriti nei diversi fascicoli in forme diverse, avendo effettuato variazioni di una specifica caratteristica nella formulazione che non portasse però a modificarne il *question intent*.

Le tre forme realizzate sono state somministrate insieme alla versione originale del 2011, con un meccanismo a spirale, a un campione probabilistico di 2000 studenti della 3<sup>a</sup> classe della secondaria di I grado. La somministrazione a spirale è stata concepita per fare in modo che tutti gli studenti affrontassero la prova nella stessa situazione, condizione questa necessaria «per giustificare l'affermazione secondo cui le calibrizioni degli item sono confrontabili da un gruppo di esaminandi a un altro e che gli esaminandi siano confrontabili anche quando rispondono a set diversi di item» (Wolfe, 2004).

Inoltre, sebbene gli studenti che hanno risposto alle diverse versioni di un item non siano gli stessi, le loro risposte alle diverse versioni possono essere comunque considerate confrontabili grazie alla presenza dei quesiti che formano il *Core Test*. Il *Core Test* è costituito da un corposo set di item

inseriti in ciascuno dei quattro fascicoli, invariati nella forma, nel contenuto e nella posizione all'interno di ciascuna delle prove, rappresentativo sia in termini di contenuto che di funzionalità psicometrica dell'intera prova (Kolen e Brennan, 2004). Abbiamo definito *Core Test* (CT) questo insieme di quesiti, composto da due sub-set di item, di cui uno somministrato all'inizio della prova e l'altro composto da item dislocati all'interno del fascicolo, nella stessa posizione in ciascuna delle quattro forme.

La necessità di ancorare le prove deriva dalla consapevolezza che anche piccole variazioni nella formulazione di un item cambiano l'item stesso e quindi possono alterarne la funzionalità (per es., Boninsegna *et al.*, 2017; Bolondi, Branchetti e Giberti, 2018). Inoltre, è sempre impossibile essere certi, *a priori*, dell'equivalenza in termini di abilità dei sotto-gruppi di studenti a cui vengono somministrate prove diverse. In questi casi, le differenze tra le medie (o tra qualsiasi altro parametro di interesse teso a investigare differenze nelle performance) potrebbero essere frutto di una combinazione di differenze fra le forme e/o tra il livello di abilità degli studenti piuttosto che un reale effetto della variazione apportata all'item sulla sua funzionalità. Abbiamo quindi inserito un nucleo di item invarianti e abbiamo equalizzato le prove nel framework del modello di Rasch. Infatti, l'equalizzazione (*equating*) è «una procedura statistica usata per aggiustare i punteggi ottenuti su prove diverse in modo che le forme possano essere utilizzate intercambiabilmente» (Kolen e Brennan, 2004, p. 2).

Per l'analisi degli item, oltre a presentare le misure di *infit* calcolate con ConQuest 4.0, abbiamo confrontato la curva caratteristica (plottata da RUMM2030) di ogni item in ciascuna delle quattro versioni e interpretato gli scostamenti tra la spezzata empirica (data dall'insieme degli *observed scores*, cioè delle risposte date dagli studenti al test) con la curva teorica calcolata dal modello (che, per ciascun item, stima la probabilità di una risposta corretta in funzione del livello di abilità degli studenti) (Casella, 2016; Bolondi e Casella, 2017).

In particolare, abbiamo confrontato, le quattro versioni di ciascun item, attraverso alcuni indici calcolati da ConQuest.

Ci riferiamo in particolare a:

- 1) l'indice di discriminatività, attraverso cui viene valutata la capacità dei singoli item di differenziare i soggetti lungo il tratto latente in ragione della quantità di proprietà da questi posseduta, cioè in funzione della loro abilità. Per la valutazione dell'indice di discriminazione ( $I_d$ ), si considerano i seguenti intervalli (Barbaranelli e Natali, 2005):
  - a)  $I_d > 0,40$  – ottimo (item da non revisionare);
  - b)  $0,30 \leq I_d < 0,40$  – buono (revisioni minime);

- c)  $0,20 \leq Id < 0,30$  – sufficiente (revisioni parziali);
  - d)  $0,20 < Id$  Insufficiente (item da riformulare o da rimuovere);
- 2) l'indice di correlazione punto-biseriale, definito come la correlazione tra i punteggi ottenuti dai soggetti a un item e il punteggio totale dei rispondenti su tutti gli item;
  - 3) la percentuale di risposte corrette registrate per ciascuna opzione di risposta;
  - 4) l'indice di *infit*, ossia il weighted MNSQ, che restituisce una misura della bontà di adattamento di ciascun item al modello. Esso mostra quindi la quantità di casualità della misura o, detto in altri termini, la quantità di distorsione del sistema di misurazione. Il suo valore atteso è unitario ma la grandezza e la direzione di ogni spostamento fornisce importanti indicazioni circa la funzionalità di ciascun item (Bolondi e Cascella, 2017): valori inferiori a 1 indicano infatti osservazioni troppo predicibili e quindi ridondanza nel modello; mentre, valori superiori a 1 indicano invece scarsa predicibilità, dovuta spesso alla presenza di un rumore non modellato che compromette l'adattamento dei dati al modello.

Il contributo di RUMM2030 è, invece, prevalentemente legato agli output grafici forniti dal pacchetto. Ci riferiamo in particolare a:

- 1) la curva caratteristica (ICC) di ciascun item che fornisce una stima della probabilità di dare una risposta corretta a ciascun item in funzione dell'abilità relativa dello studente (ossia della sua abilità calcolata sull'intero test in relazione alla difficoltà di ciascun item). RUMM2030 ha il pregio di suddividere il campione totale di studenti in gruppi di abilità simile e di indicarli intorno alla curva caratteristica dell'item (sulla quale giacciono le stime della probabilità di una risposta corretta per ciascun livello di abilità) e alla spezzata empirica (sulla quale giacciono invece i punteggi osservati). L'insieme di tutte le ICC forma la TCC, ossia la funzione informativa dell'intero test;
- 2) i distractor plot che mostrano, per gli item a risposta multipla, l'andamento di ciascun distrattore in funzione del livello di abilità dei rispondenti.

## 4. Quesiti analizzati

### **Domanda D6**

Il primo quesito analizzato in questo lavoro è tratto dalla prova INVALSI di Matematica somministrata in 5<sup>a</sup> primaria nel 2010; considerando che la sperimentazione del progetto “Variazioni 2” è stata svolta al grado 8 (3<sup>a</sup> secon-

daria di primo grado), ci si aspetta che risulti più semplice rispetto ai risultati del *main study* INVALSI.

Fascicolo F1 (versione originale)
D6. Per incorniciare una fotografia rettangolare è stato utilizzato 1 metro di cornice. Un lato della fotografia misura 20 cm. Quanto misura l'altro lato?
A. <input type="checkbox"/> 30 cm
B. <input type="checkbox"/> 50 cm
C. <input type="checkbox"/> 60 cm
D. <input type="checkbox"/> 80 cm

Fig. 1 – Quesito D6 nella versione originale tratta dalla prova INVALSI di Matematica somministrata in 5<sup>a</sup> primaria nel 2010 (grado 5)

Il quesito appartiene all'ambito Spazio e figure e il *question intent* esplicitato nelle guide alla lettura è «Ricavare un lato del rettangolo dopo averne individuato il perimetro»; si tratta però di un problema in contesto reale. Per rispondere correttamente lo studente deve sia considerare le differenti unità di misura tra il testo e le possibili risposte (anche se la equivalenza di per sé è molto semplice  $1\text{ m} = 100\text{ cm}$ ) e quindi tener conto del fatto che un rettangolo ha lati opposti uguali.

La difficoltà principale consiste nel comprendere il contesto e capire quindi che i lati opposti del rettangolo sono uguali e che ciascuno viene sommato due volte per ottenere il perimetro.

Nel *main study* la domanda risulta di difficoltà media e risponde correttamente il 47% degli studenti (fig. 2). Il 31% degli studenti sceglie la risposta D e sbaglia quindi eseguendo direttamente una sottrazione tra i due dati presenti nel problema. Questa risposta può essere data da studenti che non si soffermano abbastanza sulla comprensione del testo del problema stesso. Anche alcune pratiche didattiche, piuttosto diffuse, che portano gli studenti a concentrarsi principalmente sui dati numerici, sulla domanda e sulle cosiddette *parole chiave* del testo al fine di identificare l'operazione che permette di risolvere il problema, piuttosto che sulla comprensione vera del problema stesso nel suo complesso, possono portare a errori di questo tipo (Zan, 2012).

Gli altri due distrattori risultano meno attrattivi e vengono scelti entrambi da circa un 10% degli studenti. Il distrattore B corrisponde al semiperimetro del rettangolo mentre la risposta C è probabilmente scelta dagli studenti che sottraggono correttamente due volte il lato conosciuto dal perimetro, ma poi non dividono per due il risultato.

Tab. 1 – Risultati del main study relativi alla domanda D6 tratta dalla prova INVALSI di Matematica somministrata in 5<sup>a</sup> primaria nel 2010 (grado 5)

Cases for this item	35.538	Discrimination	0,24
Delta	0,12	Weighted MNSQ	1,16
	Count	% of Tot	
A (correct)	16.795	47%	
B	3.388	10%	
C	3.587	10%	
D	10.871	31%	
Missing	808	2%	

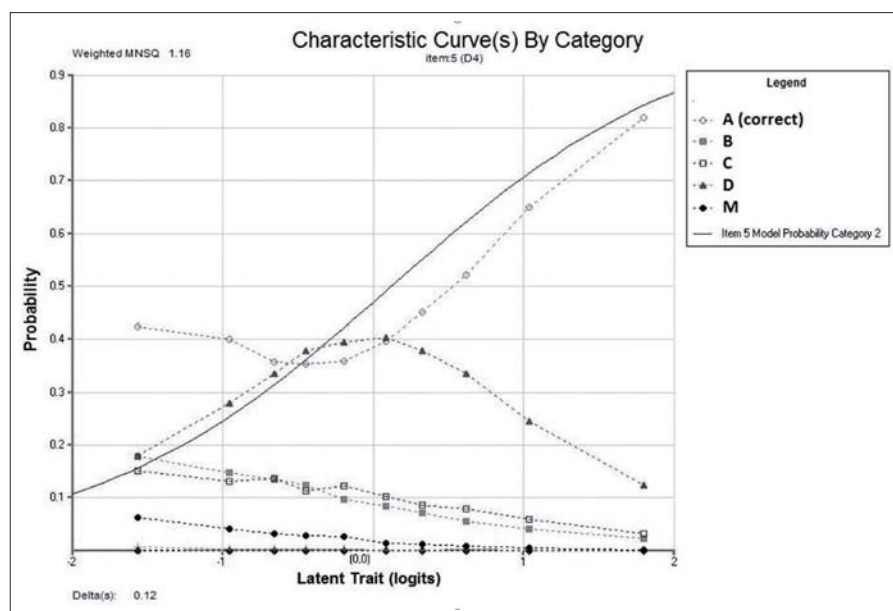


Fig. 2 – Distractor plot del main study relativo alla domanda D6 tratta dalla prova INVALSI di Matematica somministrata in 5<sup>a</sup> primaria nel 2010 (grado 5)

Osservando i risultati del *main study* emerge che il fit dell'item inoltre è molto particolare: si ha una netta sottostima degli studenti più deboli e una sovrastima degli studenti con livelli di abilità medi e alti; inoltre distrattore D presenta un particolare andamento prima crescente e poi decrescente, risultando particolarmente attrattivo per gli studenti con livelli di abilità medi. In precedenti studi si è mostrato che andamenti così particolari relativi a uno specifico distrattore possono essere legati a costrutti ben noti in didattica della Matematica come effetti del contratto didattico e misconcezioni (Ferretti,



Giberti e Lemmo, 2018). In questo caso gli studenti con livelli di abilità medi potrebbero scegliere il distrattore D (sottrazione tra i due dati del testo) proprio perché eccessivamente legati a pratiche didattiche che spingono a analizzare il testo dei problemi in base a elementi chiave e a focalizzarsi sull'operazione risolutiva, piuttosto che a comprendere realmente la situazione problematica e le relazioni tra le informazioni (non solo numeriche) fornite nel testo.

L'obiettivo principale è quello di capire se e in che modo il contesto influisca sul processo di risoluzione e sulla tendenza degli studenti a rispondere facendo la differenza tra i dati. Inoltre, si è indagato se una diversa tipologia di risposta (risposta aperta) possa migliorare il funzionamento psicometrico dell'item. La domanda è stata quindi cambiata attraverso una variazione incrociata di contesto e tipologia di risposta (Risposta Multipla/Risposta Univoca). Il contesto è stato variato eliminando il riferimento al reale e trasformando il quesito in un problema puramente geometrico, mantenendo il *question intent* e la struttura sintattica del testo. Infine, nell'ultima versione dell'item si è agito sul testo stesso, mantenendo come contesto quello della fotografia ma eliminando la cornice.

Le forme in cui si presenta la domanda sono quindi 4:

- F1: versione originale;
- F2: variazione contesto (contesto geometrico);
- F3: variazione contesto (contesto geometrico) e tipologia risposta (Risposta univoca);
- F4: variazione testo (non si parla più di cornice ma solo di bordo ma si parla sempre di una fotografia) e tipologia risposta (RU).

Fascicolo F1 (versione originale)	Fascicolo F2
<p>D6. Per incorniciare una fotografia rettangolare è stato utilizzato 1 metro di cornice. Un lato della fotografia misura 20 cm. Quanto misura l'altro lato?</p> <p>A. <input type="checkbox"/> 30 cm            B. <input type="checkbox"/> 50 cm            C. <input type="checkbox"/> 60 cm            D. <input type="checkbox"/> 80 cm</p>	<p>D6. Un rettangolo ha il perimetro di 1 metro. Un lato del rettangolo misura 20 cm. Quanto misura l'altro lato?</p> <p>A. <input type="checkbox"/> 30 cm            B. <input type="checkbox"/> 50 cm            C. <input type="checkbox"/> 60 cm            D. <input type="checkbox"/> 80 cm</p>
Fascicolo F3	Fascicolo F4
<p>D6. Un rettangolo ha il perimetro di 1 metro. Il lato corto del rettangolo misura 20 cm. Quanto misura il lato lungo?</p> <p>Risposta: ..... cm</p>	<p>D6. Il bordo di una fotografia rettangolare misura in tutto 1 metro. Il lato corto della fotografia misura 20 cm. Quanto misura il lato lungo?</p> <p>Risposta: ..... cm</p>

Fig. 3 – Quesito D6 nella versione originale (fascicolo F1) e nelle versioni variate

In questo capitolo si analizzerà in particolare l'effetto della variazione legata al cambiamento di contesto. Nel paragrafo risultati saranno quindi principalmente confrontate la versione originale della domanda (fascicolo F1) con quella fornita in contesto puramente geometrico (fascicolo F2).

### Domanda D16

**Fascicolo F1 (originale)**

**D16.** Il cavo (AB) di un ripetitore per telefonia cellulare è stato fissato a un palo a una distanza dal suolo di 9 m.  
Una lampada di segnalazione (C) viene agganciata al cavo a 3 m di altezza e a 5 m dal punto di ancoraggio a terra (A).

Qual è la lunghezza del cavo AB?

Risposta: ..... m

Fig. 4 – Quesito D16 nella versione originale tratta dalla prova INVALSI di Matematica somministrata in 3<sup>a</sup> secondaria di I grado primaria nel 2012 (grado 8)

La domanda D16 è tratta dalla prova INVALSI di Matematica somministrata al grado 8 nel 2012; a differenza della domanda precedente, il grado della prova originale è il medesimo della sperimentazione “Variazioni 2” e ci si aspetta quindi che i risultati siano maggiormente confrontabili.

Questo quesito è stato inserito nel progetto proprio per studiare l'influenza del contesto sulla risoluzione del problema matematico: il contesto, che risulta

abbastanza complesso e non abituale per gli studenti, potrebbe avere influito negativamente sull'approccio degli studenti al quesito. Inoltre, anche in termini di quantità di testo il quesito risulta abbastanza pesante da affrontare per i ragazzi e tutto ciò potrebbe anche aver scoraggiato gli studenti più in difficoltà.

Questa ipotesi è supportata soprattutto dal fatto che nei risultati del *main study* (tab. 2) quasi il 30% degli studenti non ha proprio risposto al quesito, percentuale maggiore anche degli studenti che hanno risposto in modo sbagliato (22%). Nonostante questo, la percentuale di risposte corrette è quasi del 50% e la domanda ha quindi una difficoltà media all'interno della prova.

Tab. 2 – Risultati del main study relativi alla domanda D16 tratta dalla prova INVALSI di Matematica somministrata in 3<sup>a</sup> secondaria di I grado nel 2012 (grado 8)

<i>Cases for this item</i>	25.556	<i>Discrimination</i>	0,46
<i>Delta</i>	0,23	<i>Weighted MNSQ</i>	0,95
	<i>Count</i>	<i>% of Tot</i>	
Correct	13.129	51	
Wrong	5.204	20	
Missing	7.223	28	

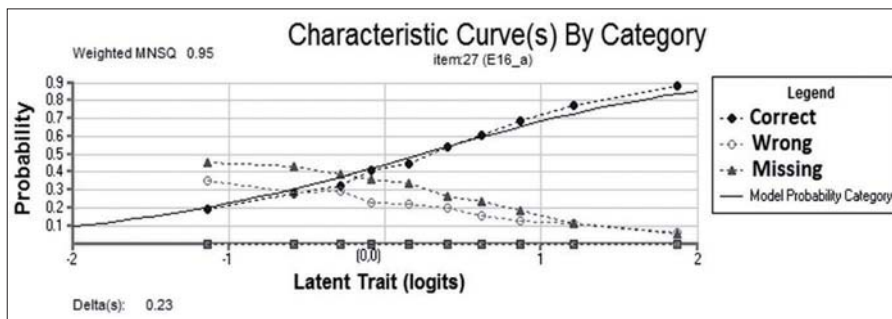


Fig. 5 – Distractor plot del main study relativo alla domanda D16 nella versione originale tratta dalla prova INVALSI di Matematica somministrata in 3<sup>a</sup> secondaria di I grado primaria nel 2012

Risulta interessante notare che, in realtà, il contesto non è necessario nella risoluzione del quesito in quanto i dati sono riportati direttamente in figura. Se l'alta percentuale di mancate risposte dovesse essere effettivamente dovuta a una difficoltà legata alla comprensione del contesto reale e al testo del quesito, queste potrebbero essere superate dagli studenti concentrandosi esclusivamente sulla figura e sui dati inseriti.

Dall'analisi dei risultati del *main study*, inoltre, si osserva che il fit risulta generalmente accettabile, anche se il modello tende a sovrastimare gli studenti con livelli di abilità bassi e sottostimare gli studenti con livelli di abilità alti. L'item discrimina molto bene e le risposte mancanti superano le risposte sbagliate principalmente per i livelli di abilità bassi e medi.

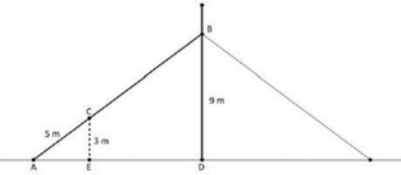
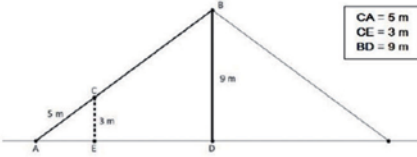
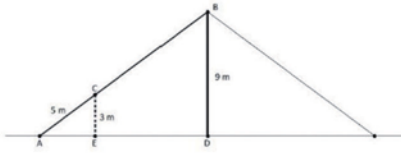
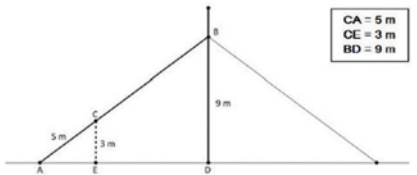
Fascicolo F1 (originale)	Fascicolo F2
<p>D16. Il cavo (AB) di un ripetitore per telefonia cellulare è stato fissato a un palo a una distanza dal suolo di 9 m. Una lampada di segnalazione (C) viene agganciata al cavo a 3 m di altezza e a 5 m dal punto di ancoraggio a terra (A).</p>  <p>Qual è la lunghezza del cavo AB?</p> <p>Risposta: ..... m</p>	<p>D16. Osserva il disegno.</p>  <p>Qual è la lunghezza del segmento AB?</p> <p>Risposta: ..... m</p>
Fascicolo F3	Fascicolo F4
<p>D16. Il cavo (AB) di un ripetitore per telefonia cellulare è stato fissato a un palo a una distanza dal suolo di 9 m. Una lampada di segnalazione (C) viene agganciata al cavo a 3 m di altezza e a 5 m dal punto di ancoraggio a terra (A).</p>  <p>Qual è la lunghezza del cavo AB?</p> <p>Risposta: ..... m</p>	<p>D16. Osserva il disegno.</p>  <p>Qual è la lunghezza del segmento AB?</p> <p>Risposta: ..... m</p>

Fig. 6 – Quesito D16 nella versione originale (fascicolo F1) e nelle versioni variate

Ai fini della ricerca, si è scelto di inserire questo quesito eliminando completamente il contesto reale e mantenendo esclusivamente le informazioni fornite già in figura. Eliminando il contesto è stato necessario inserire una legenda che specificasse a cosa si riferiscono le misure inserite in figura. Inoltre, per evitare possibili ambiguità dovute al fatto che, escludendo il contesto, non aveva più senso considerare il segmento centrale in alto, in due versioni questo segmento è stato eliminato.

Il quesito è quindi stato inserito nei fascicoli in 4 diverse forme:

F1: versione originale;

F2: versione con eliminazione del contesto (e per evitare ambiguità eliminato anche l'ultimo segmento centrale che non c'entra con la risoluzione);

F3: mantenuto il contesto (e per evitare ambiguità eliminato l'ultimo segmento centrale che non c'entra con la risoluzione);

F4: eliminato il contesto (ma mantenuto il segmento centrale).

## 5. Risultati

### *Domanda D6*

L'item D6 presenta caratteristiche diverse nelle quattro formulazioni, sia in termini di difficoltà, sia in termini di funzionalità, che risulta molta buona nella formulazione proposta in F1 e in F2 e, invece, leggermente peggiore in F3 e F4, fascicoli nei quali l'item, a risposta aperta univoca, mostra un comportamento più marcatamente over-discriminante (tab. 3).

Per questo item è stata provata una doppia combinazione: due item a risposta multipla, di cui uno in contesto (fascicolo F1) e uno non in contesto (F2), e due item a risposta aperta univoca, di cui uno in contesto (F4) e uno non in contesto (F3).

Dal confronto, emerge chiaramente che le formulazioni con quattro opzioni di risposta sono più semplici rispetto a quelle aperte univoche per le quali si registra, invece, un più alto tasso di risposte mancanti. Inoltre, in linea con le rilevazioni OCSE-PISA, la contestualizzazione della domanda aumenta (sia per le domande aperte che per quelle chiuse) il livello di difficoltà della domanda perché il processo di matematizzazione che porta alla soluzione del problema si articola in due fasi: *formulating* ed *employing* (OECD, 2016).

In questa ottica, si osserva in particolare che tra le due versioni a risposta multipla risulta più semplice quella presente in F2 probabilmente proprio grazie all'assenza di un contesto concreto. L'errore più diffuso (distrattore D) in entrambe le versioni, consiste nel non considerare i lati come doppi e fare solo la sottrazione tra i dati presenti nel testo; si potrebbe pensare che il contesto aiuti a considerare la situazione nel suo complesso e a compiere meno questo tipo di errore, mentre accade esattamente il contrario: il secondo quesito risulta più semplice in quanto il distrattore D è meno attrattivo, in particolare per i rispondenti con livelli di abilità minori (figg. 7 e 8). Inoltre, tra le domande di tipo *multiple choice*, quelle contestualizzate, risultano più difficili ma anche più funzionali, cioè con un migliore fit tra dati e modello.

Tra le domande aperte (F3 e F4), non emerge lo stesso miglioramento ma questo potrebbe essere dovuto al formato della domanda cui si associa un elevato numero di risposte mancanti.

Tab. 3 – Output ConQuest 4.0 per l'item D6 nelle 4 forme inserite nel progetto “Variazioni 2”

<i>Fascicolo F1</i>						
<i>item: 14(D6)</i>						
<i>Discrimination</i>	0,43					
<i>Weighted_MNSQ</i>	0,99					
<i>Label</i>	<i>Score</i>	<i>% of tot</i>	<i>Pt Bis</i>	<i>t (p)</i>	<i>PVI Avg: l</i>	<i>PVI SD: l</i>
1	1,00	61,24	0,43	9,71(,000)	0,34	0,87
2	0,00	7,18	-0,14	-2,79(,005)	-0,33	0,73
3	0,00	7,18	-0,11	-2,29(,023)	-0,27	0,62
4	0,00	23,68	-0,32	-6,84(,000)	-0,43	0,79
9	0,00	0,72	-0,13	-2,58(,010)	-1,06	0,17
<i>Fascicolo F2</i>						
<i>item: 14(D6)</i>						
<i>Discrimination</i>	0,42					
<i>Weighted_MNSQ</i>	0,95					
<i>Label</i>	<i>Score</i>	<i>% of tot</i>	<i>Pt Bis</i>	<i>t (p)</i>	<i>PVI Avg: l</i>	<i>PVI SD: l</i>
1	1,00	64,71	0,42	9,26(,000)	0,17	0,82
2	0,00	9,31	-0,15	-3,07(,002)	-0,45	0,72
3	0,00	8,58	-0,18	-3,66(,000)	-0,57	0,70
4	0,00	14,71	-0,20	-4,21(,000)	-0,48	0,71
<i>Fascicolo F3</i>						
<i>item: 14(D6)</i>						
<i>Discrimination</i>	0,56					
<i>Weighted_MNSQ</i>	0,84					
<i>Label</i>	<i>Score</i>	<i>% of tot</i>	<i>Pt Bis</i>	<i>t (p)</i>	<i>PVI Avg: l</i>	<i>PVI SD: l</i>
0	0,00	33,58	-0,38	-8,24(,000)	-0,50	0,86
1	1,00	56,69	0,56	13,77(,000)	0,43	0,82
9	0,00	9,73	-0,34	-7,30(,000)	-1,03	0,63
<i>Fascicolo F4</i>						
<i>item: 14(D6)</i>						
<i>Discrimination</i>	0,57					
<i>Weighted_MNSQ</i>	0,88					
<i>Label</i>	<i>Score</i>	<i>% of tot</i>	<i>Pt Bis</i>	<i>t (p)</i>	<i>PVI Avg: l</i>	<i>PVI SD: l</i>
0	0,00	36,91	-0,44	-10,38(,000)	-0,54	0,81
1	1,00	55,48	0,57	14,77(,000)	0,49	0,88
9	0,00	7,61	-0,27	-5,96(,000)	-0,95	1,03

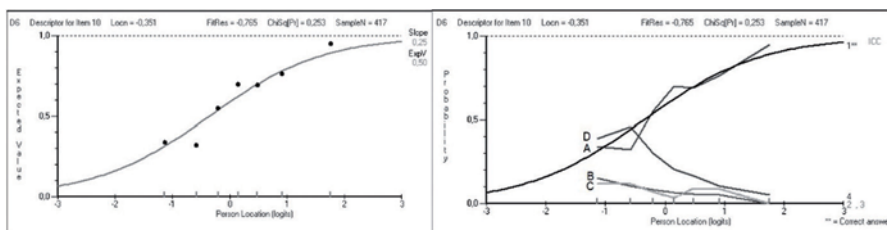


Fig. 7 – Curva caratteristica e distractor plot dell'item D6, nel fascicolo F1

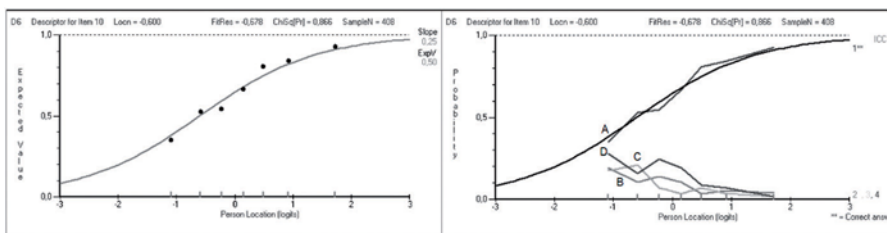


Fig. 8 – Curva caratteristica e distractor plot dell'item D6, nel fascicolo F2

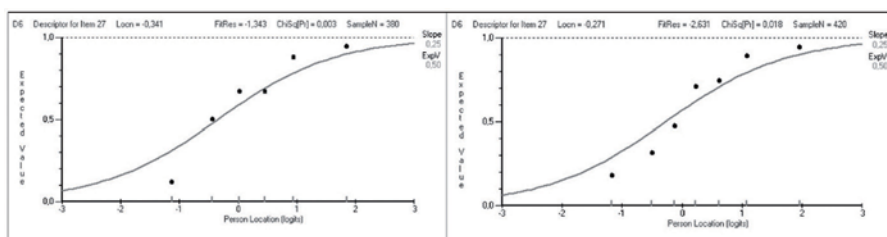


Fig. 9 – Curva caratteristica e distractor plot dell'item D6, nei fascicoli F3 e F4

## Domanda D16

L'item D16 è stato formulato in tutti i fascicoli come un item a risposta aperta. Non si notano differenze in termini di difficoltà tra le versioni in F1 e F2, mentre risulta più semplice il quesito in F3 e più difficile in F4.

Anche questo item offre spunti di riflessione in relazione all'effetto che il contesto e le variazioni della figura hanno sulla difficoltà e sulla funzionalità degli item. Se si confrontano le domande con la medesima immagine (F1 con F4 e F2 con F3) si osserva che nelle due varianti senza contesto, l'item risulta significativamente più facile (come nella D6).

Tab. 4 – Output ConQuest 4.0 per l'item D16 nelle 4 forme inserite nel progetto “Variazioni 2”

<i>Fascicolo F1</i>						
<i>item:35(D16)</i>						
<i>Discrimination</i>	0,52					
<i>Weighted_MNSQ</i>	0,93					
<i>Label</i>	<i>Score</i>	<i>% of tot</i>	<i>Pt Bis</i>	<i>t (p)</i>	<i>PVIAvg:1</i>	<i>PV1 SD:1</i>
0	0,00	30,86	-0,25	-5,27(.000)	-0,28	0,83
1	1,00	46,41	0,52	12,36(.000)	0,51	0,79
9	0,00	22,73	-0,34	-7,40(.000)	-0,44	0,74
<i>Fascicolo F2</i>						
<i>item:34(D16)</i>						
<i>Discrimination</i>	0,40					
<i>Weighted_MNSQ</i>	1,00					
<i>Label</i>	<i>Score</i>	<i>% of tot</i>	<i>Pt Bis</i>	<i>t (p)</i>	<i>PVIAvg:1</i>	<i>PV1 SD:1</i>
0	0,00	36,52	-0,23	-4,81(.000)	-0,30	0,78
1	1,00	42,40	0,40	8,72(.000)	0,28	0,85
9	0,00	21,08	-0,21	-4,26(.000)	-0,43	0,75
<i>Fascicolo F3</i>						
<i>item:34(D16)</i>						
<i>Discrimination</i>	0,47					
<i>Weighted_MNSQ</i>	0,99					
<i>Label</i>	<i>Score</i>	<i>% of tot</i>	<i>Pt Bis</i>	<i>t (p)</i>	<i>PVIAvg:1</i>	<i>PV1 SD:1</i>
0	0,00	39,66	-0,25	-5,19(.000)	-0,34	0,79
1	1,00	36,98	0,47	10,64(.000)	0,59	0,94
9	0,00	23,36	-0,24	-5,08(.000)	-0,46	0,85
<i>Fascicolo F4</i>						
<i>item:34(D16)</i>						
<i>Discrimination</i>	0,40					
<i>Weighted_MNSQ</i>	1,02					
<i>Label</i>	<i>Score</i>	<i>% of tot</i>	<i>Pt Bis</i>	<i>t (p)</i>	<i>PVIAvg:1</i>	<i>PV1 SD:1</i>
0	0,00	30,65	-0,20	-4,29(.000)	-0,25	0,92
1	1,00	48,77	0,40	9,16(.000)	0,36	0,97
9	0,00	20,58	-0,26	-5,80(.000)	-0,48	1,00

Le versioni non contestualizzate (F2 e F4), come già nelle altre domande, risultano più facili, rispetto alle omologhe in contesto reale (confronto F1 con F4 e F3 con F2). Tra le contestualizzate, risulta molto più facile la versione *con il palo eccedente* (F1) rispetto all'altra (F3); e così tra le non contestualizzate (F4 rispetto a F2).



Anche la funzionalità (buona in tutti i casi) risulta leggermente migliore nel non contestualizzato; inoltre la versione col palo eccedente è più facile, ma ha un fitting peggiore in entrambi i casi (contestualizzato e no). Si osserva infatti che nelle versioni contestualizzate, il fit è minore di 1, mentre in quelle non contestualizzate il fit è maggiore di 1, in entrambi i casi.

Nell'originale INVALSI (corrispondente a F1) la domanda aveva avuto una percentuale di risposte confrontabile, ed era risultata con un fit minore di 1. Inoltre, pare opportuno osservare che, ancora una volta, il comportamento osservato nel *main study* coincide perfettamente con quello osservato in “Variazioni 2”, a conferma della buona rappresentatività del campione e dell'inferibilità dei risultati alla popolazione.

Nello studio di questo item, sembra emergere che le domande non contestualizzate fittino meglio con il modello. Questo risultato può essere spiegato dal fatto che il processo del *formulating* è distinto dall'*employing*: una domanda in cui si toglie la componente del *formulating* risulta più pulita nei suoi risultati.

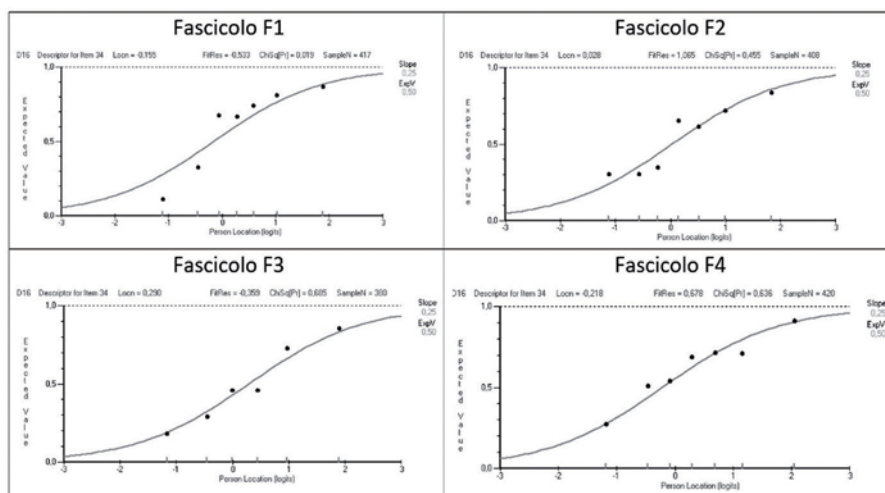


Fig. 10 – Curva caratteristica e distractor plot dell'item D16, nei fascicoli F1, F2, F3 e F4

## 6. Conclusioni

In questo articolo sono state presentate le analisi di due quesiti inseriti nel progetto “Variazioni 2” con lo scopo di comprendere l'impatto di una variazione del contesto sulle risposte degli studenti. Questo tema è già stato

affrontato da numerose ricerche in didattica della Matematica che hanno mostrato come, un contesto familiare per gli studenti possa aiutare, ma in generale la presenza di un contesto possa anche rendere il quesito più complesso.

I risultati delle analisi presentate in questo lavoro mostrano come il contesto, specialmente se complesso e lontano dall'esperienza degli studenti come nel caso del quesito D16, possa mettere maggiormente in difficoltà gli studenti e soprattutto portare a una percentuale maggiore di mancate risposte. Chiaramente questi risultati possono variare in quanto strettamente legati anche alla pratica didattica e all'abitudine degli studenti di affrontare problemi matematici all'interno di un contesto concreto. Si è osservato inoltre che per entrambi i quesiti le variazioni di contesto hanno portato anche a una variazione della funzionalità dell'item in termini di discriminazione e fit.

La metodologia utilizzata infatti permette non solo di capire se il contesto influenzi le risposte degli studenti ma anche di misurare l'effetto di una variazione di contesto e, per esempio nel caso dell'item D6, di analizzare in che modo cambino le risposte degli studenti e per quali livelli di abilità. In questo caso, infatti, l'uso dei *distractor plot* ha permesso di evidenziare che, avendo eliminato il contesto, un distrattore legato a uno specifico errore degli studenti diventa notevolmente meno attrattivo per gli studenti con livelli di abilità bassi.

## Riferimenti bibliografici

- Barbaranelli C., Natali E. (2005), *I test psicologici: teorie e modelli psicometrici*, Carrocci, Roma.
- Bolondi G., Branchetti L., Giberti C. (2018), "A tool for analyzing the impact of the formulation on the performance of students answering a mathematical item", *Studies in Educational Evaluation*, 58, pp. 37-50.
- Bolondi G., Cascella C. (2017), "Somministrazione delle prove INVALSI dal 2009 al 2015: un patrimonio di informazioni tra evidenze psicometriche e didattiche", in P. Falzetti (a cura di), *I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca*, FrancoAngeli, Milano, pp. 68-92.
- Bolondi G., Cascella C., Giberti C. (2020), "Formulazione della domanda e funzionalità psicometrica: evidenze empiriche su un campione di studenti della terza secondaria di primo grado", in P. Falzetti (a cura di), *Implementazione e miglioramento del dato. II Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca"*, FrancoAngeli, Milano, pp. 68-92.
- Boninsegna R., Bolondi G., Branchetti L., Giberti C., Lemmo A. (2017), "Uno strumento per analizzare l'impatto di una variazione nella formulazione di un quesito INVALSI di matematica", in P. Falzetti (a cura di), *I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca*, FrancoAngeli, Milano, pp. 101-110.

- Cascella C. (2016), “Examining the relationship between items position and their functionality”, *Working paper INVALSI*, 29, pp. 1-19, testo disponibile al sito: [http://www.invalsi.it/download2/wp/wp29\\_Cascella.pdf](http://www.invalsi.it/download2/wp/wp29_Cascella.pdf), data di consultazione 26/1/2021.
- Branchetti L., Viale M. (2015), “Tra italiano e matematica: il ruolo della formulazione sintattica nella comprensione del testo matematico”, in M. Ostinelli (a cura di), *La didattica dell'italiano. Problemi e prospettive*, Proceedings della conferenza “Quale didattica dell'italiano? Problemi e prospettive”, Locarno, ottobre 2014.
- Cummins D.D., Kintsch W., Reusser K., Weimer R. (1988), “The role of understanding in solving word problems”, *Cognitive Psychology*, 20, 4, pp. 405-438.
- D'Amore B. (2014), *Il problema di matematica nella pratica didattica*, Digital Index, Modena.
- Daroczy G., Wolska M., Meurers W.D., Nuerk H.C. (2015), “Word problems: A review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty”, *Frontiers in Psychology*, 6, pp. 1-13.
- De Corte E., Verschaffel L., De Win L. (1985), “Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions”, *Journal of Educational Psychology*, 77, 4, p. 460.
- Duval R. (1991), “Interaction des différents niveaux de représentation dans la compréhension de textes”, *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 4, pp. 136-193.
- Ferretti F., Giberti C., Lemmo A. (2018), “The Didactic Contract to Interpret Some Statistical Evidence in Mathematics Standardized Assessment Tests”, *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14, 7, pp. 2895-2906.
- Kolen M., Brennan R. (2004), *Test Equating, Scaling, and Linking. Methods and Practices*, Springer, New York, 2nd ed.
- Laborde C. (1995), “Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica”, *La matematica e la sua didattica*, 9, 2, pp. 121-135.
- Léger L., Sander E., Richard J.F., Brissiaud R., Legros D., Tijus C. (2002), “Propriétés des objets et résolution de problèmes mathématiques”, *Revue française de pédagogie*, 139, pp. 97-105.
- Lepik M. (1990), “Algebraic word problems: Role of linguistic and structural variables”, *Educational Studies in Mathematics*, 21, 1, pp. 83-90.
- Nesher, P. (1976), “Three determinants of difficulty in verbal arithmetic problems”, *Educational Studies in Mathematics*, 7, 4, pp. 369-388.
- OECD (2016), *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematic and financial literacy*, OECD Publishing, Paris.
- Roth W.M. (1996), “Where is the Context in Contextual Word Problem? Mathematical Practices and Products in Grade 8 Students' Answers to Story Problems”, *Cognition and Instruction*, 14, 4, pp. 487-527.
- Spanos G., Rhodes N.C., Dale T.C., Crandall J. (1988), “Linguistic features of mathematical problem solving: Insights and applications”, in R.R. Cocking, J.P. Mestre (eds.), *Linguistic and cultural influences on learning mathematics*, Erlbaum, Hillsdale (NJ), pp. 221-240.

- Stern E., Lehrndorfer A. (1992), "The role of situational context in solving word problems", *Cognitive Development*, 7, 2, pp. 259-268.
- Thevenot C., Devidal M., Barrouillet P., Fayol M. (2007), "Why does placing the question before an arithmetic word problem improve performance? A situation model account", *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 60, 1, pp. 43-56.
- Van Den Heuvel-Panhuizen M. (2005), "The role of contexts in assessment problems in mathematics", *For the learning of mathematics*, 25, 2, pp. 2-23.
- Vicente S., Orrantia J., Verschaffel L. (2007), "Influence of situational and conceptual rewording on word problem solving", *British Journal of Educational Psychology*, 77, 4, pp. 829-848.
- Wolfe E. (2004), "Equating and Item Banking with the Rasch model", in E. Smith, R. Smith (eds.), *Introduction to Rasch Measurement. Theory, Models and Applications*, JAM Press, Maple Grove, pp. 366-390.
- Zan R. (2012), "La dimensione narrativa di un problema: il modello CandD per l'analisi e la (ri) formulazione del testo", *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 3, pp. 107-126.

## *11. Gli errori degli studenti in Matematica: un'analisi delle risposte alle prove INVALSI di grado 10*

di Federica Ferretti, Alessandro Gambini, Sabrina Tiralongo

L'errore dello studente è considerato uno degli elementi fondamentali nel processo di comprensione e apprendimento della Matematica; il suo ruolo è stato approfondito sia dal punto di vista epistemologico (Enriques) che didattico (Zan, D'Amore). Per l'insegnante, è fondamentale avere degli strumenti per interpretare gli errori dei singoli allievi, collegandoli ai fenomeni generali di difficoltà. La ricerca in didattica della Matematica offre chiavi di analisi e di interpretazione molto precise. La grande mole di dati messa a disposizione dall'INVALSI per quanto riguarda le prove di valutazione standardizzata nazionali permette di supportare quantitativamente questi risultati.

Il contributo è focalizzato sull'analisi di alcune tipologie di errori ricorrenti, presenti nelle risposte date dagli studenti nelle prove INVALSI di Matematica del grado 10. Nella banca di item somministrati fino al 2017 sono state individuati cluster di domande, prevalentemente a risposta chiusa, in cui le scelte dei distrattori mettono in evidenza macrofenomeni di comportamento interpretabili con costrutti della didattica della Matematica diffusi e riconosciuti a livello internazionale. I dati relativi alle prove degli anni precedenti permettono di quantificare la portata di questi fenomeni. Nella ricerca presentiamo anche collegamenti "in verticale" rispetto al grado scolastico di questi cluster, mettendo in evidenza questi fenomeni con comportamenti analoghi di studenti in altri gradi scolastici (in modo da avere una prima informazione sull'evoluzione del fenomeno).

Il passaggio al *Computer based testing*, con la correzione centralizzata delle risposte degli studenti, offre la possibilità di analizzare anche le risposte date alle domande aperte. La ricerca analizzerà quindi anche le domande rilasciate della prova del 2018, in particolare quelle a risposta aperta, utilizzando specifici software per la classificazione e la clusterizzazione delle risposte.

*The student's mistake is considered one of the basic elements in the process of understanding and learning mathematics; its role has been deepened both from the epistemological way (Enriques) and didactic point of view (Zan, D'Amore). For the teacher, it is essential to have tools to interpret the mistakes of the single students, linking them to the general phenomena of difficulty. Research in mathematics education offers accurate keys for analysis and interpretation. The large amount of data available from INVALSI for national standardized assessment tests, allows quantitative support of these results. This paper is focused on the analysis of some kind of recurring errors, present in the answers given by the students in the INVALSI Maths Grade 10 tests. In the database of the item administered until 2017, clusters of tasks have been identified, mainly with closed answers, in which the choices of distractors highlight behavioral macrophenomena interpretable with constructs of mathematics education (in particular, as misconceptions, or as effects of didactic contract in the sense of Brousseau). The data related to the tests of previous years allow to quantify the extent of these phenomena. In the research we also present "vertical" links of these clusters, highlighting these phenomena with similar behaviors of students in other school grades (in order to have a first information on the evolution of the phenomenon). The transition to Computer Based Testing, with the centralized correction of student's answers, offers the possibility to analyze also the answers given to the open tasks. The research will then analyze the released tasks of the 2018 INVALSI Grade 10 test, in particular the open-ended ones, using specific software for the classification and clustering of answers.*

## **1. Introduzione**

L'errore dello studente è considerato uno degli elementi fondamentali nel processo di apprendimento/insegnamento della Matematica; il suo ruolo è stato approfondito sia dal punto di vista epistemologico (D'Amore, 2007) sia dal punto di vista didattico (Zan, 2000).

Per l'insegnante è fondamentale avere degli strumenti per interpretare gli errori dei singoli allievi in modo tale da poterli collegare a fenomeni generali di difficoltà (Binanti, 2005). Se dal punto di vista qualitativo la ricerca in didattica della Matematica offre chiavi di analisi e di interpretazione molto precise (si veda, per esempio Zan, 2007), la grande mole di dati messa a disposizione dalle prove INVALSI permette di supportare quantitativamente questi risultati.

Il presente contributo è focalizzato sull'analisi di alcune tipologie di errori ricorrenti, emersi nelle risposte fornite dagli studenti nelle prove INVALSI di Matematica del grado 10.

Nella banca di item somministrati fino al 2017 sono stati individuati cluster di domande, prevalentemente a risposta chiusa, in cui le scelte delle varie opzioni mettono in evidenza macrofenomeni di comportamento interpretabili con costrutti della didattica della Matematica condivisi a livello internazionale (come per esempio le misconcezioni, o effetti di contratto didattico (Ferretti, 2015)). Analisi qualitative e quantitative su questi dati delle rilevazioni degli anni precedenti permettono di quantificare, in linea di massima, la portata di questi fenomeni. Fino all'a.s. 2016/2017 le valutazioni standardizzate INVALSI sono state somministrate in modalità cartacea, mentre dall'a.s. 2017/2018 le prove INVALSI del grado 8 e del grado 10 si sono svolte in modalità *Computer based testing* (CBT). Il passaggio al CBT ha comportato tutta una serie di cambiamenti, sia dal punto di vista contenutistico sia dal punto di vista tecnico e tra questi cambiamenti un fatto rilevante è stata la correzione centralizzata dei test a livello nazionale. Con la correzione centralizzata è possibile avere un'analisi delle risposte aperte fornite dagli studenti di tutta Italia fornite durante la prova censuaria sul territorio nazionale (*main study*).

Focus della ricerca in oggetto sono le risposte aperte rilasciate dall'INVALSI della prova INVALSI di Matematica del *main study* 2018 della classe seconda della scuola secondaria di secondo grado (grado 10), svolto a livello nazionale a maggio 2018. In dettaglio verranno presentate le analisi di tre domande, codificate con specifici software per la classificazione e la clusterizzazione delle risposte, effettuate utilizzando alcuni dei principali costrutti di didattica della Matematica.

## 2. Quadro teorico della ricerca condotta

Di seguito verranno richiamati e approfonditi alcuni dei principali costrutti teorici di didattica della Matematica che hanno permesso di inquadrare la ricerca e, successivamente, di interpretare gli errori più ricorrenti individuati nelle risposte dagli studenti.

## 2.1. Il contratto didattico

Uno dei costrutti che più ha fornito una chiave di lettura dei fenomeni evidenziati è il contratto didattico. Il concetto di contratto didattico nasce da studi da Guy Brousseau, effettuati in Francia alla fine del 1970, volti a indagare le cause dell'insuccesso degli studenti in Matematica (IREM Bordeaux, 1978).

A differenza del contratto pedagogico, che racchiude diritti e doveri di docenti e studenti, il contratto didattico pone al centro le aspettative, spesso implicite, che la situazione didattica e le convenzioni pongono al docente e allo studente durante attività matematiche.

Afferma Brousseau:

In una situazione d'insegnamento l'accesso a un compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti nel modo di insegnare del maestro. Queste abitudini del maestro attese dall'allievo e i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico (Brousseau, 1980, p. 181).

Spesso queste "attese" sono del tutto implicite, non sono dovute ad accordi espliciti, imposti dalla scuola o dagli insegnanti o concordati con gli allievi, ma alla concezione della scuola, della Matematica, alla ripetizione di modalità. Lo studio dei vari fenomeni di comportamento degli allievi da questo punto di vista ha dato diversi frutti, di estremo interesse; oggi molti comportamenti considerati fino a poco tempo fa inspiegabili o legati al disinteresse, all'ignoranza o all'età immatura, sono invece stati chiariti.

Uno degli studi più noti è quello che prende il nome di "età del capitano" (Baruk, 1985). Alla fine degli anni 1970, i ricercatori dell'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) di Grenoble proposero la seguente consegna ad alcuni studenti della scuola primaria: "In una nave ci sono 26 pecore e 10 capre. Quanti anni ha il capitano della nave?".

76 studenti su 97 hanno calcolato l'età del capitano combinando i numeri presenti nel testo con qualche operazione come addizione o sottrazione. Nel corso degli anni, in diversi Paesi sono state utilizzate versioni di questo problema "adattato" in base al contesto e al livello scolastico. Nella maggior parte dei casi è stato osservato un comportamento degli studenti analogo a quello rilevato dai primi ricercatori; è stato notato che molto spesso gli atteggiamenti degli studenti sono governati dalla convinzione secondo cui i dati numerici nel testo di un problema in Matematica devono essere utilizzati nei calcoli e che la risposta corretta debba necessariamente derivare da questi calcoli.



Con l'espressione *Effetto età del capitano* si indica oggi la condotta di un allievo che calcola la risposta di un problema utilizzando una parte o la totalità dei numeri che sono forniti nell'enunciato, quando questo problema non possiede invece una soluzione numerica (D'Amore, 1999).

Tale effetto rientra inoltre tra quelli detti di attesa di rottura del contratto didattico, cioè di "devoluzione" (Brousseau, 1988): anche se l'allievo si rende conto dell'assurdità del problema posto, necessita di farsi carico personale di una rottura del contratto didattico, per poter rispondere che il problema non si può risolvere. Questa nuova situazione, infatti, contrasta con tutte le sue attese, con tutte le sue abitudini, con tutte le clausole fin qui messe in campo nelle situazioni didattiche.

Durante la soluzione di un problema a volte succede che gli studenti non cerchino di dare un senso alla consegna e si rivela spesso una mancanza di controllo critico della situazione, lacune molto probabilmente dovute alla totale fiducia nel fatto che l'insegnante consegni un problema "che abbia senso" e che "si possa risolvere". In questa situazione gli studenti spesso rispondono "non quello che pensano", ma quello che "pensano che l'insegnante si aspetti che loro rispondano".

E il contratto didattico è un costrutto teorico inventato proprio per interpretare questo e ad altri fenomeni derivanti dal rapporto tra allievo, docente e Matematica. Si tratta infatti di un costrutto teorico particolarmente utile per descrivere i rapporti, riguardanti le prestazioni matematiche, che inevitabilmente (anche se spesso in modo inconsapevole) si creano in classe tra insegnante e allievi per il fatto che l'insegnante ha il compito "istituzionale" di insegnare Matematica agli allievi, organizzando attività in classe a ciò finalizzate, e gli allievi devono (più o meno di buon grado) adeguarsi a quello che l'insegnante pretende.

In dettaglio, il contratto didattico permette di interpretare vari fenomeni che riguardano le prestazioni matematiche degli allievi e, più in generale, l'insegnamento-apprendimento della Matematica, come per esempio:

- il comportamento degli allievi nei problemi del tipo "età del capitano";
- il tentativo, nella risoluzione di un problema, di ricordare degli schemi risolutivi quando si tratterebbe invece di ragionare ex novo;
- il tentativo, molto meno frequente del precedente, di costruire un ragionamento risolutivo originale dove basterebbe applicare una formula opportuna;
- l'adozione sistematica di forme di organizzazione della risoluzione di un problema (per esempio accompagnandola con una sequenza di disegni che rappresentano i diversi "passaggi") suggerite (e che funzionano) in casi particolari ma che possono risultare di grave impaccio in altri problemi;

- le modalità di studio personale della Matematica (fortemente influenzate da quelle che gli allievi pensano siano le prestazioni richieste dall’insegnante);
- molte delle difficoltà e delle incomprensioni tra insegnante di Matematica e allievi che si manifestano nel passaggio a un nuovo livello scolastico (dalle elementari alle medie, dalle medie alle superiori) o nel cambio di insegnante di Matematica all’interno di uno stesso ciclo scolastico.

La problematica del contratto didattico è particolarmente rilevante per la ricerca in oggetto in quanto la natura delle prestazioni matematiche è molto varia (a volte occorre ricordare, altre volte riflettere, altre volte ancora progettare, esplorare ecc.), e quindi la scelta del comportamento più adatto in ogni circostanza è assai impegnativa, con il rischio inevitabile che l’allievo (soprattutto l’allievo meno sicuro di sé) si interroghi non su “cosa conviene fare” ma su “cosa l’insegnante si aspetta che lui faccia”.

L’importanza del contratto didattico nell’insegnamento-apprendimento della Matematica suggerisce che è bene che gli insegnanti si chiedano (nel momento in cui propongono un’attività da svolgere) cosa i loro allievi possono aspettarsi di dover fare, e soprattutto prestino attenzione ai comportamenti dei loro allievi per individuare la possibile prevalenza di atteggiamenti del tipo “cosa devo fare per soddisfare l’insegnante”, a prescindere dal contenuto e dalla logica interna della prestazione richiesta. È anche bene che l’insegnante imposti con la massima chiarezza il rapporto contrattuale con i propri allievi, anche attraverso discussioni su cosa gli allievi si aspettano di dover fare nelle diverse circostanze e attraverso chiarimenti sulla varietà di comportamenti utili per affrontare i compiti più complessi (ricordare, applicare, esplorare ecc.).

Fondamentale per l’apprendimento degli studenti è infatti la *devoluzione*, il processo di responsabilizzazione da parte dell’allievo che “rompe” il contratto didattico e impegna la sua responsabilità nell’attività cognitiva in gioco, accettandone le conseguenze (Bolondi e Fandiño Pinilla, 2012).

Uno dei motivi del non innescarsi della devoluzione è una clausola del contratto didattico, detta la *clausola di delega formale*. Questa clausola è spiegata dalle parole di Bruno D’Amore:

Lo studente legge il testo, decide l’operazione da effettuare e i numeri con i quali deve operare; a quel punto scatta, appunto, la clausola di delega formale: non tocca più allo studente ragionare e controllare. Sia che faccia i calcoli a mano, tanto più se fa uso della calcolatrice, si instaura quella clausola che... disimpegna le facoltà razionali, critiche, di controllo: l’impegno dello studente è finito e ora tocca all’algoritmo o meglio ancora alla macchina, lavorare per lui. Il compito successivo dello studente sarà quello di trascrivere il risultato, qualsiasi

cosa sia e non importa che cosa esso significhi nel contesto problematico (D'Amore, 2002, pp. 87-88).

Come vedremo in seguito, alcuni degli errori più ricorrenti degli studenti oggetto della presente ricerca sono inquadrabili con alcune caratteristiche chiaramente riconducibili al contratto didattico (D'Amore, 1999).

## ***2.2. Errori e ostacoli che si frappongono all'apprendimento***

I motivi del non innescarsi della devoluzione possono essere diversi, come per esempio la mancanza delle conoscenze, di sicurezza delle procedure e lacune nella capacità di lettura e nell'interpretazione di situazioni problematiche.

Tra gli studi che sono stati compiuti per cercare di trovare una spiegazione riguardo alle difficoltà che gli studenti incontrano nella risoluzione di problemi di Matematica vi è la teoria degli ostacoli di Brousseau (Brousseau, 1983).

Riprendendo le parole di Bruno D'Amore (1999, p. 120):

Un ostacolo è un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi (anche solo cognitivi) precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla a un problema nuovo. Visto il successo ottenuto (anzi: a maggior ragione a causa di questo), si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti.

Un ostacolo può essere considerato una conoscenza che gli studenti possiedono, oppure una conoscenza legata ad altre conoscenze precedenti che però sono spesso poco corrette, imprecise e provvisorie, oppure una conoscenza precedente che ha avuto successo, ma che ora è inadatta. Un ostacolo, dal punto di vista dello studente, ha una valenza negativa in quanto si produce quando egli ritiene di poter applicare in un dato contesto concettuale un certo modello che poi risulta essere inadeguato.

L'ostacolo-errore crea quindi un conflitto in quanto esso va contro le certezze dell'allievo, poiché mette in dubbio il suo modello che egli tenta di considerare come universale o assoluto. Anche per un insegnante l'ostacolo ha valenza negativa perché viene considerato come "evidenziatore di difficoltà" nell'apprendimento della materia, mentre per un ricercatore in didattica esso ha valenza positiva in quanto viene considerato come condizione necessaria per la costruzione della conoscenza dell'allievo.

Nel corso del tempo lo studente può aver assunto un concetto ed essersene fatto un'immagine; questa immagine può essere stata rinforzata da prove ed esperienze ripetute. Ma può capitare che tale immagine si rilevi inadeguata, prima o poi, rispetto a un'altra dello stesso concetto, per esempio proposta dall'insegnante stesso o da altri, e non attesa, in contrasto cioè con la precedente.

Si crea così un conflitto tra la precedente immagine, che lo studente credeva definitiva, riguardante quel concetto, e la nuova; ciò accade specialmente quando la nuova immagine amplia i limiti di applicabilità del concetto, o ne dà una versione più comprensiva.

Dare agli errori solo connotazioni negative e non interpretarli come segnali di malessere cognitivo, appunto, è troppo semplicistico e banale: non si tratta solo di valutare negativamente lo studente che sbaglia; si tratta, invece, di dare gli strumenti necessari per l'elaborazione critica. Sta al docente, rendersi conto che quelle che lo studente crede essere concezioni corrette, sono in realtà delle misconcezioni.

Come riportato in D'Amore *et al.* (2008) «L'errore, dunque, non è necessariamente solo frutto di ignoranza, ma potrebbe invece essere il risultato di una conoscenza precedente, una conoscenza che ha avuto successo, che ha prodotto risultati positivi, ma che non tiene alla prova di fatti più contingenti o più generali» (p. 51).

Dunque, non si tratta sempre di errore di origine sconosciuta, imprevedibile, ma evidenzia una difficoltà. Queste considerazioni hanno portato la ricerca in didattica della Matematica a rivalutare in modo molto diverso dalla prassi usuale l'errore e il suo ruolo.

Come scriveva il matematico Federico Enriques ne *Il significato della storia del pensiero scientifico* (1936, p. 12):

Il maestro sa che la comprensione degli errori dei suoi allievi è la cosa più importante della sua arte didattica. Egli impara presto a distinguere gli errori significativi da quelli, che non sono propriamente errori – affermazioni gratuite di sfacciati che cercano di indovinare – dove manca lo sforzo del pensiero, della cui adeguatezza si vorrebbe giudicare. E degli errori propriamente detti, che talora sono in rapporto con manchevolezze delle singole menti, ma nei casi più caratteristici si presentano come tappe del pensiero nella ricerca delle verità, il maestro sa valutare il significato educativo: sono esperienze didattiche che egli persegue, incoraggiando l'allievo a scoprire da sé la difficoltà che si oppone al retto giudizio, e perciò anche a errare per imparare a correggersi. Tante specie di errori possibili sono altrettante occasioni di apprendere.

Quella che Enriques chiama *comprensione* va al di là della semplice osservazione dell'errore: è il risultato di un processo di *interpretazione*, fonamen-

tale per pianificare un'azione didattica che non si ponga l'obiettivo riduttivo di sostituire la risposta scorretta con una risposta corretta, ma cerchi invece di promuovere la comprensione degli allievi (Bussotti, 2012). Per avere un'interpretazione sempre più approfondita degli errori e delle possibili difficoltà che incontrano gli studenti, è molto efficace “posizionare” l'attività matematica in una delle fasi del ciclo della modellizzazione (OECD, 2013).

### 3. Il ciclo della matematizzazione

Il quadro di riferimento internazionale delle valutazioni standardizzate OCSE PISA 2012 tradotto da INVALSI definisce la competenza matematica come «la capacità di una persona di formulare, utilizzare e interpretare la Matematica in svariati contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la Matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo» (INVALSI, 2018, p. 25).

Nel Quadro di riferimento vengono indicate due direzioni lungo le quali i quesiti INVALSI sono costruiti, e in base alle quali i risultati sono organizzati e interpretati:

- i *contenuti matematici*, ovvero in quale ambito è posta la domanda (Numeri, Dati e previsioni, Relazioni e funzioni, Spazio e figure);
- i *processi cognitivi* che l'allievo deve attivare per rispondere alla domanda (Risolvere problemi, Conoscere, Argomentare).

La figura seguente (fig. 1) mostra una panoramica dei principali costrutti dell'attuale quadro di riferimento e indica le relazioni esistenti tra essi.

Il ciclo della matematizzazione comprende due processi di *matematizzazione orizzontale* che vengono definiti come il processo di *formulare* e quello di *interpretare*, e un processo di matematizzazione verticale che viene definito come il processo di *utilizzare*.

I tre verbi, formulare, utilizzare e interpretare si riferiscono ai processi in cui sono impegnati i ragazzi quando sono chiamati a risolvere problemi. In particolare, nella fase del *formulare* lo studente parte da una situazione così come si presenta nel contesto reale e la trasforma in una forma trattabile utilizzando un modello matematico (per esempio un'equazione, una funzione, un grafico ecc). Nella fase dell'*utilizzare* la Matematica lo studente lavora sul modello matematico utilizzando ragionamenti matematici, concetti e procedure, esegue calcoli, manipola espressioni algebriche, equazioni o

altri modelli. Nella fase dell'*interpretare* lo studente riflette sulle soluzioni matematiche che ha trovato e interpreta i risultati nel contesto del problema. Per fare ciò deve saper valutare le soluzioni e le argomentazioni ed essere in grado di determinare se i risultati sono ragionevoli in quel contesto. Come vedremo dall'analisi seguente, le domande analizzate in questa ricerca si "posizionano" nelle diverse fasi del ciclo della matematizzazione e evidenziano difficoltà specifiche in relazione a esse.

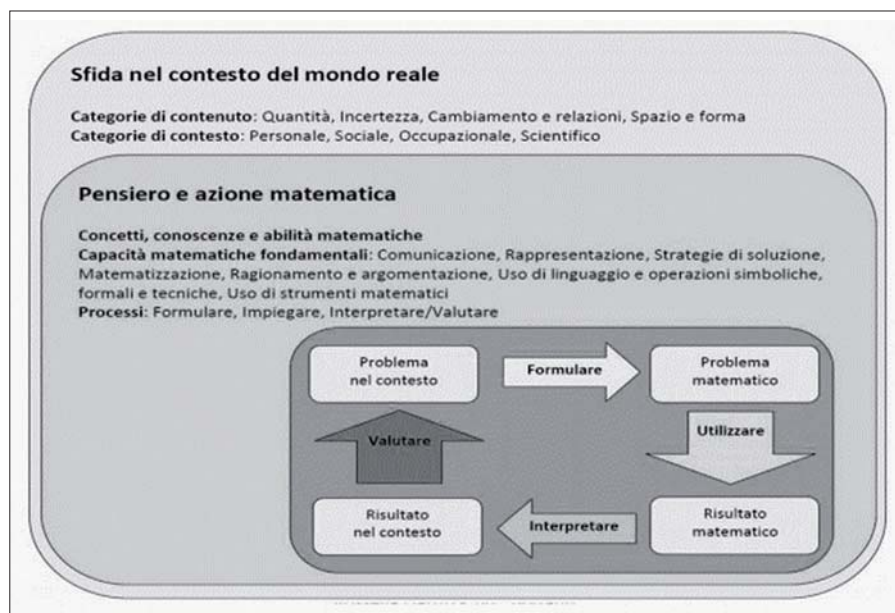


Fig. 1 – Il ciclo della matematizzazione

Fonte: OECD (2013)

#### 4. Analisi di quesiti INVALSI

Il Servizio Nazionale di Valutazione dell'INVALSI è passato definitivamente, per il livello 10, da una valutazione degli apprendimenti su supporto cartaceo (PP) a una somministrata su supporto informatico (CBT). Ciò ha permesso di raccogliere, in maniera centralizzata, una mole di dati imponente, con protocolli dettagliati e già digitalizzati.

Per lo sviluppo di questa ricerca sono stati selezionati 3 quesiti a risposta aperta di grado 10 del *main study* 2018.

Le ipotesi interpretative delle risposte errate più frequenti saranno successivamente da verificare con un'indagine qualitativa (interviste); è infatti in corso d'opera una ricerca qualitativa volta a indagare i processi, quindi le cause, degli errori più frequenti. Le tre domande analizzate nella nostra ricerca rientrano in tre ambiti differenti e precisamente in Numeri, Dati e previsioni e Spazio e figure e la loro dimensione è quella di Risolvere problemi e Argomentare.

<p><b>Domanda</b></p> <p><b>Anna ha speso:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• presso un'edicola un quinto del denaro con cui è uscita da casa,</li><li>• in cartoleria la metà del denaro rimanente.</li></ul> <p><b>Dopo i due acquisti le sono rimasti 20€.</b></p> <p><b>Domanda 1/2</b></p> <p><b>Qual è la quantità di denaro con cui Anna è uscita da casa?</b></p> <p><i>Digita la risposta alla domanda.</i></p> <p><b>Risposta:</b> <input type="text"/> €</p>
--

Fig. 2 – Quesito 1 – Domanda a risposta aperta univoca

**Classificazione:**

**Ambito**<sup>1</sup>: Numeri.

**Dimensione:** Risolvere problemi.

**Traguardo:** Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni possedute, le loro relazioni con ciò che si vuole determinare e la coerenza e plausibilità del procedimento risolutivo e dei risultati trovati.

**Scopo della domanda:** risolvere un problema di primo grado.

Per rispondere a questa domanda l'allievo/a deve individuare e utilizzare conoscenze di base (frazioni, percentuali) oppure un'equazione che consenta di risolvere il problema collegando fra loro le informazioni presenti nel testo e la loro rappresentazione (in particolare interpretando la frase “la metà del denaro rimanente”).

Risposta corretta: **50**.

<sup>1</sup> Per brevità espositiva, per ogni domanda, esplicitiamo le principali caratteristiche anche in riferimento al Quadro di riferimento INVALSI.

**Numero di studenti del campione:** 16.489.

Numero di risposte corrette: 6.459.

Numero di risposte mancanti: 1.391.

Numero di risposte errate: 8.639.

Percentuale di risposte corrette: 39,2%.

Percentuale di risposte errate: 52,4%.

Percentuale di risposte mancanti: 8,4%.

Risposte errate più frequenti (vedi tab. 1).

*Tab. 1 – Frequenze delle risposte alla domanda 1*

<i>Frequenze</i>	<i>Risposta</i>
2.342	200
670	100
534	48
525	40
358	60

Per risolvere il quesito in oggetto ci sono due possibili strategie, ognuna delle quali può portare a errori differenti:

- impostare e risolvere un’equazione;
- partire dal risultato e ripercorrere all’indietro la storia.

Nel primo caso, alcuni studenti hanno incontrato difficoltà a impostare l’equazione mentre altri l’hanno impostata correttamente ma hanno poi sbagliato a risolverla. Inquadrando le difficoltà nel ciclo della modellizzazione, nel primo caso l’errore si posiziona nel “formulare” mentre nel secondo caso è nell’“utilizzare” (OECD, 2013).

Questo task prevede una risposta aperta univoca; alcuni studenti hanno anche esplicitato il procedimento risolutivo ma nella maggior parte dei casi durante la correzione sono stati registrati solo prodotti, da cui i processi sono stati ipotizzati/dedotti.

Esaminiamo nel dettaglio le risposte errate più frequenti:

- 2.342 studenti, ossia il 14,2% sul totale (27,1% di coloro che sbagliano) rispondono 200.

Questa risposta è stata la più frequente. Analizzando la risposta possiamo ipotizzare che gli studenti siano partiti dall’unico dato numerico in loro possesso, cioè 20 euro, e lo abbiano moltiplicato per 5 e poi ancora per 2 (oppure prima per 2 e poi per 5) ottenendo 200.

In questa risposta c’è un evidente comportamento riconducibile al contratto didattico (Brousseau, 1988): lo studente pensa che per rispondere deve utilizzare (in qualche modo) esattamente i numeri del problema,



senza preoccuparsi troppo del ruolo che questi hanno all'interno del problema;

- 670 studenti, ossia il 4,1% sul totale (7,8% di coloro che sbagliano) rispondono 100.

Analizzando la risposta possiamo ipotizzare che in questo caso gli studenti abbiano moltiplicato 20 per 5;

- 525 studenti, ossia il 3,2% sul totale (6,1% di coloro che sbagliano) rispondono 40.

Analizzando la risposta possiamo ipotizzare che in questo caso gli studenti abbiano moltiplicato 20 per 2.

Questa risposta (come tutte quelle che portano a un risultato basso, inferiore a 40) è ovviamente assurda, perché 40 erano evidentemente gli euro dopo la prima spesa, quindi uscendo di casa Anna ne aveva sicuramente di più. In questo caso lo studente non si è preoccupato di verificare la verosimiglianza del proprio risultato e si è “affidato completamente al risultato” del calcolo che ha fatto; ciò è quello che, come abbiamo detto, viene detto *delega formale* ed è una clausola del contratto didattico (Brousseau, 1988);

- 358 studenti, ossia il 2,2% sul totale (4,1% di coloro che sbagliano) rispondono 60.

Analizzando la risposta possiamo ipotizzare che in questo caso gli studenti abbiano moltiplicato 20 per 2 e poi abbiano aggiunto 20;

- 534 studenti, ossia il 3,2% sul totale (6,2% di coloro che sbagliano) rispondono 48.

Cerchiamo di interpretare questo risultato. Dopo i due acquisti, ad Anna sono rimasti 20 €. In tabaccheria ne ha speso la metà, quindi ne aveva 40 (facile errore). All'edicola ha speso  $1/5$ .  $1/5$  di 40 è 8, quindi ne aveva 48. Si tratta di un classico errore di concettualizzazione che si può tradurre in “Faccio la parte di un tutto, ma sbaglio a scegliere il tutto”.

Osserviamo, inoltre, che in questo quesito gli studenti che sbagliano fanno operazioni (elementari) con i numeri a disposizione; tale comportamento si può ricondurre al noto effetto di contratto didattico “età del capitano” (D'Amore, 1999).

**Domanda**

Osserva il seguente diagramma ad albero. Dei 1000 pazienti di un medico solo 500 sono stati vaccinati contro l'influenza. Dopo alcuni mesi si è riscontrato che l'80% dei vaccinati non ha avuto l'influenza mentre il 40% dei non vaccinati non ha avuto l'influenza.

```

graph TD
    A[1000 pazienti] --> B[500 vaccinati]
    A --> C[500 non vaccinati]
    B --> D[400 non hanno avuto l'influenza]
    B --> E[100 hanno avuto l'influenza]
    C --> F[200 non hanno avuto l'influenza]
    C --> G[300 hanno avuto l'influenza]
  
```

**Domanda 3/4**

Qual è la probabilità che un paziente, preso a caso tra coloro che sono stati vaccinati, abbia avuto l'influenza?

Fai riferimento al diagramma a sinistra e digita la risposta alla domanda.

Risposta:  %

Fig. 3 – Quesito 2 – Domanda a risposta aperta univoca

**Ambito:** Dati e previsioni.

**Dimensione:** Risolvere problemi.

**Traguardo:** Esprime valutazioni e stime di probabilità in situazioni caratterizzate da incertezza. Esprime stime di probabilità di eventi composti a partire dalla conoscenza delle probabilità di eventi elementari.

**Scopo della domanda:** Calcolare una probabilità a partire dai dati ricavabili da un diagramma ad albero o dalla descrizione di una situazione effettuando un'elaborazione che richiede operazioni aritmetiche elementari.

Risposta corretta: **20**.

**Numero di studenti del campione:** 16.422.

Numero di risposte corrette: 8.005.

Numero di risposte mancanti: 616.

Numero di risposte errate: 7.801.

- Percentuale di risposte corrette: 48,7%.
- Percentuale di risposte errate: 47,5%.
- Percentuale di risposte mancanti: 3,8%.
- Risposte errate più frequenti (vedi tab. 2).

Tab. 2 – Frequenze delle risposte alla domanda 2

<i>Frequenze</i>	<i>Risposta</i>
2.344	10
1.316	40
712	50
608	60
467	80

Anche in questo caso abbiamo risposte univoche; i processi messi in atto per la risoluzione li possiamo solo dedurre/ipotizzare. Esaminiamo nel dettaglio le risposte errate più frequenti:

- 2.344 studenti, ossia il 14,3% sul totale (30% di coloro che sbagliano) rispondono 10.

Questa risposta errata è stata la più ricorrente. Possiamo ipotizzare che gli studenti, utilizzando i dati del diagramma ad albero, abbiano calcolato la percentuale richiesta in questo modo:

$$P = 100 / 1.000 = 0,1 = 10\%$$

essendo 1.000 il totale degli individui della popolazione e 100 i pazienti vaccinati che hanno avuto l'influenza.

Questi studenti dimenticano di riconsiderare lo spazio degli eventi. Non comprendono che la popolazione a cui far riferimento per rispondere alla domanda è solo quella dei vaccinati e non dei 1.000 pazienti;

- 1.316 studenti, ossia l'8% sul totale (16,9% di coloro che sbagliano) rispondono 40. In questo caso gli studenti utilizzano in modo errato l'informazione contenuta nel testo e scrivono come risposta il dato fornito nel testo che rappresenta invece la probabilità che un paziente non vaccinato non abbia avuto l'influenza;
- 712 studenti, ossia il 4,3% sul totale (9,1% di coloro che sbagliano) rispondono 50.

Analizzando la risposta possiamo ipotizzare che gli studenti, utilizzando i dati del diagramma ad albero, abbiano calcolato la percentuale richiesta in questo modo:

$$P = 500 / 1.000 = 0,5 = 50\%$$

essendo 1.000 i pazienti in totale e 500 i pazienti vaccinati.

Calcolano così la probabilità che un individuo preso a caso dall'insieme dei 1000 pazienti abbia avuto l'influenza. Anche gli studenti che commettono questo errore dimostrano di non comprendere che la domanda è un problema di probabilità condizionata e che lo spazio degli eventi va ristretto ai soli pazienti che sono stati vaccinati;

- 608 studenti, ossia il 3,7% sul totale (7,8% di coloro che sbagliano) rispondono 10.

Possiamo ipotizzare che gli studenti, utilizzando i dati del diagramma ad albero, abbiano calcolato la percentuale richiesta in questo modo:

$$P = (500 + 100) / 1.000 = 600/1.000 = 0,6 = 60\%$$

essendo 1.000 i pazienti in totale, 500 i pazienti vaccinati e 100 i pazienti vaccinati che hanno avuto l'influenza;

- 467 studenti, ossia il 2,8% sul totale (6% di coloro che sbagliano) rispondono 80.

Possiamo ipotizzare che gli studenti, utilizzando i dati del diagramma ad albero, abbiano calcolato la percentuale richiesta in questo modo:

$$P = (500 + 300) / 1.000 = 800/1.000 = 0,8 = 80\%$$

essendo 1000 i pazienti in totale, 500 i pazienti vaccinati e 300 i pazienti non vaccinati che hanno avuto l'influenza.

In questa domanda si deve calcolare la probabilità di un evento in una situazione di probabilità condizionata, che richiede di individuare e riconsiderare lo spazio degli eventi in cui si opera. Se l'allievo/a leggesse con attenzione il testo ("l'80% dei vaccinati non ha avuto l'influenza") potrebbe immediatamente dare la risposta corretta: "il 20% dei vaccinati ha avuto l'influenza" senza la necessità di quantificare la cardinalità del nuovo spazio degli eventi.

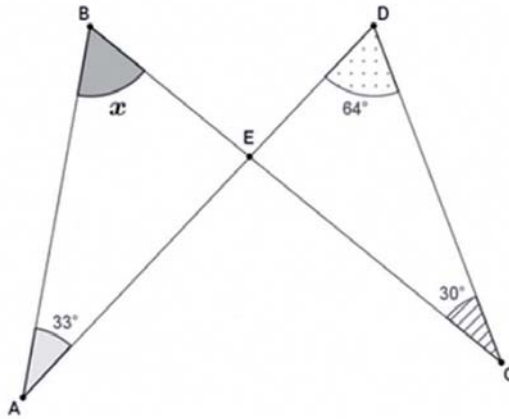
La domanda risulta di livello di difficoltà elevato (essendo uguale a 47,5 la percentuale di risposte errate) probabilmente perché la maggior parte degli studenti cerca di ottenere la risposta riconsiderando i dati riportati sul diagramma ad albero e non riconosce che la popolazione a cui deve far riferimento è quella dei vaccinati, cioè 500 individui e non l'intera popolazione.

Osserviamo che la domanda chiedeva un'informazione che era contenuta esplicitamente nel testo, e che ovviamente poteva anche essere ricavata dal diagramma ad albero. La clausola del contratto didattico, nota come *Esigenza di giustificazione formale* (Bolondi e Fandiño Pinilla, 2012), fa sì che molti studenti non si accontentino di osservare che l'informazione è contenuta nel testo, ma ritengano di dover eseguire operazioni (in questo caso sul diagramma).

Questa strategia naturalmente comporta la possibilità di errori.

**Domanda**

Osserva la figura.



Giulia afferma che l'ampiezza  $x$  dell'angolo  $\widehat{ABE}$  è  $61^\circ$ .

Giulia ha ragione? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

Fai riferimento alla figura a sinistra e digita la risposta alla domanda nella casella corretta.

Giulia ha ragione, perché

Giulia non ha ragione, perché

Fig. 4 – Quesito 3 – Domanda a risposta aperta

**Ambito:** Spazio e figure.

**Dimensione:** Argomentare.

**Traguardo:** Produce argomentazioni esplicitando la tesi, utilizzando conoscenze e forme argomentative pertinenti alla tesi oggetto di argomentazione.

**Scopo della domanda:** Produrre un'argomentazione per giustificare un'affermazione data, utilizzando conoscenze relative agli angoli e ai triangoli.

**Risposta corretta:** “Giulia ha ragione perché ...”

Accettabili tutte le risposte che utilizzino contemporaneamente le due seguenti informazioni:

- gli angoli DEC e BEA hanno stessa ampiezza perché sono angoli opposti al vertice;
- la somma degli angoli interni di un triangolo è  $180^\circ$ .

(Corretta se risposta e giustificazione sono entrambe corrette).

**Numero di studenti del campione:** 15.223.

Numero di risposte corrette: 3.225.

Numero di risposte errate: 8.444.

Numero di risposte mancanti: 3.554.

Percentuale di risposte corrette: 21,2%.

Percentuale di risposte errate: 55,5%.

Percentuale di risposte mancanti: 23,3%.

Come si può osservare, è abbondantemente superiore la percentuale di studenti che sbagliano rispetto a quelli che rispondono correttamente.

Questo quesito si differenzia in particolar modo dagli altri due in quanto si chiede allo studente di *giustificare* un'argomentazione.

La domanda, in particolare, richiede di produrre una dimostrazione che coinvolge alcune conoscenze di geometria euclidea: la somma degli angoli interni di un triangolo e la congruenza degli angoli opposti al vertice. In questa domanda, quindi, non solo si richiede la conoscenza di fatti geometrici fondamentali, ma anche di produrre e articolare una dimostrazione esplicitando i diversi passi argomentativi.

In fase di correzione è stato comunque deciso di considerare accettabili le risposte in cui si utilizza come implicito il fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo sia  $180^\circ$  o che gli angoli opposti al vertice siano congruenti.

Nei protocolli seguenti, sono mostrate alcune delle risposte errate più frequenti (vedi tab. 3).

Tab. 3 – Risposte errate più frequenti

---

Si perché	La somma degli angoli di un triangolo è $180^\circ$
Si perché	L'angolo AEB è $86^\circ$
Si perché	$61+33=94$ ed è equivalente a $64+30=94$
Si perché	$64-33=31$ e $30+31=61$
Si perché	$64-3=61$
Si perché	ABE è 61
Si perché	Essendo un angolo acuto è sempre minore di $90^\circ$
Si perché	È un angolo acuto
Si perché	Giulia ha ragione perchè i due triangoli sono uguali
Si perché	L'angolo A è di 33 gradi
Si perché	Gli angoli opposti al vertice hanno la stessa ampiezza, quindi l'angolo in B deve essere per forza $61^\circ$
Si perché	Gli angoli ottusi e acuti dei triangoli hanno una differenza di $3^\circ$
Si perché	Gli angoli sono tutti uguali
Si perché	Il triangolo è rettangolo
Si perché	In tutti e due i triangoli la somma degli angoli è 184
No perché	La somma degli angoli di un triangolo deve essere di $180^\circ$
No perché	La somma degli angoli interni supera $180^\circ$
No perché	Gli angoli sono diversi
No perché	I due triangoli sono uguali
No perché	L'ampiezza degli angolo è $57^\circ$
No perché	L'ampiezza è di $64^\circ$
No perché	$180-33-90=57$
No perché	$61^\circ+33^\circ+90^\circ > 180^\circ$

---

Dall'analisi delle risposte possiamo osservare che diversi allievi omettono di utilizzare o esplicitare entrambe le conoscenze coinvolte nella dimostrazione.

Di fronte a domande aperte articolate ci poniamo, allora, una domanda: quand'è che un'argomentazione è da considerarsi corretta e completa?

Durante il percorso scolastico, questo è un punto che evolve continuamente. Nel ventaglio amplissimo di risposte (circa 11.200 risposte diverse) che gli studenti hanno dato, si vede che loro decidono quali elementi esplicitare e quali sottintendere, quali ripetere e quali no: probabilmente, queste scelte dipendono da fattori "contrattuali" stabiliti all'interno delle loro classi. Questo rende particolarmente delicata la correzione omogenea di queste domande.

## 5. Conclusioni e implicazioni didattiche

Come abbiamo visto nel presente contributo, dalla correzione dei quesiti INVALSI emergono vari macrofenomeni a livello nazionale, inquadrabili con alcuni costrutti di didattica della Matematica. Con la correzione centralizzata è stato possibile analizzare tutte le risposte fornite alle domande aperte da parte degli studenti italiani. Questa enorme mole di dati consente di analizzare in profondità i processi e non solo i prodotti, permettendo così di indagare caratteristiche e peculiarità di difficoltà diffuse a livello nazionale. La maggior parte degli errori messi in luce dalla correzione centralizzata non sono strettamente collegati ai contenuti in gioco ma dipendono da clausole e effetti di contratto didattico e da difficoltà nel padroneggiare le competenze logico-argomentative. Da sempre, i risultati delle valutazioni standardizzate mettono in luce fenomeni didattici permettendone una quantificazione a livello nazionale; da quando le prove sono CBT è possibile analizzare in modo profondo le risposte, permettendo di ottenere informazioni decisive in termini di cause e difficoltà.

### Riferimenti bibliografici

- Baruk S. (1985), *L'âge du capitaine, De l'erreur en mathématiques*, Seuil, Paris.
- Binanti L. (2005), *Sbagliando s'impara. Una rivalutazione dell'errore*, Armando-Università degli Studi di Lecce, Roma.
- Bolondi G., Fandiño Pinilla M.I. (2012), *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*, Edises, Napoli.
- Brousseau G. (1988), "Le contrat didactique: le milieu", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9, 3, pp. 309-336.
- Brousseau G. (1986), "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 2, pp. 33-115.
- Brousseau G. (1983), "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4, 2, pp. 165-198.
- Brousseau G. (1980), "L'échec et le contrat", *Recherches en didactique des mathématiques*, 41, pp. 177-182.
- Bussotti P. (2012), "Federigo Enriques e la didattica della matematica", *Euclide. Giornale di matematica per i giovani*, testo disponibile al sito: <https://euclide-scuola.org/>, data di consultazione 26/01/2021.
- D'Amore B. (2007), "Epistemologia, didattica della matematica e pratiche d'insegnamento", *La matematica e la sua didattica*, 21, 3, pp. 347-369.
- D'Amore B. (2002), "La ricerca in didattica della matematica come epistemologia dell'apprendimento della matematica", *Scuola & Città*, 4, pp. 56-82.
- D'Amore B. (1999), *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora, Bologna.



- D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008), *La didattica e le difficoltà in matematica*, Erickson, Trento.
- Enriques F. (1936), *Il significato della storia del pensiero scientifico*, Zanichelli, Bologna.
- Ferretti F., Giberti C., Lemmo A. (2018), “The Didactic Contract to interpret some statistical evidence in mathematics standardized assessment tests”, *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14, 7, pp. 2895-2906.
- INVALSI (2018), *Quadro di riferimento per la matematica*, testo disponibile al sito: [https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR\\_MATEMATICA.pdf](https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf), data di consultazione 26/1/2021.
- IREM Bordeaux (1978), “Étude de l'influence de l'interprétation des activités didactiques sur les échecs électifs de l'enfant en mathématiques. Project de Recherche CNRS, Enseignement élémentaire des mathématiques”, *Cahier de l'IREM de Bordeaux*, I, 18, pp. 170-181.
- OECD (2013), *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, OECD Publishing, Paris.
- Zan R. (2000), “Misconceptions e difficoltà in matematica”, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 23A, 1, pp. 45-68.
- Zan R. (2007), *Difficoltà in matematica: osservare, interpretare, intervenire*, Springer, Milano.

## *Gli autori*

**Stefano Babini** insegna Matematica e Fisica presso il liceo artistico statale “Paolo Toschi” di Parma. Appassionato di problem solving, comunicazione didattica e nuove tecnologie applicate alla didattica. Si occupa di processi di apprendimento e valutazione in vari contesti formativi e di sistema. Fa parte del gruppo di ricerca in Didattica della Matematica “Divertical-Math”. Collabora da anni con l’INVALSI.

**Alice Barana** ha conseguito il dottorato in Matematica Pura e Applicata ed è assegnista di ricerca in Didattica della Matematica presso il Dipartimento di Biotecnologie Molecolari e Scienze per la Salute dell’Università di Torino. È anche docente di Matematica nella scuola secondaria di secondo grado. In particolare studia l’utilizzo di ambienti digitali di apprendimento integrati con ambienti di calcolo evoluto e con sistemi di valutazione automatica per lo sviluppo di competenze matematiche e di problem solving.

**Giorgio Bolondi**, matematico, Ph.D. in Geometria algebrica, si interessa di come la conoscenza Matematica passa di generazione in generazione e da persona a persona. Insegna alla Libera Università di Bolzano; la sua attuale attività di ricerca è focalizzata sulla valutazione degli apprendimenti e sullo sviluppo professionale degli insegnanti di Matematica.

**Laura Branchetti** è ricercatrice a tempo determinato di Didattica della Matematica e Matematiche complementari all’Università di Parma e membro di gruppi di ricerca di Bologna in Didattica della Matematica e Didattica della Fisica. Da anni si occupa di formazione degli insegnanti, ha collaborato con INVALSI e ha condotto ricerche a partire dai dati INVALSI in varie occasioni, in collaborazione con colleghi di didattica della Matematica e didattica dell’Italiano.

**Fabio Brunelli**, laureato in Matematica, ha insegnato Matematica e Scienze in una scuola secondaria di I grado. Ha collaborato con INDIRE come autore di materiali, come esperto nel progetto MPI-INVALSI. Nel luglio 2016 ha partecipato alla Scuola Autori INVALSI. Tiene corsi di formazione in istituti comprensivi.

**Clelia Cascella**, dottore di ricerca in Metodologia delle Scienze sociali e in Business administration, è ricercatrice in Statistica sociale e psicomètria all'INVALSI. Ha principalmente lavorato con modelli IRT e di statistica multivariata per studiare l'effetto che variabili personali e ambientali hanno sul rendimento degli studenti, con particolare attenzione alla Matematica.

**Stefania Comerci**, insegnante di ruolo di Matematica e Fisica nella scuola secondaria di II grado. Ha conseguito il diploma di specializzazione all'insegnamento nelle classi A047 Matematica/A049 Matematica e Fisica (SSIS Torino 1999-2001).

**Francesca Ferrara** è professoressa associata in Didattica della Matematica presso il Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università degli Studi di Torino. Si occupa di progetti di ricerca didattica, di formazione docenti e di terza missione, è autrice di numerosi capitoli di libro e articoli su riviste nazionali e internazionali. È membro del Comitato Scientifico della Società Europea di Ricerca in Didattica della Matematica.

**Giulia Ferrari** ha ottenuto un PhD in Matematica con una tesi di ricerca in Didattica della Matematica e svolge attività di ricerca all'Università degli Studi di Torino. La sua ricerca si focalizza sul ruolo del movimento e delle tecnologie nell'attività matematica. Collabora in progetti di ricerca, di formazione docenti e di terza missione ed è autrice di articoli su riviste del settore.

**Federica Ferretti** è ricercatrice di Didattica della Matematica presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Ferrara. I suoi principali interessi di ricerca sono il contratto didattico in tutti i livelli scolastici, la valutazione formativa e l'uso formativo delle valutazioni standardizzate. Si occupa da diversi anni di formazione insegnanti di matematica di tutti i livelli scolastici.

**Alessandro Gambini**, PhD in Matematica con tesi in Teoria analitica dei numeri, svolge da anni attività di formazione e divulgazione nel campo della Matematica. È professore associato presso Sapienza Università di Roma e

si occupa di valutazioni standardizzate e dell'utilizzo delle geometrie non-euclidee in ambito didattico.

**Paola Gario** è stata professore ordinario di Matematiche complementari all'Università di Milano dove ha tenuto corsi di Matematiche elementari dal punto di vista superiore, corsi di Didattica della Matematica, in particolare della Geometria, e corsi di Storia della Matematica orientati alle applicazioni nell'ambito dell'insegnamento secondario. Da anni si occupa di formazione iniziale degli insegnanti di Matematica della scuola secondaria di primo e di II grado. Le sue ricerche sono orientate alla Storia della Matematica italiana tra otto e novecento.

**Chiara Giberti**, PhD in didattica della Matematica, è ricercatrice in Didattica della Matematica presso l'Università di Bergamo. Collabora con INVALSI e si interessa dell'interpretazione dei risultati delle prove standardizzate ai fini della ricerca in didattica della Matematica. Insegnante in aspettativa nella scuola secondaria di I grado, si occupa di formazione insegnanti e collabora con il centro per l'innovazione in campo educativo Future Education Modena.

**Ivan Graziani** insegna Matematica e Scienze. Formatore in Didattica della Matematica. Appassionato di ICT, problem solving e comunicazione didattica. Fa parte del Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica della Matematica – Pisa (GRSDM) e del gruppo di ricerca “Divertical-Math”. Collabora da anni con UNIBO, INDIRE e INVALSI.

**Marina Marchisio** è professore ordinario di Matematiche Complementari presso il Dipartimento di Biotecnologie Molecolari e Scienze per la Salute dell'Università di Torino, si occupa di apprendimento della Matematica e delle discipline scientifiche con metodologie e tecnologie digitali innovative. È la Delegata del Rettore per lo sviluppo e la promozione delle strategie di Digital Education dell'Ateneo. Membro del gruppo di lavoro Problem Posing and Solving del MUR, gestisce numerosi progetti di ricerca e didattica. Ha tenuto conferenze, organizzato convegni, autrice di oltre 100 lavori scientifici nell'ambito della Geometria Algebrica e della Digital Education.

**Enrico Pietropoli**, organista e docente di Matematica e Fisica, esperto nell'ambito delle indagini nazionali e internazionali sugli apprendimenti degli studenti, formatore di docenti, tutor  $m@t.abel$ , referente per la valutazione, somministratore delle prove di ancoraggio, tutor coordinatore TFA, già

docente in sezioni ospedaliere e docente nel potenziamento della didattica della Matematica, docente per “Sapienza” nella preparazione ai test di ammissione ai corsi dell’area biomedica.

**Stefania Pozio**, laurea in Geologia e PhD in Pedagogia sperimentale, è responsabile delle prove INVALSI nazionali di Matematica. È primo ricercatore presso INVALSI e la sua principale attività di ricerca è lo studio degli errori che gli studenti fanno alle domande di Matematica delle indagini nazionali e internazionali.

**Giovanni Pucciarini**, è docente di scuola secondaria di I grado presso l’istituto comprensivo “Perugia 6”. È collaboratore del Dirigente scolastico. Ha avuto esperienze di collaborazione come somministratore e Osservatore INVALSI.

**Ottavio G. Rizzo** è ricercatore di Geometria all’Università di Milano. Ha un dottorato in Geometria aritmetica alla Brown University; si occupa di crittografia, artefatti digitali nella didattica della Matematica, formazione degli insegnanti; è direttore dell’Istituto GeoGebra di Milano e presidente della sezione milanese della Mathesis.

**Annamaria Romano** è docente di scuola primaria presso l’istituto comprensivo “Perugia 6”. Svolge la Funzione strumentale dell’area della Valutazione ed Autovalutazione di istituto. È tutor dei tirocinanti della Facoltà di Scienze della formazione primaria dell’Università di Perugia. Nella scuola di appartenenza è formatore degli insegnanti e promuove sperimentazioni.

**Chiara Saletti**, laureata in materie letterarie nel 1995, è docente di scuola primaria presso l’istituto comprensivo “Masaccio” di Firenze e autrice di testi scolastici. Inserita nell’elenco ordinario INVALSI degli Esperti SNV e ValuE, si occupa di valutazione a livello provinciale e regionale, con formazione acquisita presso l’INVALSI e il Politecnico di Milano. Collabora come autrice e consulente per *La Vita Scolastica* (editore Giunti) sui temi della valutazione.

**Ada Sargenti** è responsabile Stanza della Matematica-Associazione La Casa degli Insegnanti. Docente ruolo di Matematica in IIS, formatrice PNI, supervisore e docente a contratto SIS Piemonte. Membro Nucleo di Ricerca Didattica CNR-Dip. Matematica-Politecnico Torino. Nel campo della Didattica della Matematica con le tecnologie: sperimentazioni, formazione docenti, pubblicazioni testi e articoli.

**Ketty Savioli** è docente di scuola primaria presso l'istituto comprensivo "Chieri III" (TO), con una laurea in Matematica conseguita all'Università degli Studi di Torino. Collabora con INVALSI, TIMSS per il quarto anno della scuola primaria e in altri progetti per la valutazione e il miglioramento del sistema scolastico. È membro della CIIM, Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica.

**Patrizia Sommi** è docente di Matematica nella scuola secondaria dal 1992. Ha seguito corsi di perfezionamento in didattica della Matematica e sui metodi della valutazione scolastica. Ha seguito corsi sulla didattica per competenze e sull'uso delle nuove tecnologie.

**Claudia Testa** è insegnante di ruolo di Matematica nella scuola superiore. Supervisore SIS Piemonte e docente a contratto, indirizzo FIM. Formatore. Autore di libri di testo. Membro di gruppi di ricerca in didattica della Matematica e relatore a convegni nazionali e internazionali. Autore prove INVALSI.

**Sabrina Tiralongo** è laureata in Matematica con tesi in Didattica della Matematica. Si occupa di divulgazione della Matematica, di attività con studenti e di formazione insegnanti. Collabora con l'INVALSI per quanto riguarda la costruzione delle prove di Matematica per la scuola secondaria di I grado.

# Vi aspettiamo su:

**[www.francoangeli.it](http://www.francoangeli.it)**

per scaricare (gratuitamente) i cataloghi delle nostre pubblicazioni

DIVISI PER ARGOMENTI E CENTINAIA DI VOCI: PER FACILITARE  
LE VOSTRE RICERCHE.



Management, finanza,  
marketing, operations, HR

Psicologia e psicoterapia:  
teorie e tecniche

Didattica, scienze  
della formazione

Economia,  
economia aziendale

Sociologia

Antropologia

Comunicazione e media

Medicina, sanità



Architettura, design,  
territorio

Informatica, ingegneria

Scienze

Filosofia, letteratura,  
linguistica, storia

Politica, diritto

Psicologia, benessere,  
autoaiuto

Efficacia personale

Politiche  
e servizi sociali



**FrancoAngeli**

La passione per le conoscenze

Questo   
LIBRO

 ti è piaciuto?

---

**Comunicaci il tuo giudizio su:**  
[www.francoangeli.it/latuaopinione.asp](http://www.francoangeli.it/latuaopinione.asp)



VUOI RICEVERE GLI AGGIORNAMENTI  
SULLE NOSTRE NOVITÀ  
NELLE AREE CHE TI INTERESSANO?



ISCRIVITI ALLE NOSTRE NEWSLETTER

SEGUICI SU:



**FrancoAngeli**

La passione per le conoscenze



La competenza matematica, intesa come la “capacità di sviluppare e mettere in atto il pensiero matematico per trovare le soluzioni a vari problemi in situazioni quotidiane” (MIUR, 2012), è considerata come una delle abilità chiave per la realizzazione personale, la cittadinanza attiva, l’inclusione sociale e l’educazione permanente, sia in ambito nazionale che internazionale. Data la sua rilevanza nel processo di formazione di ogni individuo, il processo di insegnamento/apprendimento della Matematica è da sempre al centro di studi, ricerche e sperimentazioni volte non solo a evidenziare le buone pratiche messe in atto nelle scuole, ma anche a individuare eventuali criticità e possibili percorsi di miglioramento.

Il presente volume è incentrato proprio su questo ambito di studi e, nel raccogliere alcune ricerche di approfondimento presentate alla III edizione del Seminario “I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca” (Bari 26-28 ottobre 2018), intende mostrare come i dati prodotti dall’Istituto possano fornire un potente strumento per interrogarsi sui processi di apprendimento della Matematica e per migliorare l’attività didattica in classe, facendo anche emergere la produttività della collaborazione fra ricercatori e insegnanti.

**Patrizia Falzetti** è Responsabile del Servizio Statistico dell’INVALSI, che gestisce l’acquisizione, l’analisi e la restituzione dei dati riguardanti le rilevazioni nazionali e internazionali sugli apprendimenti alle singole istituzioni scolastiche, agli *stakeholders* e alla comunità scientifica.