

Andreas Pettersen og
Fredrik Jensen (red.)

Matematisk kompetanse

I dybden på resultater fra PISA 2022

Matematisk kompetanse

Andreas Pettersen og Fredrik Jensen (red.)

Matematisk kompetanse

I dybden på resultater fra PISA 2022

CAPPELEN DAMM FORSKNING

© 2024 Andreas Pettersen, Fredrik Jensen, Ingeborg Lid Berget,
Hege Kaarstein, Maria Løvgren, Reidar Mosvold, Trude Nilsen,
Guri A. Nortvedt, Jelena Radišić og Marte K. Senneset.

Bokens design og sats: © 2024 Cappelen Damm AS

Dette verket omfattes av bestemmelsene i *Lov om opphavsretten til åndsverk m.v.* av 1961. Verket utgis Open Access under betingelsene i Creative Commons-lisensen CC-BY 4.0. Denne tillater tredjepart å kopiere, distribuere og spre verket i hvilket som helst medium eller format, og å remixe, endre, og bygge videre på materialet til et hvilket som helst formål, inkludert kommersielle, under betingelse av at korrekt kreditering og en lenke til lisensen er oppgitt, og at man indikerer om endringer er blitt gjort. Tredjepart kan gjøre dette på enhver rimelig måte, men uten at det kan forstås slik at lisensgiver bifaller tredjepart eller tredjeparts bruk av verket.

Lisensvilkår: <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Antologien er utgitt med støtte fra Utdanningsdirektoratet.

IISBN Hefte utgave: 9788202854300
ISBN PDF: 9788202839284
ISBN EPUB: 9788202854317
ISBN HTML: 9788202854324
ISBN XML: 9788202854331
DOI: <https://doi.org/10.23865/cdf.222>



Dette er en fagfelleverdert antologi med unntak av kapittel 1, som er et innledningskapittel, og kapittel 10, som er et avslutningskapittel.

Omslagsdesign: Cappelen Damm AS

Cappelen Damm Forskning er redaksjonen for åpen
forskningspublisering i Cappelen Damm Akademisk.
Cappelen Damm Akademisk
forskning@cappelendamm.no

Innhold

Forord	7
Kapittel 1 Innledning	9
<i>Andreas Pettersen og Fredrik Jensen</i>	
Kapittel 2 Matematikk i PISA 2003–2022: Måling av endringer i et samfunn som endrer seg	21
<i>Andreas Pettersen, Hege Kaarstein og Guri A. Nortvedt</i>	
Kapittel 3 Hvor relevante er PISA-resultatene for matematikkfaget i Norge? – En sammenlikning av matematisk kompetanse i PISA 2022 og LK20	49
<i>Andreas Pettersen</i>	
Kapittel 4 Å kome i gang med matematisk modellering i klasserommet – kan PISA-oppgåver vise veg frå kaos til system i første del av modelleringsprosessen?	75
<i>Ingeborg Lid Berget, Maria Løvgren og Andreas Pettersen</i>	
Kapittel 5 Hvordan argumenterer norske elever i matematikk? En analyse av 15-åringers besvarelser på tre oppgaver fra PISA 2022	111
<i>Marte K. Senneset og Andreas Pettersen</i>	
Kapittel 6 Matematikkundervisning i norske og nordiske klasserom – klasseledelse, støttende undervisning og faglige utfordringer	139
<i>Trude Nilssen og Andreas Pettersen</i>	
Kapittel 7 Like muligheter til matematisk kompetanse?	167
<i>Trude Nilssen og Fredrik Jensen</i>	
Kapittel 8 Lavtpresterende elever i matematikk	187
<i>Fredrik Jensen og Trude Nilssen</i>	

Chapter 9 Succeeding against the odds: Exploring self-beliefs and academic emotions profiles of resilient and non-resilient students	213
<i>Jelena Radišić and Andreas Pettersen</i>	
Kapittel 10 Avsluttende bemerkninger	241
<i>Andreas Pettersen og Fredrik Jensen</i>	
Kapittel 11 PISA og den internasjonale forskningen.....	251
<i>Reidar Mosvold</i>	
Vedlegg 1 Mestringsnivåer i matematikk i PISA 2022.....	273

Forord

I 2022 ble PISA-undersøkelsen gjennomført for åttende gang, og hovedresultatene for de tre fagområdene matematikk, naturfag og lesing ble offentliggjort i en kortrapport i desember 2023. Norge deltok også på tilleggundersøkelsen i økonomiforståelse, og hovedresultatene fra denne undersøkelsen ble publisert i en egen kortrapport i juni 2024. PISA-undersøkelsen er finansiert av Utdanningsdirektoratet og gjennomføres av Institutt for lærerutdanning og skoleforskning (ILS) ved Universitetet i Oslo.

Denne boka går i dybden på fagområdet matematikk, som var såkalt hovedområde i PISA 2022. Det betyr at rammeverket som definerer matematisk kompetanse, ble fornyet. Det ble også lagt til mange nye oppgaver i matematikk, og i spørreskjemaet til elevene var det flere spørsmål som handlet spesielt om matematikk.

Boka er skrevet for alle som er interessert i matematikkfaget i skolen. Lærerstudenter og matematikklærere vil ha nytte av å lese kapittel 2–5 i sin fulle lengde, mens kapittel 6–9 retter seg mer mot forskere og de som jobber med politikktutforming.

Vi vil gjerne rette en stor takk til alle skolene som deltok i undersøkelsen, og til alle som har bidratt til denne boka. Vi setter stor pris på kommentarene fra fagfellene som har brukt tid på å lese kapitlene. Tove S. Frønes, Anna Eriksen, Eva K. Narvhus og Cecilie Weyergang ved ILS har lest og gitt verdifulle kommentarer i alle faser av arbeidet. Ann Kristin Gresaker har vært vår redaktør i Cappelen Damm Akademisk – tusen takk for godt samarbeid!

Blindern, 4. juli 2024

Andreas Pettersen og Fredrik Jensen

KAPITTEL 1

Innledning

Andreas Pettersen Universitetet i Oslo

Fredrik Jensen Universitetet i Oslo

Da hovedresultatene for PISA 2022 ble lansert i desember 2023, fikk de som vanlig stor medieoppmerksomhet. Resultatene viste historisk svake faglige prestasjoner og var nedslående sett med norske øyne (Jensen et al., 2023). I alle de tre fagområdene var det

- betydelig tilbakegang i prestasjoner, spesielt i matematikk
- større andel elever som presterte på lavt nivå enn tidligere
- økende forskjell i prestasjoner mellom elever med ulik hjemmebakgrunn (sosioøkonomisk status)

Videre viste resultatene at nesten én av tre elever presterte på lavt nivå i matematikk, og at en stor andel norske elever rapporterte om negative følelser i møte med matematikk.

Matematikk er en sentral del av utdanningen i Norge. Det har det vært i mange hundre år, og det vil det trolig være i tiden framover også. De siste årene har antallet undervisningstimer i matematikk økt (Djupedal, 2022), og vi kan stadig lese om at samfunnet trenger mer realfagskompetanse for å løse mange av de store utfordringene vi står overfor (Fornybar Norge, 2022). Samtidig er det mange negative holdninger og følelser knyttet til matematikkfaget, ikke bare blant 15-åringene som deltok i PISA 2022, men også i befolkningen generelt. Dette er heller ikke noe nytt, og mange vil trolig kjenne seg igjen i uttalelsen til kirkestatsråden J. Sverdrup i Stortingssalen i 1896:

Jeg har næret adskillig bitre Følelser overfor Mathematikkundervisningen. Mange Gange senere har jeg spurt mig selv, hvad Nytte jeg egentlig har havt af Mathematikken. Jeg har ikke siden jeg studerede den, aabnet en mathematisk Bog for at læse den for den literære eller matematiske Nydelses Skyld, og jeg kan ikke sige, at jeg har havt noget Brug for den Mathematik, jeg lærte. (Dokka, 1988, s. 120)

Siden den gang har matematikk fått en stadig viktigere rolle i den teknologiske og samfunnsøkonomiske utviklingen, og gjennomsyrrer på mange måter samfunnets infrastruktur og alle de digitale tingene og tjenestene vi omgir oss med. På tross av dette opplever mange matematikk og matematikkfaget som irrelevant. Niss (1994) omtalte dette som et relevanseparadoks: Matematikkfaget spiller en viktig rolle for samfunnet, men er usynlig for folk flest og oppleves dermed som irrelevant. Selv om Niss omtalte dette paradokset allerede i 1979, er det trolig enda mer relevant i dagens samfunn, hvor de siste års utvikling innen IT og kunstig intelligens ser ut til å i stadig større grad prege både hverdagen og arbeidslivet i årene som kommer.

I lang tid var matematikkundervisning forbeholdt noen få utvalgte, gjerne innenfor privilegerte miljøer (Niss, 1996). For andre deler av befolkningen var opplæring i matematikk kun relevant hvis den var direkte knyttet til arbeidet man drev med, for eksempel innenfor handel, målinger og navigasjon (Niss, 1996), hvor nytten av å lære matematikk var åpenbar. I dag har alle barn og unge ti år obligatorisk matematikkundervisning i grunnskolen. I tillegg har skolen et overordnet prinsipp om likeverdig opplæring, som innebærer at «alle skal ha like muligheter til opplæring uavhengig av evner og forutsetninger, alder, kjønn, hudfarge, sosial bakgrunn, seksuell orientering, religiøs eller etnisk tilhørighet, bosted, familiens utdanning eller hjemmets økonomi» (NOU 2009: 18, s. 15). Når matematikkfaget viser seg å være et såpass krevende og upopulært fag for mange elever, er det naturlig å stille spørsmål om hvorfor det norske samfunnet, og samfunn rundt omkring i verden, bruker såpass mye tid og ressurser på at alle elever skal gjennom ti år med matematikk, og om matematikk virkelig er relevant for alle.

Et viktig formål med matematikkfaget er at det skal gi barn og unge de nødvendige forutsetningene for at de skal være rustet for videre utdanning, arbeidsliv og hverdagsliv i et samfunn som stadig utvikler seg. Dette framheves både i PISA-undersøkelsen (OECD, 2023a) og i beskrivelsen av matematikkfagets relevans og sentrale verdier i LK20: «Matematikk skal forberede elevene på et samfunn og arbeidsliv i utvikling» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2). Dette handler om at matematikk fortsatt er en viktig del av

mange yrker, trolig enda flere enn tidligere, som for eksempel innenfor ingeniørfag, medisin og sykepleie, IT, økonomi, biologi, fysikk, sosiologi og læreryrket. I tillegg møter vi matematikk i hverdagslivet, for eksempel når det kommer til økonomiske spørsmål, når vi skal forholde oss til tall og mål, enten det er matlaging eller oppussing, når vi leser værmeldinger og når vi leser og bruker kart og GPS. Matematikk handler om logisk tenkning og systematisk utforskning på jakt etter mønstre, sammenhenger, likheter og forskjeller, samt utvikle egne og følge andres framgangsmåter eller «oppskrifter». Matematisk kompetanse er også viktig for å kunne tenke kritisk i møte med den massive informasjonsflyten og påstander i sosiale medier og andre kanaler.

At vi lykkes med en matematikkutdanning hvor barn og unge utvikler matematisk kompetanse, opplever mestring og setter pris på matematikk, er viktig ikke bare for enkeltindividet, men også for utviklingen av samfunnet. Det er nødvendig å utdanne personer med høy matematisk kompetanse for å løse både nåtidens og framtidens utfordringer knyttet til blant annet klima, miljø og bærekraft. Resultatene fra PISA-undersøkelsen bidrar med kunnskap om hvorvidt matematikkutdanningen i Norge lykkes med dette. Ved å måle elevenes matematiske kompetanse på slutten av den obligatoriske skolegangen, gir undersøkelsen informasjon om norske elevers kunnskaper og ferdigheter i matematikk etter ti år og over tusen timer med matematikkundervisning. Som det helt riktig påpekes mange steder, blant annet i kommentarkapittelet i denne boka, måler ikke PISA-undersøkelsen alle deler av matematikkfaget. Men resultatene fra PISA gir verdifull informasjon om noen viktige sider ved elevenes matematiske kompetanse som kan sammenliknes over tid og med andre deltakerland.

I denne antologien går vi i dybden på matematikkresultatene fra PISA 2022, for å få mer kunnskap om norske elevers kompetanse i matematikk og hvordan denne har endret seg over tid. Vi undersøker noen sentrale temaer knyttet til matematikkfaget i Norge, hvor et viktig spørsmål er hvorvidt alle barn og unge gis like muligheter til å utvikle matematisk kompetanse, og i hvilken grad alle elever tilegner seg en grunnleggende kompetanse for å være godt rustet til videre utdanning og arbeidsliv. Noen av kapitlene ser nærmere på innholdet i matematikkfaget og har en mer didaktisk tilnærming, hvor formålet er å være nært på matematikkundervisningen og klasserommet. Resultatene i kapitlene diskuteres opp mot annen matematikkdidaktisk forskning og mot LK20 og matematikkfaget i en norsk kontekst. Boka er skrevet for alle som er interessert i

matematikkfaget i skolen – lærere, lærerstudenter, skoleledere, skoleeiere og politikere.

PISA 2022 ble gjennomført rett i etterkant av at samfunnet ble gjenåpnet etter covid-19-pandemien. Elevene som deltok i PISA 2022, gikk på slutten av 8. trinn da skolene og samfunnet stengte ned 12. mars 2020. Dette ble dermed kullet som fikk oppleve at alle de tre årene på ungdomsskolen ble preget av unntakstilstand. Dette er viktig i forbindelse med tolkningen av resultatene. Det er lite kunnskap om elevenes læring og faglige prestasjoner i ettertid av covid-19-pandemien, dermed er resultatene fra PISA 2022 spesielt relevante for å gi mer kunnskap om dette.

Betraktninger rundt betydningen av covid-19-pandemien

Smitteverntiltak under covid-19-pandemien hadde stor innvirkning på elevenes skolehverdag og fritid, men riktignok i varierende grad. I Oslo hadde elevene på ungdomsskolen minst syv måneder med rødt nivå eller hjemmeopplæring i løpet av denne perioden (Oslo kommune, 2022). Men det var store geografiske forskjeller på smittetrykk og tiltak. For eksempel var 60 prosent av grunnskolene i Oslo helt eller delvis stengt minst én gang i løpet av vinteren 2021, mens tilsvarende tall for Møre og Romsdal var 11 prosent (Utdanningsdirektoratet, 2021). Selv om det ble gjennomført noen intervjuer og spørreundersøkelser knyttet til elevers, læreres, skolelederes og foresattes opplevelse av læringssituasjonen under pandemien (for eksempel Rambøll, 2022), var det lite kunnskap om hvilke konsekvenser covid-19-pandemien hadde på elevenes læringsutbytte. Selv om ikke PISA-resultatene kan si noe sikkert om hva som er årsaken til endringer i resultater, var det grunn til å tro at de nedslående resultatene for norske elever delvis skyldtes to år med restriksjoner og smitteverntiltak i skolen. Denne antakelsen støttes av den store tilbakegangen i prestasjoner på tvers av deltakerlandene i PISA, en tilbakegang som ble beskrevet som «unik» og «dramatisk» i den internasjonale rapporten, og pandemien ble framhevet som en åpenbar faktor (OECD, 2023b). Tilbakegangen i resultater var større for norske elever enn for elever i de fleste andre land. Dette kan peke mot at også andre årsaker har hatt betydning, men vi kan ikke si noe sikkert om hvordan andre faktorer eventuelt har påvirket elevenes læring negativt i denne perioden.

Om PISA 2022

Norge har deltatt i PISA-undersøkelsen siden 2000. Undersøkelsen har vært gjennomført hvert tredje år, men ble utsatt fra 2021 til 2022 på grunn av covid-19-pandemien. Alle de tre fagområdene – lesing, matematikk og naturfag – er med hver gang, men bytter på å være såkalt hovedområde. Når et fagområde er hovedområde, er det med flere oppgaver i prøven og flere spørsmål i spørreskjemaet som omhandler dette fagområdet. I 2022 var matematikk hovedområde, slik det også var i 2003 og 2012.

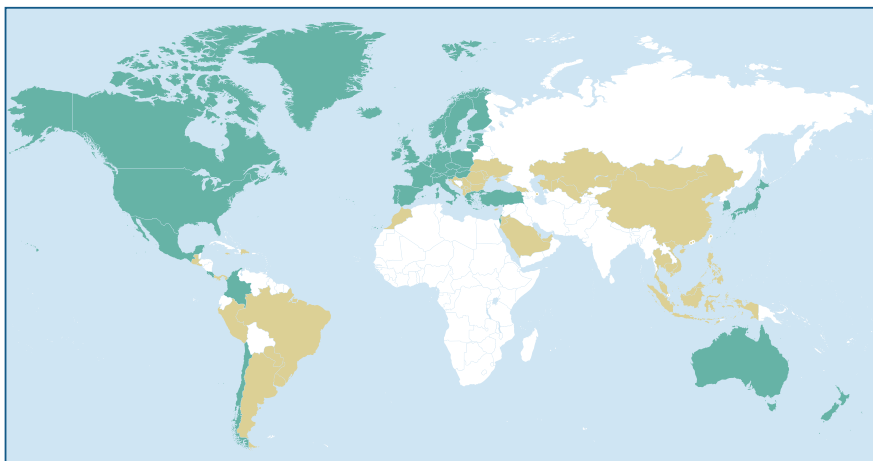
En av styrkene til PISA-undersøkelsen er at den gir anledning til å sammenlikne resultater over tid. Dette er mulig fordi oppgaver ikke frigis, og dermed kan de brukes igjen i flere undersøkelser. Prestasjonsskalaen ble satt til 500 poeng som gjennomsnitt og 100 poeng som standardavvik den første gangen hvert av de tre fagområdene var hovedområde. I matematikk er det mulig å se på endringer i resultatene over en periode på 20 år, fra 2003 til 2022.

Innholdet i prøven balanserer hensynet mellom å kunne sammenlikne resultater over tid, ved å beholde gamle oppgaver, og å være oppdatert og relevant ved at det kommer til nye oppgaver. Rammeverkene er grunnlagsdokumenter som definerer fagområdene, og dermed også hva oppgavene skal handle om (OECD, 2018). Rammeverkene blir fornyet hver gang et fagområde er hovedområde. I den forbindelse legges det til nye oppgaver i prøven i tråd med det oppdaterte rammeverket. Som et eksempel beholdt rammeverket for PISA 2022 (OECD, 2018) de eksisterende stegene i problemløsingsssyklusen for matematikk, men la samtidig mer vekt på matematisk resonnering. Rammeverket blir grundig behandlet i kapittel 3 i denne boka.

Prøven inneholder mange oppgaver og gir dermed et bredt mål på norske elevers kompetanse i de tre fagområdene. I PISA 2022 var det til sammen 234 oppgaver i matematikk, og av disse var det 160 nye. Hver elev svarer bare på et utvalg av disse oppgavene. Undersøkelsen gir derfor ikke et presist mål på enkeltelevers kompetanse, men gir et representativt mål på norske elevers kompetanse i fagområdene.

PISA gjennomføres i regi av OECD (The Organisation for Economic Co-operation and Development) og er en internasjonal undersøkelse. I PISA 2022 deltok 81 land, og 37 av disse var OECD-land. Antallet deltakerland har økt ved hver gjennomføring. I den første PISA-undersøkelsen i 2000 var det 32 deltakerland, mens det i PISA 2018 var 79 land som deltok. En oversikt over deltakerlandene i PISA 2022 er gitt i figur 1. I Norge deltok ca. 8 300 elever fra litt mer enn 260 skoler.

Figur 1. Oversikt over land og regioner som deltar i PISA 2022. Land som har gjennomført prøven i PISA 2022 på papir er merket med asterisk (*). Denne oversikten er hentet fra Jensen et al. (2023)



OECD-land		Land eller regioner som ikke er medlem av OECD		
Australia	Nederland	Albania	Kosovo	Singapore
Belgia	New Zealand	Argentina	Kroatia	Taipei (Taiwan)
Canada	Norge	Baku (Aserbajdsjan)	Kypros	Thailand
Chile	Polen	Brasil	Macao (Kina)	Ukraina (18 av 27 regioner)
Colombia	Portugal	Brunei	Malaysia	Uruguay
Costa Rica	Slovakia	Bulgaria	Malta	Usbekistan
Danmark	Slovenia	De forente arabiske emirater	Marokko	Vietnam*
Estland	Spania	Den dominikanske republikk	Moldova	
Finland	Storbritannia	El Salvador	Mongolia	
Frankrike	Sveits	Filippinene	Montenegro	
Hellas	Sverige	Georgia	Nord-Makedonia	
Irland	Sør-Korea	Guatemala*	Palestina	
Island	Tsjekkia	Hongkong (Kina)	Panama	
Israel	Tyrkia	Indonesia	Paraguay*	
Italia	Tyskland	Jamaica	Peru	
Japan	Ungarn	Jordan	Qatar	
Latvia	USA	Kambodsja*	Romania	
Litauen	Østerrike	Kasakhstan	Saudi-Arabia	
Mexico		Kina	Serbia	

Verken faglig kompetanse eller holdninger kan plasseres på skalaer som umiddelbart gir mening i seg selv. Vi får først et godt bilde av hva som er et høyt kompetansenivå for en 15-åring når vi ser det i forhold til hva andre 15-åringer kan. Ved å tolke resultater for norske elever opp mot resultater for elever i andre land, får vi mer kunnskap om vårt eget skolesystem. Det gir oss en bedre forståelse av hva som er mye og lite kompetanse i matematikk enn vi ville ha hatt dersom vi bare hadde informasjon fra nasjonale undersøkelser. Det er imidlertid veldig ulike land med ulike skolesystemer som deltar i PISA-undersøkelsen, og ikke alle det er like verdifullt å sammenlikne seg med. Tolkning av resultater bør være basert på kunnskap om de ulike skolesystemene, noe som er bakgrunnen for at vi i denne boka legger vekt på å tolke resultater for norske elever i lys av resultater for de andre nordiske landene, og med gjennomsnittet for OECD.

Debatten etter lanseringen av PISA 2022

Mediedebatten som fulgte etter lanseringen av PISA-resultatene i PISA 2022, dekket et stort antall temaer. Det virker som at de aller fleste aksepterte pandemien som en viktig forklaring på den store tilbakegangen i resultater. Men siden vi ikke kan si sikkert hvor mye av tilbakegangen som skyldes pandemi og hvor mye som eventuelt skyldes andre faktorer, ble døren åpnet for en bred diskusjon av alle mulige andre forklaringer.

Debatten gjenspeiler naturlig nok at skole er komplekst. Det er utrolig mange faktorer som kan påvirke et gjennomsnittlig resultat for norske elever i PISA-undersøkelsen. Bak et gjennomsnitt ligger elevenes læring og erfaringer fra ti års skolegang, påvirket av blant annet lærere, medelever, foreldre, samfunn og skolepolitikk. Det betyr også at det er grunn til å være skeptisk til forklaringer som peker på enkeltvariabler, for eksempel at tilbakegangen i resultater kan forklares bare av digitalisering av skolen, lav testmotivasjon blant elever eller innføring av nye læreplaner.

Digitaliseringen av skolen er et av de store temaene i debatten som fulgte etter lanseringen. Denne debatten preges av at mange er kritiske til hvor mye tid elevene bruker på skjerm, og flere tar til orde for mer papirbasert undervisning. I kortrapporten viste vi til at mellom en firedel og en tredel av elevene rapporterer at elevene i sin matematikklasser blir distraheret enten av å bruke digitale ressurser selv eller av at andre elever i klassen bruker digitale ressurser (Jensen et al., 2023). Dette kan ha bidratt til at digitalisering ble et så stort tema i debatten som fulgte. Samtidig er allerede digitalisering et viktig tema i skoledebatten, uavhengig av

PISA-resultatene. For eksempel skal et eget utvalg «se på konsekvenser av barn og unges skjermbruk og foreslå tiltak» (Skjermbrukutvalget, 2024). Selv om digitalisering ble et stort tema i debatten, vil det ikke være noe stort tema i denne boka. Hovedgrunnen er at det ikke ligger så mye mer data i undersøkelsen som kan beskrive dette enn de spørsmålene vi allerede har med i kortrapporten.

Flere medieartikler tok opp bekymringen for at flere elever rapporterte om mer matematikkangst i 2022 enn tidligere, og om fallende skolemotivasjon generelt. I denne boka følges temaet opp ved at det i flere kapitler blir vist til resultater som handler om elevenes motivasjon for matematikk.

Boka følger også opp to andre hovedresultater som fikk bred medie-dekning. Et av disse resultatene var at andelen lavtpresterende elever i matematikk økte betydelig fra 2018 til 2022. Vi har derfor med et eget kapittel som handler spesielt om denne elevgruppen. Vi så også at avstanden i prestasjoner mellom elever med lav og høy sosioøkonomisk status har økt. Betydningen av sosioøkonomisk status for kompetanse og holdninger til matematikkfaget er noe som også følges opp i flere kapitler.

Kapitlene i denne boka

Hovedtemaet for denne boka er matematikk i skolen. Målet er å bidra til en oppdatert beskrivelse av norske elevers matematiske kompetanse, elevenes syn på matematikk, hvordan de trives med faget, og hvordan dette har utviklet seg over tid.

Kapitlene i boka kan knyttes til to hovedtemaer. Det ene handler om innholdet i matematikkfaget i skolen og behandles spesielt i kapittel 3, 4 og 5. Det andre temaet dreier seg om i hvilken grad elever har like muligheter til å lykkes i matematikk. Dette er sentralt i kapittel 6, 7, 8 og 9. Kapittel 2 tar for seg begge disse temaene. Her følger en mer detaljert beskrivelse av hvert kapittel.

Kapittel 2 presenterer utviklingen i hovedresultatene i matematikk de siste 20 årene, fra PISA 2003 til PISA 2022. I dette kapittelet gir Andreas Pettersen, Hege Kaarstein og Guri A. Nortvedt en gjennomgang av endringer som har skjedd i matematikkfaget og skolen i denne perioden. De relativt stabile resultatene fra 2003 til 2018 og den betydelige tilbakegangen fra 2018 til 2022 blir diskutert og sett opp mot resultater fra andre undersøkelser. I tillegg blir det pekt på utfordringer matematikkfaget står overfor i årene som kommer.

I **kapittel 3** gir Andreas Pettersen en gjennomgang av hva matematisk kompetanse er i PISA-undersøkelsen. Synet på matematisk kompetanse i PISA blir sammenliknet med beskrivelsen av matematikk i den norske læreplanen (LK20), og med et rammeverk for matematisk kompetanse fra forskningslitteraturen, for å undersøke hvor relevante PISA-resultatene er for norsk skole. Her blir det pekt på likheter og forskjeller mellom det som måles i PISA og matematikkfaget i norsk skole.

Kapittel 4 handler om matematisk modellering, et tema som er svært sentralt både i PISA-undersøkelsen og i matematikkfaget i LK20. I dette kapittelet gir Ingeborg Lid Berget, Maria Løvgren og Andreas Pettersen en gjennomgang av hva matematisk modellering er, forklart og illustrert med oppgaveeksempler. Fokuset for kapittelet ligger på den første delen av matematisk modellering, hvor et problem som gis i den «virkelige verden» skal omgjøres til et matematisk problem. Det lages et analyseverktøy for å undersøke hva slags utfordringer elevene møter i denne første delen av modelleringen, og verktøyet blir brukt på matematikkoppgaver fra PISA 2022. Både analyseverktøyet og diskusjonen av resultatene har et fagdidaktisk perspektiv og er ment å være nyttige for matematikklæreres klasseromspraksis.

Kapittel 5 handler om et annet tema som er svært relevant både i PISA og i matematikkfaget i norsk skole: resonnering og argumentasjon. Her har Marte K. Senneset og Andreas Pettersen tatt utgangspunkt i elevers skriftlige besvarelser på tre av oppgavene fra PISA 2022 hvor elevene skal argumentere for hvorfor, eller hvorfor ikke, en påstand er sann. Basert på en analyse av elevenes argumenter, blir det undersøkt ulike typer elevsvar med ulike karakteristikk blant norske 15-åringer.

I **kapittel 6** ser Trude Nilsen og Andreas Pettersen nærmere på hvordan norske elever opplever matematikkundervisningen. I kapittelet undersøkes tre dimensjoner av undervisningskvaliteten: klasseledelse, støttende lærer og faglige utfordringer. Resultatene for norske elever blir sammenliknet med elever i de andre nordiske landene. I tillegg blir det undersøkt hvorvidt elever på skoler med ulik elevsammensetning, i form av elevenes sosioøkonomiske status, rapporterer om ulik undervisningskvalitet, og i hvilken grad de tre dimensjonene henger sammen med elevenes prestasjoner.

Kapittel 7 handler om likeverd og om alle elever har like muligheter til å lære matematikk. Her undersøker Trude Nilsen og Fredrik Jensen i hvor stor grad elevenes hjemmebakgrunn kan forklare deres prestasjoner i matematikk, og hvordan dette har endret seg fra PISA 2018 til 2022. Analysene er gjennomført på skolenivå, og det legges vekt på å undersøke ulikheter mellom skoler, både i elevsammensetning og matematikkprestasjoner.

I **kapittel 8** gjør Fredrik Jensen og Trude Nilsen et dypdykk i resultatene for lavtpresterende elever i matematikk. De undersøker hva som kjennetegner denne elevgruppen når det gjelder bakgrunnsvariabler (kjønn, sosioøkonomisk status, innvandrerbakgrunn), holdninger, og oppfatning av læringsmiljøet ved skolen. Resultatene for de lavtpresterende elevene (under mestringsnivå 2) blir sammenliknet med resultatene for de øvrige elevene (på nivå 2 og over), og forskjeller og likheter blir diskutert.

I **kapittel 9** undersøker Jelena Radišić og Andreas Pettersen en annen elevgruppe: Elever som viser akademisk resiliens. Akademisk resiliens viser til evnen til å lykkes til tross for begrensede ressurser eller ufordelaktige omgivelser. Resiliens knyttes her til elever som presterer høyt i matematikk, til tross for lav «skår» på skalaen for sosioøkonomisk status. I PISA utgjør sosioøkonomisk status et samlemål på elevens hjemmebakgrunn, som er kjent for å ha betydning for elevenes mulighet til å lykkes i matematikk. Gjennom en latent profilanalyse blir det gjort en sammenlikning av ulike holdninger, syn på læring og opplevelse av læringsmiljø og undervisning hos elever som viser akademisk resiliens og andre elevgrupper, på jakt etter hva som kjennetegner disse elevene og deres læringsmiljø.

I **kapittel 10** oppsummerer redaktørene resultater og funn fra kapitlene. Det blir gjort en vurdering av hvilke utfordringer matematikkfaget står overfor i årene som kommer, og av hva som må gjøres for å løfte elevers matematiske kompetanse og fremme positive holdninger til matematikk.

I **kapittel 11** gir Reidar Mosvold et eksternt blikk på denne boka og sammenlikner innholdet i kapitlene med den øvrige forskningen innenfor matematikkdiridaktikk. Gjennom en kvantitativ tekstanalyse undersøker Mosvold hvilke relevante temaer som inngår og ikke inngår i denne antologien for å belyse noen av begrensningene ved PISA-undersøkelsen.

Forfatterbiografier

Andreas Pettersen er forsker ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo. Han har en doktorgrad i matematikdidaktikk og har jobbet med PISA-undersøkelsen siden 2017. Pettersen har utgitt flere artikler om matematikdidaktikk og vært redaktør for boka *Equity, Equality and Diversity in the Nordic Model of Education* (utgitt på Springer i 2020).

Fredrik Jensen har en forskerstilling ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo. Han har jobbet med PISA-undersøkelsen siden 2013, og vært prosjektleder fra PISA 2018. Hans forskningsinteresser inkluderer elevers kompetanse i og holdninger til naturfag og matematikk. Jensen var medredaktør for boka *Like muligheter til god leseforståelse? 20 år med lesing i PISA* (utgitt på Universitetsforlaget i 2020).

Referanser

- Djupedal, E. (2022). På skuldrene til de minste: Grunnskolens timefordeling som verktøy for å skape framtida. *Nytt norsk tidsskrift*, 39(1), 29–40. <https://doi.org/10.18261/nnt.39.1.4>
- Dokka, H.-J. (1988). *En skole gjennom 250 år. Den norske allmueskole – folkeskole – grunnskole 1739–1989*. NKS-Forlaget.
- Fornybar Norge. (2022, 19. april). *Fornybarnæringen trenger at flere velger realfag*. <https://www.fornybarnorge.no/nyheter/2022/fornybarnaringen-trenger-at-flere-velger-realfag/>
- Jensen, F., Pettersen, A., Frønes, T. S., Eriksen, A., Løvgren, M. & Narvhus, E. K. (2023). *PISA 2022. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing*. Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/noasp.205>
- Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01–05)*. Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/mat01-05>
- Niss, M. (1994). Mathematics in society. I R. Biehler, R. Scholz, R. Straesser & B. Winkelmann (Red.), *The didactics of mathematics as a scientific discipline* (s. 367–378). Kluwer Academic Publishers.
- Niss, M. (1996). Goals of Mathematics Teaching. I A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick C. & Laborde (Red.), *International Handbook of Mathematics Education* (s. 11–47). Kluwer Academic Publishers.
- NOU 2009: 18. (2019). *Rett til læring*. Kunnskapsdepartementet. <https://www.regjeringen.no/nou/dokumenter/nou-2009-18/id570566/>
- OECD. (2018). *PISA 2022 mathematics framework (Draft)*. OECD Publishing.
- OECD. (2023a). *PISA 2022 assessment and analytical framework*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/dfef0bf9c-en>
- OECD. (2023b). *PISA 2022 results: Volume I. The state of learning and equity in education*. OECD Publishing.
- Oslo kommune. (2022). *Osloskolen i pandemi*. <https://www.oslo.kommune.no/statistikk/osloskolen-i-pandemi/#gref>
- Rambøll. (2022). *Innsiktsinnsamling til situasjonsrapporten «Osloskolen i pandemi»*. Utdanningsetaten i Oslo.
- Skjermbrukutvalget. (2024). *Mandat*. Hentet 2. mai 2024 fra <https://skjermbrukutvalget.no/mandat/>
- Utdanningsdirektoratet. (2021). *Utdanningsspeilet 2021*. <https://www.udir.no/tall-og-forskning/publikasjoner/utdanningspeilet/utdanningspeilet-2021/>

KAPITTEL 2

Matematikk i PISA 2003–2022: Måling av endringer i et samfunn som endrer seg

Andreas Pettersen Universitetet i Oslo

Hege Kaarstein Universitetet i Oslo

Guri A. Nortvedt Universitetet i Oslo

Sammendrag: Formålet med dette kapittelet er å diskutere resultatene fra PISA-undersøkelsene fra 2003 til 2022 i lys av endringer i matematikkfaget og norsk skole i samme periode. Fra 2003 til 2018 var det relativt stabile matematikkresultater, til tross for at den norske skolen i denne perioden var gjennom flere læreplanskifter. Fra 2018 til 2022 var det en stor tilbakegang i de norske PISA-resultatene. Selv om de fleste deltagerlandene opplevde en betydelig tilbakegang i matematikkresultatene i løpet av denne fireårsperioden, var Norge blant landene hvor tilbakegangen var størst. PISA-undersøkelsen gir ikke informasjon om årsaken til endringene i prestasjoner, men den betydelige tilbakegangen på tvers av land kan tyde på at covid-19-pandemien har hatt en stor innvirkning på elevenes læring. Denne antagelsen støttes av at det er nedgang i resultatene til elever på alle ferdighetsnivåer i PISA-undersøkelsen. En mulig forklaring er at elevene under covid-19-pandemien i perioder ikke fikk like god undervisning som de vanligvis får. Spesielt er elever som strever med faglig innhold eller motivasjon for å lære ofte mer sårbare for varierende undervisningskvalitet. Resultatene fra PISA 2022 viser også at det er økning i andelen lavtpresterende elever, til tross for en lang satsing på «tidlig innsats», hvor målet er at alle barn og unge skal oppleve mestring i skolen. Samtidig kan størrelsen på tilbakegangen i resultatene til de norske elevene indikere at det også er andre faktorer, i tillegg til pandemien, som har hatt en innvirkning på elevenes lærings situasjon.

Nøkkelord: trendmåling i PISA, matematikkundervisning i endring, læreplanendringer, tilbakegang i resultater

Sitering: Pettersen, A., Kaarstein, H. & Nortvedt, G. A. (2024). Matematikk i PISA 2003–2022: Måling av endringer i et samfunn som endrer seg. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (Kap. 2, s. 21–48). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch2>

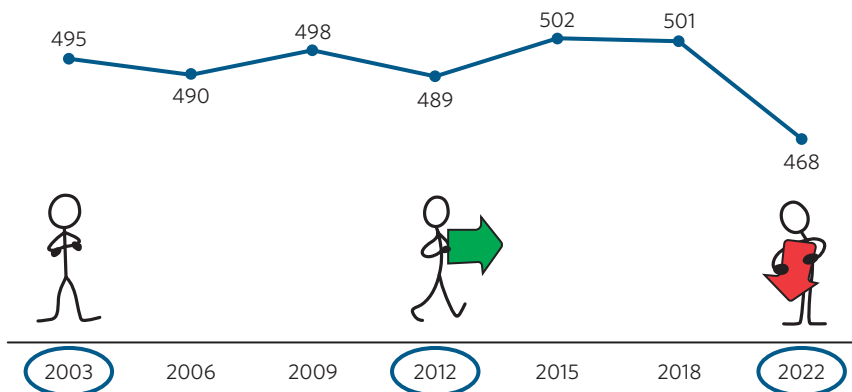
Lisens: CC-BY 4.0

Abstract: The purpose of this chapter is to discuss the results of the PISA surveys from 2003 to 2022 in light of changes in mathematics education and the Norwegian school system during the same period. From 2003 to 2018, the PISA mathematics results for Norwegian students were relatively stable, even though the Norwegian educational system had undergone several curricular reforms. However, from 2018 to 2022, there was a significant decline in the Norwegian PISA results. Although most participating countries experienced a substantial decline in mathematics literacy over this four-year period, Norway was among the countries where the decline was the greatest. The PISA survey does not provide information about what caused the changes in performance, but the significant decline across countries indicates that the COVID-19 pandemic had a major impact on students' learning during this period. This assumption is supported by the decline in results for students at all achievement levels in PISA 2022. One likely explanation is that during the COVID-19 pandemic, students did not receive the same quality instruction as they usually would. Particularly, students who struggle with academic content or motivation to learn are often more vulnerable to varying instructional quality. The results from PISA 2022 also show an increase in the proportion of low-performing students, despite an emphasis on "early effort", where the goal is for all students to experience mastery. At the same time, the large decline in Norwegian students' results, compared to other countries, may indicate that there are also factors other than the pandemic that have impacted the Norwegian students' learning situation.

Keywords: trend measurement in PISA, changing mathematics education, curriculum changes, decline in results

Da resultatene fra PISA 2022-undersøkelsen ble presentert den 5. desember 2023, fikk de mye oppmerksomhet i mediene. Hos NRK kunne vi lese at «Norske 15-åringar har aldri scora dårlegare i matte» (Sørenes et al., 2023), og VG meldte om «Nytt norsk matte-sjokk: Aldri prestert dårligere» (Ertesvåg & Fausko, 2023). Bakgrunnen for oppslagene var nedgangen i norske 15-åringers prestasjoner. Elevenes resultater gikk ned, ikke bare i matematikk, hvor nedgangen var størst, men også i de to andre fagområdene som undersøkelsen måler: lesing og naturfag. I tillegg viste resultatene at langt flere elever enn tidligere presterte på lave mestringsnivåer i alle de tre fagområdene.

PISA-undersøkelsen gjennomføres hvert tredje år og gir informasjon om hvordan elevenes prestasjoner endrer seg over tid. Figur 1 viser gjennomsnittresultatet i matematikk for norske elever for hver av PISA-gjennomføringene fra 2003 til 2022. Den åttende gjennomføringen av PISA-undersøkelsen våren 2022 gir oss mulighet til å se nærmere på hvordan norske elevers kompetanse i matematikk har endret seg over en periode på tjue år, fra 2003 til 2022.



Figur 1. Gjennomsnittresultater i matematikk i PISA for norske elever fra 2003 til 2022. Sirklene markerer årene matematikk var hovedområde i undersøkelsen. Verdiene er hentet fra Jensen et al. (2023)

Siden de aller fleste 15-åringene som blir trukket ut til å delta i undersøkelsen går på 10. trinn, kan vi si at PISA måler den faglige kompetansen elevene har tilegnet seg gjennom den obligatoriske skolegangen og gir informasjon om hvor godt forberedt elevene er til videre utdanning og voksenliv. Hva skolen skal gi elevene av kompetanse, og hvordan elevene

kan forberedes for videre utdanning og arbeidsliv, har variert gjennom tidene. Med dette også hvilke og hva slags tiltak norske utdanningsmyndigheter har prioritert. Fellestrekket for iverksatte tiltak, har vært at man ønsker å utdanne medborgere for morgendagens samfunn samtidig som elevene skulle få best mulig grunnopplæring. Selv om PISA-undersøkelsen ikke kan brukes til å gi en forklaring på *hva* som er årsaken til endringer i prestasjoner, er det viktig å se PISA-resultatene i lys av tiltak og endringer i matematikkfaget i norsk skole fordi skolen stadig er i endring som et resultat av at samfunnet endrer seg. Formålet med dette kapittelet er derfor å gi en oversikt over hovedresultatene for norske elevers matematikkprestasjoner i PISA fra 2003 til 2022 og diskutere disse opp mot utvalgte endringer i matematikkfaget og skolen i den samme perioden.

Som et bakteppe for kapittelet starter vi derfor med et innblikk i 15-åringenes skolehverdag i 2003, 2012 og 2022 før vi går videre og presenterer og diskuterer hovedresultatene i matematikk for norske elever i denne perioden. Avslutningsvis sammenlikner vi resultatene til norske elever med resultater for elever i de andre nordiske landene, for å belyse forskjeller og likheter i endringene i matematikkprestasjoner i denne perioden.

15-åringene og skolematematikk i 2003, 2012 og 2022

I perioden fra 2003 til 2022 er det så mye som har forandret seg i matematikkfaget og i norsk skole for øvrig, at ikke alt kan inkluderes i en tekst som denne. For å gi leserne et lite innblikk i hvordan matematikkfaget har endret seg, har vi valgt å se på lengden på en skoletime, eksamen og bruk av digitale hjelpemidler. I tillegg inkluderer vi en kort beskrivelse av gjeldende læreplan og noen utvalgte nasjonale tiltak og satsinger som ble initiert mens elevene som deltok i PISA 2003, 2012 og 2022 gikk i grunnskolen.

2003

Våren 2003 ble PISA-undersøkelsen gjennomført med et representativt utvalg 15-åringer, med matematikk som hovedområde for første gang. Resultatene i matematikk viste at de norske elevene presterte omtrent likt med gjennomsnittet for elevene i OECD-landene, men godt under elevene i de andre nordiske landene (Kjærnsli et al., 2004). Disse resultatene ble omtalt i mediene, og VG meldte at norske elever «Dumper i matte

og naturfag» (Gultvedt et al., 2004). I tillegg presterte guttene bedre enn jentene i nesten alle de deltakende landene, også i Norge, men her var kjønnsforskjellene så små at de ikke ble viet noe oppmerksomhet i media (Kjærnsli et al., 2004).

Elevene som deltok i PISA-undersøkelsen i 2003 startet på skolen høsten 1994, da de var sju år, og gikk ut av tiende klasse ni år senere. Gjeldende læreplan var Mønsterplanen fra 1987 (M87), og én undervisningstime varte vanligvis i 45 minutter (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1987). Under hovedemnene i M87 ble det beskrevet hva elevene måtte, som for eksempel at elevene «må arbeide med», «må få trening i», «må kunne avgjøre» og «må lære å se sammenhenger». Problemløsning var ett av ti hovedemner, lommeregnerne ble introdusert i matematikkundervisningen, og elevene hadde fysiske lærebøker og oppgavesamlinger. Læreplanreformen i 1997 (omtalt som Reform 97, forkortet L97) ble starten på et 10-årig grunnskoleløp (Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet, 1996), og innebar at norske elever i fremtiden ville starte på skolen som seksåringer. Da gikk PISA 2003-elevene inn i sommerferien som tredjeklassinger og kom tilbake på høsten som elever på femte årstrinn og skulle følge L97 i resten av grunnskoleløpet. I L97 skulle elevene «bli kjent med», «lære å kjenne», «gjøre erfaringer», «eksperimentere med», «arbeide med», «beskrive», «trene på», «øve seg i», «prøve ut» og «få erfaringer med» de ulike hovedmomentene i faget (Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet, 1996). Prosjekt- og temaarbeid ble introdusert som sentrale arbeidsmåter, både innenfor fag og tverrfaglig.

Også innholdsmessig var det endringer i læreplanen for matematikk. For eksempel gikk emnet «personlig økonomi og samfunnsøkonomi» fra M87 ut, og «matematikk i dagliglivet» kom inn (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1987; Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet, 1996). I L97 ble det også formulert et helhetlig syn på hva utdanningen skulle brukes til, hvor det ble beskrevet at elevene gjennom utdanningen skulle bli meningsøkende, skapende, arbeidende, samarbeidende og miljøbevisste, med mål om å utdanne allmenndannende og integrerte mennesker til det norske samfunnet (Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet, 1996).

Elevene som fullførte grunnskolen etter M87, hadde etter endt løp totalt hatt 687 timer matematikk på barneskolen og 228 på ungdomskolen, mens tilsvarende tall for L97-elevene var til henholdsvis 727 og 313 timer som følge av utvidelsen fra 9-årig til 10-årig grunnskole (NOU 2014: 7).

De 15-åringene som i 2003 ble trukket ut til eksamen i matematikk, fulgte eksamensordningen for L97. De fikk fem timer til rådighet og løste eksamensoppgaver presentert i tre ulike deler, organisert som tre hefter. Elevene kunne bruke en såkalt «elevbok», med egne notater om for eksempel regneregler og eksempelutregninger, og lommeregner på alle delene (elevboka beskrives i Opsal, 2013). I eksamenshefte nummer tre valgte elevene selv hvilke oppgaver de ville løse, og kunne på den måten velge hvilken kompetanse de ville vise sensor. Mot slutten av L97-perioden kunne elevene også løse noen av eksamensoppgavene i hefte 2 og 3 med datamaskin som hjelpemiddel «dersom din klasse er med på denne ordningen» (se for eksempel eksamen i matematikk for grunnskolen fra 2003 i heftet til Læringscenteret, 2003). Elevene kunne for eksempel bruke dynamiske geometriprogram og regneark.

I 2000, da lesing var i fokus i PISA-undersøkelsen, skapte resultatene fra undersøkelsen sjokk-overskrifter i media (Bergesen, 2006). Det var overraskende store kjønnsforskjeller i jentenes favør i lesing, og de norske elevene presterte ikke så godt som forventet. De norske elevene presterte *på* OECD-gjennomsnittet i både lesing, naturfag og matematikk, og svakere enn elevene i flere av de andre nordiske landene (Lie et al., 2001). I kjølvannet av dette, og med en allerede etablert bekymring for rekruttering til realfaglige studier og yrker, ble det iverksatt tiltak for å bedre situasjonen. I 1998 ble det startet opp et nasjonalt senter med realfagsrekruttering som arbeidsoppgave (Kunnskapsdepartementet, 2010), og noen år senere så de nasjonale sentrene for matematikk og naturfag i opplæringen dagens lys (i henholdsvis 2002 og 2003; Utdannings- og forskningsdepartementet, 2002a, 2002b).

2012

Elevene som deltok i PISA 2012 var det sjette kullet som startet på skolen etter at L97 ble innført. Da PISA-resultatene kom, viste det seg at de norske 15-åringene presterte lavere enn i 2009, men at resultatene i hele perioden sett under ett, fra 2003 til 2012, var relativt stabile og rett i underkant av OECD-gjennomsnittet. VG meldte at «Norske elever blir dårligere i matte og naturfag» (Ertesvåg & Laustsen, 2013), mens hos NRK kunne vi lese «Pisa 2013: Norske elever har aldri vært dårligere i matematikk» (Viseth & Larsen, 2013). Kjønnsforskjellene i matematikkprestasjoner gikk fra små i 2003 til ingen i 2012 (Nortvedt, 2013).

PISA 2012-elevene startet på skolen i 2003 og de gikk på 5. trinn da Kunnskapsløftet (LK06) ble innført i 2006 (Kunnskapsdepartementet, 2006b). LK06-elever fikk totalt 888 timer i matematikk på barnetrinnet og 313 på ungdomstrinnet (NOU 2014: 7), en økning på henholdsvis 201 timer for barnetrinnet og 85 for ungdomstrinnet. I LK06 ble *regning* inkludert som en av fem *grunnleggende ferdigheter* i alle læreplaner for fag (Utdanningsdirektoratet, 2012b). De fem ferdighetene var, og er fremdeles, styrende for opplæringen. Innføringen av regning som grunnleggende ferdighet innebar at elevene skulle utvikle evnen til å ta i bruk matematikk innenfor en rekke ulike fagområder, og at dermed flere lærere, i ulike fag, ble ansvarlige for at elevene lærte seg å bruke matematikk. Videre sto det i LK06 at skolen skulle gi elevene et grunnlag for livslang læring, opplæringen skulle veksle mellom å være praktisk og teoretisk, og matematikk ble beskrevet som et redskapsfag (Kunnskapsdepartementet, 2006b).

På samme måte som for M87, var LK06-eksamen i matematikk todelt: del 1 uten hjelpemidler og del 2 med, til sammen fem timer. For M87 var hjelpemiddelet lommeregner, mens formuleringen for LK06 var «alle hjelpemidler tillatt, med unntak av verktøy som tillater kommunikasjon» (Utdanningsdirektoratet, 2012a). Til oppgaver med regneark kunne elevene levere utskrift av ferdige ark med formler. Dersom elevene brukte et dynamisk geometriprogram til å løse noen av oppgavene, måtte programmets navn oppgis og fremgangsmåten beskrives. I tillegg til dette fikk elevene for første gang informasjon, i eksamensheftene, om vurderingskriterier (se for eksempel Utdanningsdirektoratet, 2012a) som en følge av fokuset på *vurdering for læring* (Engh & Gran, 2011; Meld. St. 28 (2015–2016); Utdanningsdirektoratet, 2010). I eksamensheftene fikk elevene vite at poengsummen var veiledende, og at karakteren ble satt på grunnlag av en samlet vurdering som i tillegg til poengsummen blant annet skulle inkludere forståelse, gjennomføring av logiske resonnementer, forklaring av fremgangsmåte og om eleven kunne bruke fagkunnskapen sin i nye situasjoner (se for eksempel Utdanningsdirektoratet, 2012a).

I løpet de ti årene PISA 2012-elevene gikk i grunnskolen, kom det tre realfagsstrategier med liknende overordnede mål. «*Realfag, naturligvis!*» hadde som overordnet mål å styrke kompetansen i realfag hos elever og lærere, bedre motivasjonen for å øke rekrutteringen til realfag, samt få frem nytteverdien for å skape mer positive holdninger til realfag blant allmennheten (2002–2007, Kunnskapsdepartementet, 2005). Strategien *Et felles løft for realfagene* hadde som overordnet mål å styrke kompetansen

i realfag i hele utdanningssystemet, fremme positive holdninger til realfaget og øke rekrutteringen (2006–2009, Kunnskapsdepartementet, 2006a). I *Realfag for framtida* var også de overordnede målene å øke interessen, styrke rekrutteringen og styrke kompetansen i realfag, men her ble det å øke rekrutteringen av jenter løftet frem som et eget mål (2010–2014, Kunnskapsdepartementet, 2010). I tillegg ble fem stortingsmeldinger fra Kunnskapsdepartementet relevante for faget, godkjent i statsråd: *Kultur for læring* (St.meld. 30 (2003–2004)), *Kvalitet i skolen* (St.meld. 31 (2007–2008)), *Læreren. Rollen og utdanningen* (St.meld. 11 (2008–2009)), ... og *ingen sto igjen. Tidlig innsats for livslang læring* (St.meld. 16 (2006–2007)) og, rettet mot ungdomsskolen, *Motivasjon – mestring – muligheter* (Meld. St. 22 (2010–2011)). Som en følge av sistnevnte laget Senter for IKT i utdanningen «Den virtuelle matematikkskolen» i 2011 (i dag: digilær.no). Den digitale skolens mål var å øke motivasjonen for og mestring i matematikkfaget for elever på ungdomsskolen (Kunnskapsdepartementet, 2017).

2022

Elevene som deltok i PISA 2022 startet på skolen som seksåringer, skoleåret 2012/2013. De norske elevene presterte på OECD-gjennomsnittet i matematikk, men resultatet var lavere enn noen gang tidligere (Jensen et al., 2023). I tillegg var andelen lavtpresterende elever svært høy, betydelig høyere enn ved tidligere gjennomføringer, og svært mange elever rapporterte om negative følelser i møte med matematikk (Jensen et al., 2023). Selv om det ikke var kjønnsforskjeller i matematikkprestasjonene, viste det seg at det var større spredning i guttenes prestasjoner og at det var en høyere andel gutter både blant de høytpresterende og lavtpresterende elevene (Jensen et al., 2023). Nedgangen i matematikkresultater var større i Norge enn de fleste andre land, og fikk stor oppmerksomhet i media. Blant annet uttrykte kunnskapsminister Kari Nessa Nordtun på pressekonferansen for PISA 2022 den 5. desember 2023 sin bekymring for at PISA-resultatene var et av flere resultater de siste årene som tyder på at pilene peker i feil retning (Jelstad, 2023). Videre var kunnskapsministeren bestemt på at ikke all tilbakegangen kunne forklares med covid-19-pandemien, og pekte på forstyrrelser fra digitale enheter som en mulig forklaring.

Elevene som deltok i PISA 2022, gikk de åtte første årene av grunnskolen med LK06 som gjeldende læreplan, og fulgte Kunnskapsløftet

fra 2020 (LK20) (Kunnskapsdepartementet, 2020) i de to siste årene på ungdomsskolen. Med den nye læreplanen ble det innført seks kjerneelementer i matematikk: *utforskning og problemløsning, modellering og anvendelser, resonnering og argumentasjon, representasjon og kommunikasjon og abstraksjon og generalisering*. Disse kjerneelementene beskriver det mest sentrale faglige innholdet elevene må tilegne seg for å mestre faget og består av begreper, metoder, tenkemåter, kunnskapsområder og uttrykksformer. Kjerneelementene overlapper i stor grad med rammeverket i PISA, som for eksempel vektlegger resonnering og problemløsning (Pettersen, 2024, kapittel 3 i denne boka). Videre ble programmering en del av matematikkfaget. I tillegg skal faget også gi kompetanse som er relevant for de to tverrfaglige temaene *folkehelse og livsmestring* og *demokrati og medborgerskap*. De fem grunnleggende ferdighetene ble videreført også i LK20.

Dagens elever får i løpet av skolegangen like mange timer (à 60 minutter) i matematikk på barnetrinnet og ungdomstrinnet som under forrige læreplan. Utbredelsen av digitale læremidler og enheter skjøt også fart under LK06 (se for eksempel Rohatgi & Thronsen, 2015; Vennerød-Diesen & Pedersen, 2023). Under LK20 er det mange skoler som bytter ut fysiske læreverk med digitale læreverk. I 2021 hadde 82 prosent av elevene på 1.–4. trinn enten egen bærbar datamaskin eller nettbrett. For elevene på 5.–7. trinn og 8.–10. trinn var tallene henholdsvis litt over 90 og 98 prosent, og de aller fleste skolene hadde god internett-tilgang (Utdanningsdirektoratet, 2022c). I tillegg hadde – og har – veldig mange av elevene tilgang til internett hjemme, og de har egne telefoner og kanskje også smartklokker.

En endring av en læreplan medfører vanligvis også endring i eksamen. I overgangen fra LK06 til LK20 ble poengangivelsene på oppgavene fjernet, og tiden elevene nå får til rådighet på del 1 uten hjelpemidler er halvert, til én time. Elevene har fortsatt fem timer til disposisjon totalt. Oppgaver med dataprogrammering er inkludert (se for eksempel eksamen i matematikk for grunnskolen fra 2022, Utdanningsdirektoratet, 2022a). En vesentlig del av eksamenstiden er satt av til de to siste oppgavene i del 2, der elevene skal vise sin matematiske kompetanse gjennom å argumentere, resonnere, modellere, generalisere og vurdere gyldigheten til svar og resultater de kommer frem til (Utdanningsdirektoratet, 2024a).

Da de gikk på andre trinn i småskolen, tok alle PISA 2022-elevne en nasjonal kartleggingsprøve i regning (Utdanningsdirektoratet, 2022b).

Den gangen fantes prøvene også for første og tredje trinn, men da var de frivillige. Kartleggingsprøvene ble tatt i bruk i 2009 og har hvert år som mål å hjelpe skoler og lærere med å identifisere elever som trenger individuell oppfølging og kanskje også tilrettelagt undervisning i regning (for mer informasjon, se Nortvedt, 2018). I 2022 ble kartleggingsprøvene digitalisert og obligatoriske på tredje trinn og frivillige på første (Utdanningsdirektoratet, 2024b). Mens disse elevene har gått på skolen har det kommet flere nasjonale meldinger og satsinger med fokus på tidlig innsats og vurdering for læring, se for eksempel *Lærelyst – tidlig innsats og kvalitet i skolen* (Meld. St. 21 (2016–2017)) og Utdanningsdirektoratets satsing *Vurdering for læring* (Utdanningsdirektoratet, 2019). Den foreløpig siste realfagsstrategien, *Tett på realfag*, kom i 2015 (Kunnskapsdepartementet, 2015). Med denne ble det etablert realfagskommuner og utviklet et realfagsbarometer som skulle vise status for arbeidet med realfag i skoler og barnehager i hele Norge.

Som en avslutning på grunnskolen for PISA 2022-elevene, kom covid-19-pandemien. For mange elever betydde det at store deler av ungdomsskoletiden ble påvirket av pandemien og tilhørende restriksjoner.

Om covid-19-pandemien og matematikkundervisning i norsk skole

Den 12. mars 2020 innførte den norske regjeringen «de sterkeste og mest inngripende tiltakene vi har hatt i Norge i fredstid» (Statsministerens kontor, 2020). Et av tiltakene for å hindre smittespredning var å stenge skolene. Elever og lærere ble sendt hjem, og lærerne måtte kaste seg rundt for å lage et digitalt undervisningstilbud som elevene kunne følge hjemmefra. Det var ikke bare norske myndigheter som stengte skoler. I de øvrige nordiske landene stengte de danske og finske skolene, mens de i all hovedsak forble åpne i Sverige og på Island (se for eksempel OECD, 2022; Reynolds et al., 2022). Ser vi utenfor Norden, stengte de fleste land rundt omkring i verden skolene i kortere eller lengre perioder i løpet av pandemien (OECD, 2022).

I Norge hadde vi hel eller delvis nedstengning i to runder. I den første runden stengte alle skolene ned fra 13. mars til 11. mai skoleåret 2019–2020. I den andre runden, mellom 4. januar og 15. mars 2021, var det om lag 25 prosent av skolene som var helt eller delvis stengt (Utdanningsdirektoratet, 2021a). Danmark stengte også ned i to perioder (omtrent samtidig som

Norge), mens Finland bare stengte skolene i den første perioden av pandemien (Reynolds et al., 2022). Alle de nordiske landene, også Sverige og Island, hadde korte perioder i løpet av pandemien hvor noen få skoler måtte stenge på grunn av høyt smittetrykk. Mellom disse to periodene stengte lokale myndigheter skoler med høyt smittetrykk i kortere perioder.

Det er ikke nødvendigvis noen enkel sammenheng mellom hvor lange perioder skoler har vært stengt og elevenes læring. OECD gjennomførte analyser med utgangspunkt i data fra utvalgte land som deltok i PISA 2022, og fant at det ikke var noen statistisk signifikant sammenheng mellom landenes endringer i matematikkresultater fra PISA 2018 til PISA 2022 og antall dager med skolenedstenging (OECD, 2023c). Norge var ikke inkludert i denne studien.

I Norge ble det utarbeidet smittevernveiledere som regulerte hvordan skolene tilbød undervisning til elevene. I perioder med mye smitte ble elevene delt i små kohorter med få, faste lærere. I perioder med nedstenging fikk elevene digital undervisning, og i perioder med lite smitte kunne skolene fungere omtrent som vanlig. Det er trolig at det var stor variasjon i hvordan matematikk ble undervist og hvem som underviste. Det finnes ikke nasjonal statistikk som viser i hvor stor grad elevene fikk matematikkundervisning med matematikklæreren sin under pandemien. Det er trolig at mange elever i perioder med undervisning i kohorter ble undervist av lærere med andre fag i fagkretsen sin. Elever og lærere møtte også utfordringer med digital undervisning, i den første perioden knyttet til tilgang til utstyr som satte dem i stand til å gjennomføre og delta i slik undervisning. Ifølge *Utdanningsspeilet 2021* opplevde også mange lærere å få en utvidet lærerrolle, hvor mer tid ble brukt på oppfølging av elevene i forhold til læring og smittevern, og større arbeidspress knyttet til for eksempel økt tilgjengelighet utenfor skoletiden (Utdanningsdirektoratet, 2021b).

I løpet av vinteren 2021 var 60 prosent av barneskolene helt eller delvis stengt i Oslo (Utdanningsdirektoratet, 2021a). På oppdrag fra Utdanningssetaten i Oslo ble det gjennomført en undersøkelse om pandemiens påvirkning på den faglige og sosiale utviklingen til elevene i grunnskolen og videregående opplæring i Oslo (se Rambøll, 2022). Undersøkelsen så på hvordan elever, lærere, skoleledere og foresatte opplevde å bli påvirket av pandemien og inkluderte blant annet spørsmål om elevenes læringsmiljø, motivasjon til å lære, forventninger til selvstendig læring, oppfølging av elever med digital undervisning, elevenes læringsutbytte og progresjon i de ulike fagene. Selv om ikke utvalgene var representative, kan resultatene

likevel gi en antydning om hvordan pandemien har påvirket elevene. Rambøll-undersøkelsen rapporterte at alle gruppene som var inkludert i undersøkelsen opplevde at elevenes læringsutbytte gikk ned under pandemien i alle fag, men spesielt i matematikk. Av elevene i grunnskolen mente 73 prosent av de spurte at de lærte mindre matematikk med digital hjemmeundervisning enn på skolen. Til sammenlikning lå de tilsvarende verdiene for de andre fagene fra 36 prosent i engelsk til 57 prosent i fremmedspråk. På videregående skole var tendensene enda tydeligere. Da matematikklærerne ble spurt om å evaluere kvaliteten på den digitale undervisningen, svarte rundt 80 prosent av lærerne, både i grunnskolen og den videregående skolen, at den har vært dårligere eller mye dårligere enn undervisningen på skolen. De foresatte som deltok i undersøkelsen delte elevenes og lærernes oppfatning om matematikkundervisningen og læringsutbyttet.

Det er nærliggende å stille spørsmål om hvilke forutsetninger lærerne hadde for å gjennomføre digital undervisning, om de var forberedt på dette fra egen lærerutdanning eller praksis. Ifølge intervjuer Pedersen og kolleger (2021) gjennomførte, syntes flere av lærerne det var utfordrende å gi elevene som var på hjemmeskole nok variasjon og tilpasse opplæringen. Lærerne fortalte også at mye tid gikk til andre oppgaver enn de fagdidaktiske (Pedersen et al., 2021).

Et vesentlig aspekt ved undervisningen som «forsvinner» ved hjemmeundervisning, er den sosiale konteksten eller fellesskapet i klasserommet hvor alle blir sett, kan delta i diskusjoner og jobbe med læringspartnere. I en hjemmesituasjon blir elevene mer overlatt til seg selv, de må ta ansvar for sin egen læring og de mister den umiddelbare tilgangen til støtte fra både lærer og læringspartner(e).

Om å måle endringer i prestasjoner over tid

«When measuring change, do not change the measure.» Denne påstanden ble lagt frem av Beaton og Zwick (1990) etter å ha undersøkt bakgrunnen for uventede avvik i trendresultatene i lesing for amerikanske skoleelever på 1980-tallet. PISA-undersøkelsen er en trend-undersøkelse, hvor resultatene brukes til å gi informasjon om hvordan elevenes prestasjoner endrer seg over tid. Dette krever at det som måles i undersøkelsene ikke endres for mye, men holder seg sammenliknbart fra en undersøkelse til den neste (Cohen et al., 2017). Dette innebærer at rammeverkene, med beskrivelsen

av kompetansen som måles, holder seg stabile. I tillegg er mange av oppgavene som inngår i prøven de samme fra gang til gang. I PISA 2022 var det 234 matematikkoppgaver, hvorav 74 av disse var såkalte trend-oppgaver som var brukt i tidligere undersøkelser. Det store antallet trend-oppgaver gjør at PISA-undersøkelsene gir et relativt godt mål på hvordan elevenes prestasjoner endrer seg over tid.

Som nevnt over: Når man skal måle endringer i et samfunn som endrer seg, er det nødvendig å tilpasse og fornye undersøkelsen slik at den holder seg relevant og måler verdifull kompetanse i tråd med samfunnsendringene. I PISA gjøres det derfor noen endringer i rammeverket når et fagområde blir hovedområde, hvert niende år. Samtidig blir det utviklet nye oppgaver i tråd med det nye rammeverket, som inngår i prøven. I rammeverket for PISA 2022 kan vi lese at endringene gjenspeiler en verden i rask endring drevet av nye teknologier og trender der samfunnsborgere er kreative og engasjerte, og må gjøre vurderinger for seg selv og samfunnet de lever i (OECD, 2023a, s. 3, vår oversettelse). For mer informasjon om matematikkrammeverket i PISA og hvordan dette har endret seg over tid, se Pettersen (2024, kapittel 3 i denne boka).

I tillegg til endringer i rammeverket, har det også vært en endring i prøvedesignet for PISA fra 2018 til 2022 ved at matematikkprøven ble gjort adaptiv. Det adaptive designet innebærer at oppgavene elevene får tildelt underveis i prøven, tilpasses elevens ferdighetsnivå. I grove trekk betyr dette at elever som svarer feil på oppgaver vil få enklere oppgaver senere i prøven, mens elever som svarer riktig vil få vanskeligere oppgaver. Det adaptive designet ble testet i en utprøving for PISA 2022, og resultatene viste at oppgavenes vanskegrad og elevenes prestasjoner ikke ble påvirket av det adaptive designet i denne utprøvingen (OECD, 2023d). Selv om de fleste elevene (75 prosent) fikk en adaptiv prøve i PISA 2022, var det 25 prosent av elevene som tilfeldig fikk tildelt en lineær prøve, det vil si en «vanlig» ikke-adaptiv prøve. Når vi sammenlikner gjennomsnittresultatene for norske elever som fikk en adaptiv prøve med de som fikk en lineær prøve, finner vi at disse er på henholdsvis 468 og 469 poeng, med standardfeil på 2,3 og 2,7. Resultatene for elever med adaptiv og lineær prøve var altså svært like og ikke statistisk signifikant forskjellige, noe som tyder på at prøvedesignet ikke har påvirket resultatene. En av hensiktene med det adaptive designet er å gi mer presise målinger av elevenes kompetanse, noe som gjenspeiles i standardfeilen, som er lavere for elevene som fikk et adaptivt prøvedesign enn for de som fikk et lineært prøvedesign.

Resultater i matematikk i PISA 2003–2022

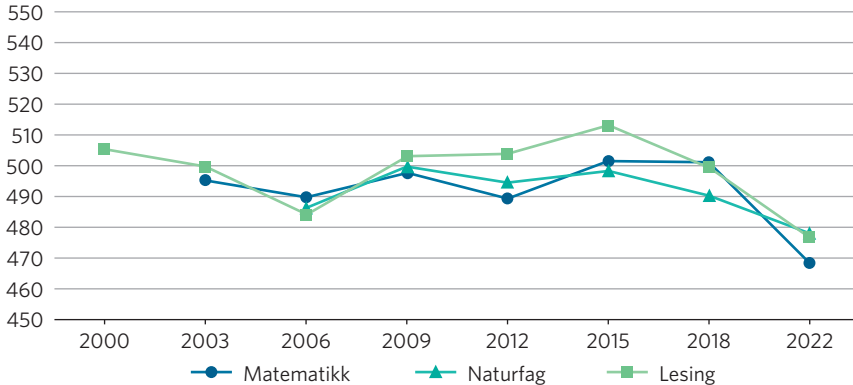
Endringer i læreplaner eller nasjonale strategier implementeres av nasjonale utdanningsmyndigheter fordi man har tiltro til at endringene vil styrke elevenes læring. Hvis iverksatte tiltak forsterker hverandre og gjennom dette bidrar til elevenes læring, kan man kanskje forvente å se høyere resultater på internasjonale undersøkelser over tid, såfremt implementerte endringer bidrar til økt læring i det undersøkelsens måler. Samtidig kan mange iverksatte tiltak også virke mot hverandre eller nøytralisere hverandre fordi de har ulik påvirkning på undervisning og læring. Hvis dette er tilfelle, eller hvis iverksatte tiltak bidrar til økt læring på andre områder enn de de internasjonale undersøkelsens måler, kan det ikke ventes å se en endring i elevenes prestasjoner på for eksempel PISA-undersøkelsen. Fordi eksamen i matematikk på 10. trinn ikke er en trendstudie, vil denne ikke kunne si noe om hvorvidt iverksatte tiltak har påvirket elevenes læring. I perioden fra 2003 til 2022 har det vært mange og til dels store endringer i norsk skole og matematikkundervisning. Hvilke endringer ser vi i PISA-resultatene i samme periode?

Hovedtrender – endringer over tid i norske resultater

Figur 2 viser de norske gjennomsnittresultatene i matematikk, lesing og naturfag i perioden 2000 til 2022. Figuren viser gjennomsnittresultatene fra og med det første gang fagområdet var hovedområde (2000 for lesing, 2003 for matematikk og 2006 for naturfag) frem til PISA 2022. I PISA tilsvarende 500 poeng gjennomsnittresultatet for OECD-landene første gang fagområdet var hovedområde, hvor standardavviket ble satt til 100 poeng.

Matematikkresultatene i denne perioden kan oppsummeres med to betraktninger: Fra PISA 2003 til PISA 2018 var det forholdsvis små variasjoner, hvor gjennomsnittresultatene varierte mellom 489 poeng (i 2012) og 502 poeng (i 2015). I den internasjonale PISA-rapporten skrev OECD at Norges trendlinje var flat totalt sett for perioden 2003 til 2018 (OECD, 2019, vedlegg B). Dette bildet av stabile resultater endres med PISA 2022: Fra PISA 2018 til 2022 er det en tilbakegang i de norske elevenes matematikkresultater på 33 poeng. Tidligere studier har antydning at omtrent 20 til 25 poeng i internasjonale undersøkelser som PISA og Trends in Mathematics and Science Study (TIMSS) tilsvarende omtrent ett års læring (Avvisati & Givord, 2023; Bergem, 2016a, 2016b). Tilbakegangen på 33 poeng kan derfor betraktes som svært stor. Ser vi på gjennomsnittresultatene for de to andre

fagområdene, ser vi noe av det samme mønsteret. I naturfag har det vært relativt stabile resultater i perioden 2006–2015, men med tilbakegang i resultatene fra 2015 til 2018 som fortsatte fra 2018 til 2022. I lesing var det noe større svingninger i resultatene, med tilbakegang fra 2000 til 2006, fremgang til 2015, og deretter en tilbakegang igjen fra 2015 til 2022. Det er altså en tilbakegang i alle de tre fagområdene fra 2018 til 2022 (figur 2).



Figur 2. Gjennomsnittresultater i matematikk, naturfag og lesing for norske 15-åringer fra første gang fagområdene var hovedområde i PISA-undersøkelsen til PISA 2022. (Figur hentet fra Jensen et al., 2023)

Selv om det var relativt små svingninger i matematikkresultatene i PISA fra 2003 til 2018, betyr ikke dette at elevenes lærings situasjon i matematikkfaget var den samme i denne perioden. Med tanke på de mange endringene i matematikkfaget i perioden 2003 til 2018 skissert tidligere i kapittelet, blant annet i læreplaner, eksamensformer, timetall og realfagsatsinger, er det interessant at vi ikke ser større «utslag» i matematikkresultatene i PISA fra gjennomføring til gjennomføring. Ekstra interessant blir det når de stabile resultatene i denne 16 år lange perioden blir sett i lys av den store tilbakegangen i de fire årene fra 2018 til 2022. Det er flere mulige forklaringer på disse resultatene, uten at PISA-undersøkelsen kan hjelpe oss til å avgjøre hvilke forklaringer som er mest trolige, eller om det også finnes flere andre mulige forklaringer. Det er for eksempel mulig at tiltakene som ble iverksatt i perioden fra 2003 til 2018 bidro til å motvirke negative endringer i skole som kunne ha svekket elevenes læring. En alternativ tolkning er at de ulike tiltakene som ble iverksatt motvirket hverandre, eller at iverksatte tiltak ikke påvirket elevenes utvikling av matematisk kompetanse slik den måles i PISA.

Nedgangen fra 2018 til 2022 er påtagelig. Vår fremstilling av tiltak rettet mot matematikkfaget i skolen peker mot at det har vært færre tiltak i denne perioden. Vi har for eksempel ikke fått noen ny realfagsstrategi. Den siste læreplanen ble innført i 2020, samtidig med at skolen skulle håndtere ringvirkningene av covid-19-pandemien. Riktignok fikk vi en ny læreplan, og overgangen til denne kan ha bidratt til å styrke de negative effektene fra pandemien på elevenes læring. Det er også mulig at den nye læreplanen rett og slett har vært virksom i for kort tid, og at skolene er i ferd med å finne ut av hvordan de skal arbeide med nye innholdselementer i læreplanen som for eksempel kjerneelementene. En tredje mulig forklaring er at det er andre endringer i samfunnet som bidrar til nedgang i elevenes resultater, for eksempel ved at elevene arbeider mindre eller mindre effektivt med matematikkfaget.

Betydelig flere elever under nivå 2 og færre på de høyeste nivåene

I PISA blir elevenes resultater knyttet til seks mestringsnivåer. Elever på de to øverste mestringsnivåene, 5 og 6, blir vurdert som høytpresterende elever. Elever som presterer under nivå 2 blir vurdert som lavtpresterende elever. I tabell 1 vises utviklingen av andelen elever under nivå 2 og elever på nivå 5 og 6 i Norge fra PISA 2003 til 2022. For begge gruppene varierer andelen noe fra gjennomføring til gjennomføring, hvor det er størst variasjon for andelen elever under nivå 2. Den største endringen var mellom PISA 2018 og 2022 for begge gruppene, hvor andelen høytpresterende elever synker med omtrent fem prosentpoeng og andelen lavtpresterende øker med omtrent 13 prosentpoeng.

Tabell 1. Prosentandel lavtpresterende (under mestringsnivå 2) og høytpresterende (mestringsnivå 5 og 6) i matematikk i PISA i perioden 2003 til 2022

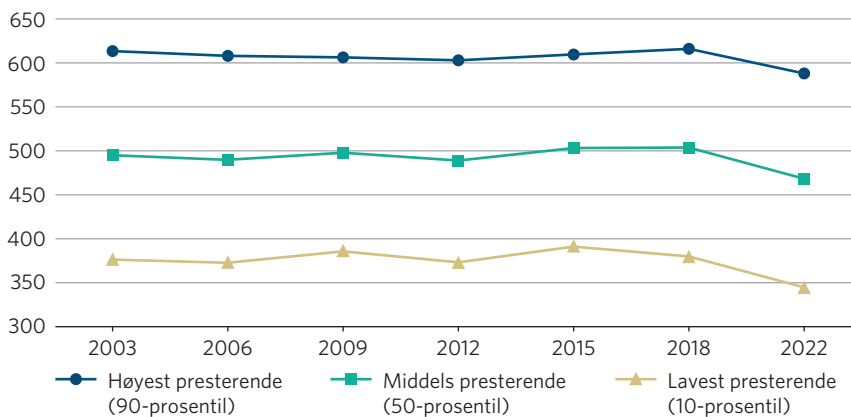
	2003	2006	2009	2012	2015	2018	2022
Nivå 5 og 6	11,4 %	10,4 %	10,2 %	9,4 %	10,6 %	12,2 %	6,9 %
Under nivå 2	20,8 %	22,2 %	18,2 %	22,3 %	17,1 %	18,8 %	31,5 %

Følgestudier som er gjennomført i andre land, har funnet at elever som presterer under nivå 2 i PISA har mindre sannsynlighet for å fullføre en universitetsutdannelse og større sannsynlighet for å stå utenfor arbeidslivet som 25-åring enn elever på nivå 5 og 6 (Piacentini & Pacileo, 2019).

I realfagstrategiene og stortingsmeldingene vektlegges viktigheten av at alle elever som går ut av grunnskolen har opparbeidet seg tilstrekkelige grunnleggende ferdigheter slik at de er godt rustet for videre studier og arbeidsliv. I tillegg er det et mål at alle elever skal oppleve mestring på skolen (se for eksempel Kunnskapsdepartementet, 2015; St.meld. 31 (2007–2008)). Den svært store andelen elever som presterer under nivå 2 i PISA 2022, tyder på at norske skole er langt fra å nå dette målet. I tillegg har samfunnet og samfunnets fremtidige utfordringer behov for flere personer med høy realfagskompetanse, og det er et uttalt mål at flere elever skal prestere på de høyeste nivåene i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2015). Resultatene fra PISA 2022 viser at det er en betydelig tilbakegang i andelen høytpresterende elever i matematikk sammenliknet med tidligere år.

Tilbakegang for elever på alle nivåer

I utvalget av elever som deltar i PISA-undersøkelsen, kan vi identifisere de lavest og høyest presterende elevene ut fra hvordan de presterer sammenliknet med de andre elevene. De lavest presterende elevene er i denne sammenhengen definert som de 10 prosent elevene med færrest poeng, mens høyest presterende er de 10 prosent elevene med flest poeng (henholdsvis 10- og 90-prosentilen). Ved å sammenlikne poenggrensene for 10- og 90-prosentilen, er det mulig å undersøke hvordan resultatene for de lavest og høyest presterende elevene har endret seg over tid (se figur 3).



Figur 3. Matematikkresultater for de høyest presterende (90-prosentil), middels presterende (50-prosentil) og lavest presterende (10-prosentil) norske elevene fra PISA 2003 til PISA 2022 (OECD, 2023b). Standardfeilen er på mellom 2,6 og 3,6 poeng for 90-prosentilen og mellom 2,9 og 3,9 poeng for 10-prosentilen

Figur 3 viser resultatutviklingen for de lavest og høyest presterende elevene fra 2003 til 2022. Fra 2018 til 2022 er det betydelig nedgang for begge disse elevgruppene, på henholdsvis 36 og 28 poeng for de lavest og høyest presterende elevene. Det er ikke statistisk signifikant forskjell i nedgangen for de to gruppene. Også for de middels presterende elevene (50-prosentilen) er det en tilsvarende nedgang fra 2018 til 2022 (35 poeng) (se figur 3). Dette betyr at den store tilbakegangen i gjennomsnittsresultater i matematikk for norske elever forklares ved at det er en nedgang i resultater over hele prestasjonsskalaen. Her skiller matematikkresultatene seg fra resultatene i de andre fagområdene. I naturfag er det en betydelig nedgang på 19 poeng fra 2018 til 2022, for de lavest presterende elevene, mens prestasjonene til de høyest presterende elevene er på samme nivå i 2022 som i 2018. I lesing er nedgangen blant de lavest presterende elevene 32 poeng i samme periode, men «kun» 13 poeng for de høyest presterende elevene. Dette betyr at det har vært en økning i «prestasjonsgapet» mellom de lavest og høyest presterende elevene i lesing og naturfag fra 2018 til 2022.

Vi kan se at fra 2003 til 2018 er resultatene for de høyest presterende elevene forholdsvis stabile, som vil si at denne elevgruppa presterte på omtrent samme nivå gjennom denne perioden (figur 3). Resultatene er noe mer varierende for de lavest presterende elevene (figur 3). De små endringene i gjennomsnittsresultater for norske elever fra gjennomføring til gjennomføring i perioden 2003 til 2012, skyldes i stor grad variasjon i andel elever under nivå 2 eller resultatene til de lavest presterende elevene. Ser vi på perioden fra 2012 til 2022, er tilbakegangen større for de lavest presterende elevene (28 poeng) enn de høyest presterende elevene (15 poeng). Ut fra figur 3 ser vi at dette skyldes at det var en tilbakegang for de lavest presterende elevene også fra 2015 til 2018, og at denne tilbakegangen fortsatte fra 2018 til 2022.

Det er flere uheldige konsekvenser av at prestasjonsgapet mellom de lavest og høyest presterende elevene har økt over tid. For det første vil større forskjeller i prestasjoner bety mindre grad av likeverd. Dette kan for eksempel bidra til større forskjeller i mulighet til videre utdanning og fremtidige jobbmuligheter. Samtidig viser resultatene at det fra 2018 er tilbakegang på alle nivåer. Tiltak for å øke kompetansen til elever på lavt nivå vil derfor ikke være tilstrekkelig for å løfte den matematiske kompetansen til norske elever generelt. Det er behov for å løfte elever på alle nivåer, både lavtpresterende, middelspresterende og høytpresterende

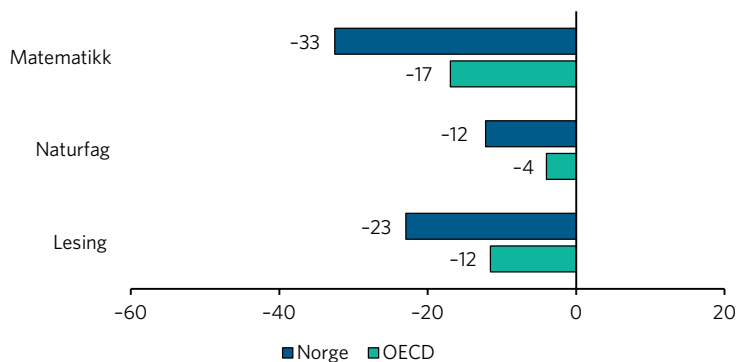
elever. Dette er elever som vil ha ulike faglige behov; elever på høyt nivå kan for eksempel ha behov for å arbeide mer med komplekse problemer og arbeide mer med oppgaver der de må veksle mellom ulike matematiske representasjoner. Elever på lavt nivå kan ha behov for å arbeide med oppgaver hvor de selv må finne ut av mulige fremgangsmåter eller strategier, som for eksempel hvilke regneoperasjoner som kan benyttes (se vedlegg 1 i denne boka: Mestringsnivåer i matematikk i PISA 2022).

Hva vet vi fra andre undersøkelser om endringer i matematikkprestasjoner?

I Norge har vi to andre undersøkelser som samler inn systematisk informasjon om utviklingen i elevers prestasjoner i matematikk over tid: Nasjonale prøver i regning og TIMSS. Resultatene fra begge disse undersøkelsene har vist tendenser til at det har vært en tilbakegang i norske elevers matematikkprestasjoner de siste årene. Resultatene for nasjonale prøver i regning for 2023 viser en liten tilbakegang for elever på 8. trinn fra 2022, og at flere elever presterer på de laveste mestringsnivåene (Utdanningsdirektoratet, 2023). De siste resultatene fra TIMSS-undersøkelsen viser en tilsvarende tendens: For de norske elevene på 9. trinn var det en signifikant nedgang i matematikkresultatene fra 2015 til 2019. Elevene gikk i gjennomsnitt ned 9 poeng (Kaarstein et al., 2020). For å få en bedre forståelse av hvor stor nedgangen var, kan den sammenliknes med tall fra TIMSS 2015-undersøkelsen, hvor elever på både 8. og 9. trinn deltok. Den gjennomsnittlige poengsummen for elevene på 8. trinn var 487 poeng, mens elevene på 9. trinn i gjennomsnitt fikk 512. Den norske nedgangen fra 2015 til 2019 utgjør derfor omtrent en tredel av resultatdifferansen mellom 8. og 9. trinn i 2015 (Bergem, 2016a; Kaarstein et al., 2020).

Norske resultater sett i lys av resultatene i de øvrige nordiske landene og OECD

Også mange andre land opplevde stor tilbakegang i både matematikkresultatene og resultatene i lesing fra 2018 til 2022. Figur 4 viser den gjennomsnittlige endringen for gjennomsnittsresultatene i OECD-landene og Norge fra 2018 til 2022, for alle de tre fagområdene.



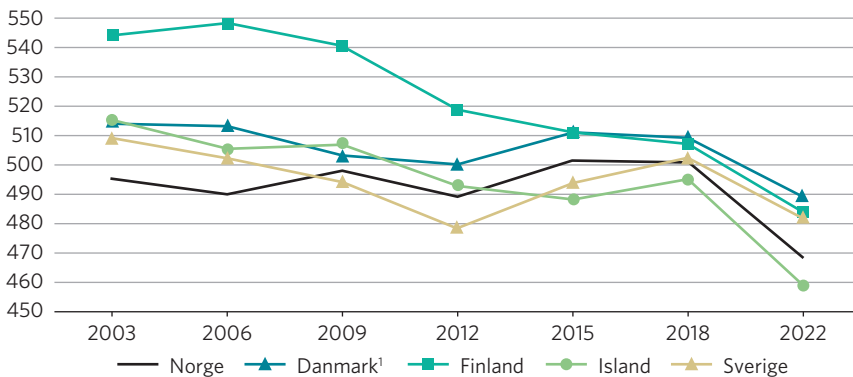
Figur 4. Endringer i gjennomsnittresultater i de tre fagområdene fra PISA 2018 til 2022 for norske elever (blå) og for OECD-gjennomsnittet (grønn). (Verdiene er hentet fra Jensen et al., 2023)

Mens det er en betydelig tilbakegang for OECD-gjennomsnittet i matematikk og lesing, er resultatet i naturfag relativt stabilt. Tidligere endringer i OECD-gjennomsnittet fra en gjennomføring til neste, har på det meste vært 3 poeng i matematikk og 4 poeng i lesing. Tilbakegangen på 17 og 12 poeng i henholdsvis matematikk og lesing er derfor svært høyt i PISA-sammenheng, og er årsakene til at covid-19-pandemien og ringvirkningene av denne ansees som én åpenbar faktor som har påvirket resultatene. I tillegg kan det se ut til at elevenes læring i fagene har blitt påvirket ulikt siden det er store forskjeller i tilbakegangen mellom de ulike fagområdene. Endringen i OECD-gjennomsnittet fra 2018 til 2022, kan tyde på at matematikkfaget og elevenes læring i matematikk er spesielt sårbare for endringene som pandemien medførte, på tvers av land. Resultatene kan tyde på at matematikk er noe som primært læres på skolen i større grad enn andre fag, og læreren og undervisningen i «strukturerte» omgivelser, som i et klasserom på en skole, er viktig for elevenes læring i matematikk. Dette gjelder for elever på alle nivåer. Kanskje blir matematikkfaget hardere rammet enn andre fag når det innføres hjemmeundervisning, eller når det er forstyrrelser i den ordinære undervisningen? Dette samsvarer med funnene til Rambøll (2022), hvor elever, lærere og foresatte rapporterte at de opplevde lav kvalitet på matematikkundervisningen under pandemien, og at matematikkfaget var særlig utfordrende når det kom til digital undervisning.

I PISA 2022 svarte elevene også på et spørreskjema. Der ble elevene blant annet bedt om å ta stilling til utsagn knyttet til «støttende lærer», som for eksempel hvor ofte «læreren hjelper elevene med å lære» og «læreren gir ekstra hjelp når elevene trenger det». Noen av disse spørsmålene var også

med i PISA 2012. Sammenlikner vi resultatene finner vi at elevene rapporterte om mindre grad av støtte fra læreren i 2022 enn i 2012. Selv om disse PISA-resultatene ikke sier noe om hva som er årsaken til denne nedgangen, kan en mulig forklaring være at hjemmeskole og andre tiltak knyttet til covid-19-pandemien medførte at mange elever opplevde mindre støtte enn de var vant til under pandemien.

Figur 5 viser gjennomsnittresultatene i matematikk for de nordiske landene fra 2003 til 2022. Her ser vi at også i de andre nordiske landene var det en stor tilbakegang i matematikkresultatene fra 2018 til 2022. Figuren viser også at tilbakegangen var størst for Norge og Island, som var de eneste blant de 37 OECD-landene med en tilbakegang på mer enn 30 poeng i matematikk fra 2018 til 2022 (Jensen et al., 2023). Danmark er merket med¹ fordi det var en betydelig økning fra 2018 til 2022 i andelen danske elever som ble ekskludert fra undersøkelsen. Dette gjør at det er større usikkerhet knyttet til resultatene for Danmark i PISA 2022 enn for andre land.

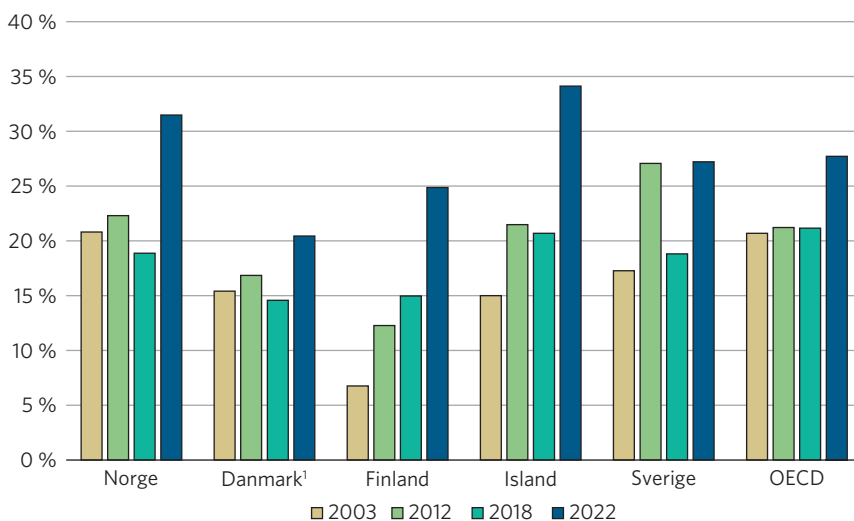


Figur 5. Gjennomsnittresultater i matematikk i de nordiske landene i PISA 2003–2022. (Figur hentet fra Jensen et al., 2023)

Figur 5 viser også at utviklingen i resultater i perioden 2003–2018 var ulik for de nordiske landene. I de tidlige undersøkelsene var Finland et av landene med høyest prestasjoner i matematikk i PISA (se for eksempel OECD, 2004), men siden 2006 har det vært tilbakegang i gjennomsnittresultatene for finske elever. Den gjennomgående og til dels store tilbakegangen i resultater fra 2018 til 2022 på tvers av land, tyder på at covid-19-pandemien har hatt stor betydning for elevenes læring i de nordiske landene. UNESCO rapporterer at mer enn 1,6 milliarder elever og unge ble påvirket av pandemien, og at sårbare elever ble hardest rammet (UNESCO, u.å.). Samtidig

er det usikkert hvor stor betydning pandemien hadde for elevenes læring i ulike land. Når resultatene viser at norske elever har større tilbakegang i matematikkresultatene enn elever i de fleste andre land, er det usikkert om dette skyldes at norske elevers læring ble hardere rammet av pandemien enn elevenes læring i andre land, eller at det også er andre faktorer som har påvirket norske elevers læring i denne perioden.

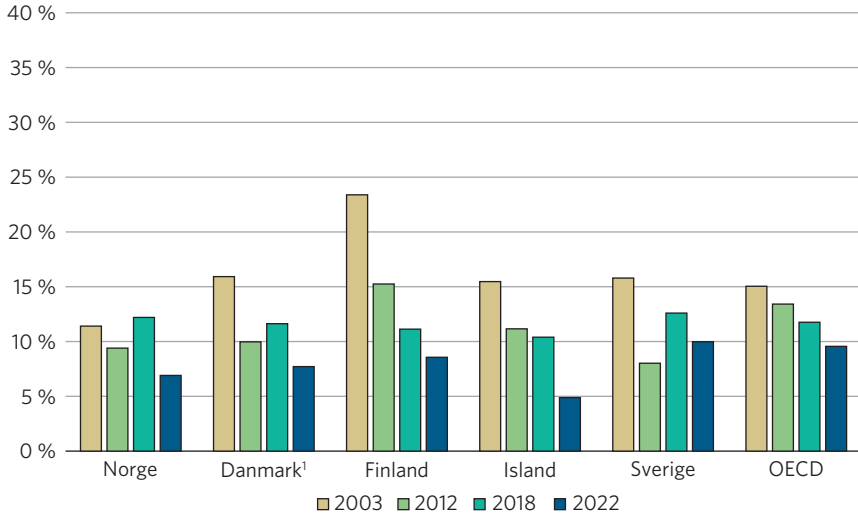
Økningen i andelen elever under nivå 2 er ikke unik for Norge. Også i de andre nordiske landene og for OECD-gjennomsnittet vokser denne elevgruppen markant fra PISA 2018 til 2022 (figur 6). Samtidig variere det fra land til land hvor stor økning det er i andel elever under nivå 2. Mens økningen i andel elever under nivå 2 er på rundt 13 prosentpoeng fra PISA 2018 til 2022 for Norge, er økningen for OECD omtrent sju prosentpoeng i samme periode. Også i Sverige, Finland og Island økte andelen elever under nivå 2 mer enn i enn OECD. I perioden fra 2003 til 2022 hadde Finland de mest dramatiske endringene, hvor andelen elever under nivå 2 har økt fra 7 til 25 prosent.



Figur 6. Prosentandel elever under mestringsnivå 2 i de nordiske landene og blant OECD-landene

Det er også en nedgang i andelen elever på de øverste mestringsnivåene (nivå 5 og 6) i de nordiske landene og for OECD-gjennomsnittet fra PISA 2018 til 2022 (figur 7). For Island er det en halvering i andelen elever på nivå 5 og 6, omtrent det samme som for Norge. For Sverige og Finland er denne nedgangen på omtrent 2 til 3 prosentpoeng, og som tilsvarer nedgangen blant OECD-landene. Hvis vi ser på hele perioden fra

2003 til 2022, er det de finske resultatene har den mest markante nedgangen i andel elever på de øverste nivåene, hvor andelen har gått ned fra 23 til 9 prosent.



Figur 7. Prosentandel elever på mestringsnivå 5 og 6 i de nordiske landene og blant OECD-landene

Avsluttende kommentarer

I kjølvannet av lanseringen av resultater fra internasjonale undersøkelser, kommer det vanligvis en rekke kommentarer og diskusjoner om tilstanden på undervisningen i Norge og elevenes kompetanse. I de tilfellene der resultatene oppfattes som svake, gir politikere, forskere, lærere, foreldre og elever uttrykk for ulike meninger og forklaringer på hva problemene er og hvilke tiltak de tenker er nødvendige. Det blir ofte pekt på én årsak eller faktor for å forklare hva som er «galt». Når vi i dette kapittelet trekker frem noen av de mange endringene som har skjedd i matematikkfaget og norsk skole (og samfunnet) de siste tjue årene, er det gjort for å illustrere at mange ulike faktorer kan ha hatt en innvirkning på elevenes læring i matematikk, og at det derfor ikke gir mening å skulle jakte på én enkelt forklaring. For eksempel har elevene som har deltatt på PISA i denne tjuårsperioden vært gjennom fire læreplaner, endringer i matematikkksamnen og i antallet undervisningstimer. I tillegg er det lansert flere realfagstrategier og stortingsmeldinger samt innført andre tiltak. På tross av alle endringene i

skolen og læreplanene, var matematikkresultatene i PISA relativt stabile i perioden fra 2003 til 2018.

Samtidig er det én årsak som skiller seg ut med tanke på å forklare tilbakegangen i resultater fra PISA 2018 til 2022. Det er liten tvil om at omstendighetene for elevene som gjennomførte PISA i 2022 var svært spesielle med tanke på den nylige gjenåpningen av samfunnet etter covid-19-pandemien. Den store tilbakegangen i resultater på tvers av land (Jensen et al., 2023) gir all grunn til å tro at pandemien hadde en negativ påvirkning på elevenes læring. Samtidig var tilbakegangen for norske elever større enn for elever i de fleste andre land, noe som gjør det nærliggende å tenke at også andre faktorer eller endringer, i samfunnet eller på skolen, kan ha påvirket elevenes læring negativt. I tillegg til en tilbakegang over hele prestasjonsskalaen i matematikk, er det særlig urovekkende med den økende og svært høye andelen lavtpresterende elever. Dette er elever med svært begrenset matematisk kompetanse etter ti år med matematikkundervisning. For mange av disse elevene vil det bli utfordrende å fortsette med matematikk på videregående skole. Dette på tross av stadige realfagsatsinger hvor det vektlegges at alle elever må oppleve mestring og en (tilsynelatende) sterk satsing på tidlig innsats.

Tilbakegangen i resultater hos elever på alle nivåer, kombinert med den store økningen i andelen lavtpresterende elever, gjør jobben som matematikklærer mer krevende enn tidligere. Tilbakegang på alle nivåer viser at det er et behov for å styrke undervisningen for alle elever, på alle nivåer. Tidligere har det vært stort fokus i norsk skole på å løfte de lavest presterende elevene, noe som er gjenspeilet både i realfagsstrategiene og i flere stortingsmeldinger (se delkapittel «2012»). Nå vil ikke dette være tilstrekkelig, fordi lærere i tillegg trenger å øke kompetansen til elever på middels og høyt nivå. I tillegg er det risiko for at elever på alle nivåer har det som ofte kalles kunnskapshull, det vil si at elever ikke har tilegnet seg et sentralt begrep eller ikke mestrer en grunnleggende metode. Slike kunnskapshull er spesielt kritiske i matematikkfaget, hvor kunnskapen og ferdighetene elevene skal tilegne seg i stor grad bygger på hverandre. Både det å avdekke elevenes kunnskapshull og legge til rette for at elevene kan tilegne seg manglende kunnskap, er krevende arbeid som ikke matematikklæreren bør stå i alene, men bør involvere støtte fra skolens ledelse. Kanskje er situasjonen så utfordrende at lærere og skoleledere trenger støtte fra og verktøy ut over det man har til rådighet i dag. Det er snart femten år siden siste realfagsstrategi. Kanskje er det tid for tiltak på nasjonalt nivå?

Forfatterbiografier

Andreas Pettersen er forsker ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo. Han har en doktorgrad i matematikkdidaktikk og har jobbet med PISA-undersøkelsen siden 2017. Pettersen har utgitt flere artikler om matematikkdidaktikk og vært redaktør for boka *Equity, Equality and Diversity in the Nordic Model of Education* (utgitt på Springer i 2020).

Hege Kaarstein er forsker ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Enhet for kvantitative utdanningsanalyser (EKVA), Universitetet i Oslo. Hun leder gjennomføringen av TIMSS 2023 i Norge og sitter i den internasjonale ekspertgruppen for matematikk i TIMSS. Kaarstein er blant annet interessert i matematikklærernes fagdidaktiske kunnskap, undervisningskompetanse og -kvalitet, og hvordan dette kan måles.

Guri A. Nortvedt er professor i matematikkdidaktikk ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo. Nortvedt forsker blant annet på elevers matematiske kompetanse, likeverd, læreres vurderingskompetanse og faktorer som påvirker elevers læring i matematikk.

Referanser

- Avvisati, F. & Givord, P. (2023). The learning gain over one school year among 15-year-olds: An international comparison based on PISA. *Labour Economics*, 84, Artikkel 102365. <https://doi.org/10.1016/j.labeco.2023.102365>
- Beaton, A. E. & Zwick, R. (1990). *The effect of changes in the national assessment: Disentangling the NEEP 1985-86 reading anomaly. Revised* (ETS-17-TR-21). <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED322216.pdf>
- Bergem, O. K. (2016a). Hovedresultater i matematikk. I O. K. Bergem, H. Kaarstein & T. Nilsen (Red.), *Vi kan lykkes i realfag. Resultater og analyser fra TIMSS 2015* (s. 22–44). Universitetsforlaget. <https://doi.org/10.18261/97882150279999-2016-03>
- Bergem, O. K. (2016b). Hovedresultater i naturfag. I O. K. Bergem, H. Kaarstein & T. Nilsen (Red.), *Vi kan lykkes i realfag. Resultater og analyser fra TIMSS 2015* (s. 44–62). Universitetsforlaget. <https://doi.org/10.18261/97882150279999-2016-04>
- Bergesen, H. O. (2006). *Kampen om kunnskapsskolen*. Universitetsforlaget.
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2017). Surveys, longitudinal, cross-sectional and trend studies. I L. Cohen, L. Manion & K. Morrison (Red.), *Research methods in education* (8. utg., s. 27). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315456539>
- Engh, R. & Gran, L. (2011). *Vurdering for læring i skolen. På vei mot en bærekraftig og demokratisk læringskultur* (2. utg.). Cappelen Damm Akademisk.
- Ertesvåg, F. & Fausko, L. (2023, 6. desember). Nytt norsk matte-sjokk: Aldri prestert dårligere. VG. <https://www.vg.no/nyheter/innenriks/i/veR3EV/nytt-norsk-matte-sjokk-aldri-prestert-daarligere>

- Ertesvåg, F. & Laustsen, E. (2013, 3. desember). PISA-rapport: Norske elever blir dårligere i matte og naturfag. VG. <https://www.vg.no/nyheter/innenriks/i/WEAgd/pisa-rapport-norske-elever-bli-darligere-i-matte-og-naturfag>
- Gultvedt, B., Torvik, L. & Sundnes, T. (2004, 6. desember). Dumper i matte og naturfag. VG. <https://www.vg.no/nyheter/innenriks/i/3jk2EL/dumper-i-matte-og-naturfag>
- Jelstad, J. (2023, 5. desember). *PISA-fallet i matte utgjør et helt skoleår: – Det kan ikke fortsette sånn som dette*. Utdanningsnytt. <https://www.utdanningsnytt.no/forskning-kari-nessa-nordtun-kunnskapsdepartementet/det-kan-ikke-fortsette-sann-som-dette/382806>
- Jensen, F., Pettersen, A., Frønes, T. S., Eriksen, A., Løvgren, M. & Narvhus, E. K. (2023). *PISA 2022. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing*. Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/noasp.205>
- Kirke- og undervisningsdepartementet. (1987). *Mønsterplan for grunnskolen*. Aschehoug.
- Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet. (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen*. Nasjonalt læremiddelsenter.
- Kjærnsli, M., Lie, S., Olsen, R. V., Roe, A. & Turmo, A. (2004). *Rett spor eller ville veier? Norske elevers prestasjoner i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2003*. Universitetsforlaget.
- Kunnskapsdepartementet. (2005). «*Realfag, naturligvis!*» *Strategi for styrking av realfagene 2002–2007. Kompetanse – motivasjon – rekruttering*. <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/realfag-naturligvis/id105788/>
- Kunnskapsdepartementet. (2006a). *Et felles løft for realfagene. Strategi for styrking av realfagene 2006–2009*. http://www.regjeringen.no/globalassets/upload/kilde/kd/nyh/2006/0014/ddd/pdfv/290281-strategiplan_for_realfagene.pdf
- Kunnskapsdepartementet. (2006b). *Læreplan i matematikk*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2006. <https://www.udir.no/kl06/MAT1-01#>
- Kunnskapsdepartementet. (2010). *Realfag for framtida. Strategi for styrking av realfag og teknologi (2010–2014)*. <https://www.regjeringen.no/globalassets/upload/kd/realfagstrategi.pdf>
- Kunnskapsdepartementet. (2015). *Tett på realfag. Nasjonal strategi for realfag i barnehagen og grunnsopplæringen (2015–2019)*. <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/tett-pa-realfag/id2435042/>
- Kunnskapsdepartementet. (2017). *Framtid, fornyelse og digitalisering. Digitaliseringsstrategi for grunnsopplæringen 2017–2021*. https://www.regjeringen.no/contentassets/dc02a65c18a7464db394766247e5f5fc/kd_framtid_fornyelse_digitalisering_nettpdf
- Kunnskapsdepartementet. (2020). *Læreplan i matematikk*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/mat01-05>
- Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A.-C., Nilsen, T. & Bergem, O. K. (2020). *TIMSS 2019. Kortrapport*. Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo.
- Lie, S., Kjærnsli, M., Roe, A. & Turmo, A. (2001). *Godt rustet for framtida? Norske 15-åringers kompetanse i lesing og realfag i et internasjonalt perspektiv*. Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.
- Læringscenteret. (2003). *Avgangsprøva 2003 med sensorveiledninger og forhåndssensur*. Læringscenteret, Skoletjenester.
- Meld. St. 28 (2015–2016). *Fag – fordypning – forståelse. En fornyelse av Kunnskapsløftet*. Kunnskapsdepartementet. <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/>
- Meld. St. 21 (2016–2017). *Lærelyst – tidlig innsats og kvalitet i skolen*. Kunnskapsdepartementet. <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-21-20162017/id2544344/>
- Meld. St. 22 (2010–2011). *Motivasjon – mestring – muligheter. Ungdomstrinnet*. <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld-st-22-2010--2011/id641251/>
- Nortvedt, G. A. (2013). Resultater i matematikk. I M. Kjærnsli & R. V. Olsen (Red.), *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012* (s. 67–96). Universitetsforlaget. <https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/pisa/publikasjoner/publikasjoner/fortsatt-en-vei-a-ga.pdf>

- Nortvedt, G. A. (2018). «Det er et verktøy, ikke sant, for oss» – erfaringer fra fire gjennomføringer med kartleggingsprøver i regning 2014–2017. *Acta Didactica Norge*, 12(4). <https://doi.org/10.5617/adno.6383>
- NOU 2014: 7. (2014). *Elevenes læring i fremtidens skole. Et kunnskapsgrunnlag*. Kunnskapsdepartementet. <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/NOU-2014-7/id766593/>
- OECD. (2004). *Learning for tomorrow's world*. <https://doi.org/10.1787/9789264006416-en>
- OECD. (2019). *PISA 2018 results: Volume I. What students know and can do*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/5f07c754-en>
- OECD. (2022). *From learning recovery to education transformation*. <https://doi.org/10.1787/a79f55ac-en>
- OECD. (2023a). *PISA 2022 assessment and analytical framework*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en>
- OECD. (2023b). *PISA 2022 results: Volume I. The state of learning and equity in education*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- OECD. (2023c). *PISA 2022 results: Volume II. Learning during – and from – disruption*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/a97db61c-en>
- OECD. (2023d). The PISA 2022 integrated assessment design. I *PISA 2022 technical report*. Organisation for Economic Co-operation and Development.
- Opsal, H. (2013). *Bruk av elevbøker i matematikk på ungdomssteget: Ein kasusstudie* [Doktorgradsavhandling, Universitetet i Agder]. AURA. <http://hdl.handle.net/11250/139737>
- Pedersen, C., Reiling, R. B., Vennerød-Diesen, F. F., Alne, R. & Smedsrud, J. (2021). *Lærertetthet i koronapandemiens første år: Analyse av GSI og intervjuer med skoleeiere, skoleledere og lærere. Fjerde delrapport fra Evaluering av norm for lærertetthet*. NIFU. <https://hdl.handle.net/11250/2771724>
- Pettersen, A. (2024). Hvor relevante er PISA-resultatene for matematikkfaget i Norge? – En sammenlikning av matematisk kompetanse i PISA 2022 og LK20. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 49–74). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch3>
- Piacentini, M. & Pacileo, B. (2019). How are PISA results related to adult life outcomes? *PISA in Focus*, (102). <https://doi.org/10.1787/7b60595e-en>
- Rambøll. (2022). *Innsiktsinnsamling til situasjonsrapporten «Osloskolen i pandemi»*. Utdanningsetaten i Oslo.
- Reynolds, K. A., Wry, E., Mullis, I. V. S. & von Davier, M. (2022). *PIRLS 2021 encyclopedia: Education policy and curriculum in reading*. Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center. <https://pirls2021.org/encyclopedia>
- Rohatgi, A. & Throndsen, I. (2015). Elevenes IKT-bruk. I O. Hatlevik & I. Throndsen (Red.), *Læring av IKT. Elevenes digitale ferdigheter og bruk av IKT i ICILS 2013* (s. 93–110). Universitetsforlaget.
- St.meld. 11 (2008–2009). *Læreren. Rollen og utdanningen*. Kunnskapsdepartementet. <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/stmeld-nr-11-2008-2009-/id544920/>
- St.meld. 16 (2006–2007). *... og ingen sto igjen – Tidlig innsats for livslang læring*. Kunnskapsdepartementet. <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/stmeld-nr-16-2006-2007-/id441395/?ch=1>
- St.meld. 30 (2003–2004). *Kultur for læring*. Utdannings- og forskningsdepartementet. <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/stmeld-nr-030-2003-2004-/id404433/>
- St.meld. 31 (2007–2008). *Kvalitet i skolen*. Kunnskapsdepartementet. <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/stmeld-nr-31-2007-2008-/id516853/>
- Statsministerens kontor. (2020). *Omfattende tiltak for å bekjempe koronaviruset*. <https://www.regjeringen.no/no/dokumentarkiv/regjeringen-solberg/aktuelt-regjeringen-solberg/smk/pressemeldinger/2020/nye-tiltak/id2693327/>

- Sørenes, S., Johansen, J. I. & Fjørtoft, M. (2023, 5. desember). *Internasjonal undersøkelse: Norske 15-åringar har aldri scora dårlegare i matte*. NRK. <https://www.nrk.no/vestland/pisa-undersokinga-for-2022-viser-at-norske-15-aringar-har-aldri-vore-darlegare-i-matte-1.16665226>
- UNESCO. (u.å.). *Education: From COVID-19 school closures to recovery*. Retrieved 15 april from <https://www.unesco.org/en/covid-19/education-response>
- Utdannings- og forskningsdepartementet. (2002a). *Clemet åpnet Nasjonalt senter for naturfag* https://www.regjeringen.no/no/dokumentarkiv/Regjeringen-Bondevik-II/ufd/Nyheter-og-pressemedlinger/2003/clemet_apnet_nasjonalt_senter_for/id249838/
- Utdannings- og forskningsdepartementet. (2002b). *Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen*. https://www.regjeringen.no/no/dokumentarkiv/Regjeringen-Bondevik-II/ufd/Nyheter-og-pressemedlinger/2002/nasjonalt_senter_for_matematikk/id246785/
- Utdanningsdirektoratet. (2010). *Grunnlagsdokument. Satsingen Vurdering for læring 2010–2014*. Utdanningsdirektoratet. <https://www.udir.no/contentassets/42ddd51789024ccb8f0cea08dad9cb6e/grunnlagsdokument-satsingen-vfl.pdf>
- Utdanningsdirektoratet. (2012a). *Eksamen. MAT0010 Matematikk. 10. årstinn (Elever) Del 2*. Utdanningsdirektoratet.
- Utdanningsdirektoratet. (2012b). *Rammeverk for grunnleggende ferdigheter*. Kunnskapsdepartementet. <https://www.udir.no/laring-og-trivsel/rammeverk/rammeverk-for-grunnleggende-ferdigheter/>
- Utdanningsdirektoratet. (2019, 30. januar 2019). *Erfaringer fra nasjonal satsing på vurdering for læring (2010–2018)*. <https://www.udir.no/tall-og-forskning/finn-forskning/rapporter/erfaringer-fra-nasjonal-satsing-pa-vurdering-for-laring-2010-2018/>
- Utdanningsdirektoratet. (2021a). *Konsekvenser av smitteverntiltak i grunnskolen – våren 2021*. <https://www.udir.no/tall-og-forskning/statistikk/statistikk-grunnskole/analyser/konsekvenser-av-smitteverntiltak-i-grunnskolen--varen-2021/>
- Utdanningsdirektoratet. (2021b, 2. november 2021). *Utdanningsspeilet 2021*. <https://www.udir.no/tall-og-forskning/publikasjoner/utdanningsspeilet/utdanningsspeilet-2021/>
- Utdanningsdirektoratet. (2022a). *Eksamen. MAT0015 Matematikk. 10. årstinn (Elever) Del 2*. Utdanningsdirektoratet.
- Utdanningsdirektoratet. (2022b). *Rammeverk for kartleggingsprøver*. <https://www.udir.no/eksamen-og-prover/prover/rammeverk-for-kartleggingsprøver/>
- Utdanningsdirektoratet. (2023). *Nasjonale prøver 2023. Resultater nasjonale prøver ungdomstrinnet*. <https://www.udir.no/tall-og-forskning/statistikk/statistikk-grunnskole/analyser/2023/analyse-av-nasjonale-prover-for-ungdomstrinnet-2023/>
- Utdanningsdirektoratet. (2024a). *Eksamensveiledning – om vurdering av eksamensbesvarelser. MAT0015 Matematikk*. Utdanningsdirektoratet.
- Utdanningsdirektoratet. (2024b, 26. februar). *Kartleggingsprøver*. <https://www.udir.no/eksamen-og-prover/prover/kartlegging-gs>
- Vennerød-Diesen, F. F. & Pedersen, C. (2023). *Læremidler i grunnskole og videregående skole. En analyse av tilgang på, balanse mellom og valg av trykte og digitale læremidler i grunnskole og videregående skole*. Nordisk institutt for studier av innovasjon. <https://nffo.no/attachments/d0d91778feddb3d065dedde41aa4185d7371a36f/412-20230815093126563469.pdf>
- Viseth, E. & Larsen, M. H. (2013, 3. desember). *Pisa 2013: Norske elever har aldri vært dårligere i matematikk*. NRK. https://www.nrk.no/norge/pisa-2013_-darligere-i-realfag-1.1139352

KAPITTEL 3

Hvor relevante er PISA-resultatene for matematikkfaget i Norge?

– En sammenlikning av matematisk kompetanse i PISA 2022 og LK20

Andreas Pettersen Universitetet i Oslo

Sammendrag: Når resultatene fra PISA-undersøkelsen blir presentert, stilles det ofte spørsmål om resultatenes relevans for norsk skole. I dette kapittelet presenteres rammeverket for matematikk i PISA 2022, som danner grunnlaget for oppgavene som inngår i undersøkelsen. Kapittelet beskriver også hvilket syn på matematisk kompetanse som kommer til uttrykk i den norske læreplanen (LK20). Videre sammenliknes PISA-rammeverket og LK20 med KOM-rammeverket, et sentralt rammeverk for matematisk kompetanse i forskningslitteraturen. Hensikten med dette er å undersøke i hvilken grad den matematiske kompetansen som beskrives i PISA, og resultatene fra undersøkelsen, er relevant for norsk skole. Sammenlikningen viser at kompetansen som beskrives i PISA-rammeverket, er en viktig del av læreplanen i matematikk, men at enkelte deler av læreplanens beskrivelse av matematisk kompetanse ikke inngår i PISA. Matematikkresultatene fra PISA-undersøkelsen er derfor relevante for norsk skole, men dekker ikke hele matematikkfaget. Sett opp mot tidligere læreplaner har LK20, med innføringen av kjerneelementene, en struktur som gjør at det er en tydeligere sammenheng mellom læreplanen i matematikk og rammeverk for matematisk kompetanse vi finner både i forskningslitteraturen og i PISA.

Nøkkelord: matematisk kompetanse, mathematical literacy, rammeverk matematikk, kjerneelementer LK20

Abstract: When the results of the PISA survey are presented, questions often arise about their relevance to Norwegian schools. This chapter presents the framework for mathematics in PISA 2022, which forms the basis for the tasks included in the survey. The chapter also describes the perspective on mathematical competence expressed in the Norwegian curriculum (LK20). Furthermore, the PISA framework and LK20 are compared with the KOM framework, a central framework for mathematical competence presented in research literature. The purpose of this comparison is to examine the extent to which the mathematical competence in PISA and the PISA results are relevant to Norwegian schools. The comparison shows that the competence described in the PISA framework constitutes an important part of the mathematics curriculum in LK20, but also that some aspects of mathematical competence in the curriculum are not included in PISA. Therefore, the PISA mathematics results are relevant to Norwegian schools but do not cover the entire scope of the mathematics subject. Compared to previous curricula, LK20, with the introduction of core elements, has a structure that makes a clearer connection between the mathematics curriculum and the mathematical competency frameworks outlined in research literature and in PISA.

Keywords: mathematical competence, mathematical literacy, competence frameworks, core elements LK20

PISA-undersøkelsen måler i hvilken grad 15-åringene kan bruke matematiske kunnskaper og ferdigheter de har tilegnet seg gjennom den obligatoriske skolegangen til å løse oppgaver i ulike kontekster (OECD, 2023a). Hensikten er å undersøke hvor godt elevene er forberedt på å kunne bruke den matematikken de har lært senere i livet. Resultatene får ofte mye oppmerksomhet i mediene, spesielt hvis resultatene kan bli oppfattet som dårlige. Ofte stilles det spørsmål om hvor relevant det som måles i PISA er for norsk skole, som for eksempel i Dagsavisen, hvor Bringeland (2022) hevder at PISA «ikke måler kompetanser som er formulert i norske læreplaner». PISA-resultatene relevans er et viktig spørsmål, blant annet fordi PISA-rammeverket, som danner grunnlaget for det som måles i undersøkelsen, ikke er utviklet med utgangspunkt i deltakerlandenes læreplaner.

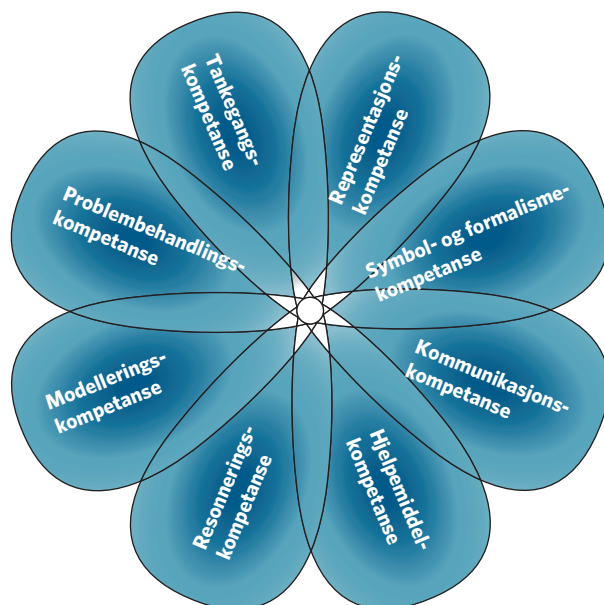
De norske elevene som deltok på PISA-undersøkelsen i 2022, nærmet seg slutten av den 10-årige grunnskolen. Da hadde de vært gjennom over 1000 timer med matematikkundervisning, hvor de har løst tusenvis av oppgaver, diskutert, utforsket, spilt spill, forklart hvordan de har tenkt og begrunnet svarene sine i samarbeid med lærere og medelever. Hensikten med undervisningen kan virke åpenbar: Vi ønsker at elevene skal lære matematikk. Men hva er det vi vil at elevene skal lære i matematikkfaget i norsk skole? Og hvordan samsvarer dette med de matematiske kunnskapene og ferdighetene PISA-undersøkelsen tester elevene i?

Det finnes ulike oppfatninger om hva det vil si å mestre matematikk. Det var lenge et utbredt syn at det å mestre matematikk hovedsakelig handler om kunnskap om bestemte matematiske begreper og regler, samt ferdigheter i matematiske operasjoner og prosedyrer (Niss et al., 2017; Schoenfeld, 1992). Innenfor den matematikdidaktiske forskningslitteraturen har det derimot vært mange som har tatt til orde for at det å lære matematikk handler om noe mer enn å tilegne seg kunnskap og utvikle ferdigheter (Kilpatrick, 2020; Niss & Jablonka, 2014). Utover 1980-tallet ble mange opptatt av problemløsning og det å kunne ta i bruk matematikk i ulike kontekster både innenfor og utenfor matematikkens verden (Niss et al., 2017; Schoenfeld, 1992). Noe av bakgrunnen for dette var studier som viste at elever i liten grad klarte å bruke de matematiske kunnskapene og ferdighetene de hadde tilegnet seg til å løse oppgaver og problemer i nye situasjoner og kontekster (Evans, 1999; Gillespie, 2002; Straesser, 2000). Hvis matematikkundervisningen skal ha noen verdi utenfor klasserommet, både for elevene og for samfunnet, må elevene kunne ta i bruk de matematiske

kunnskapene og ferdighetene for å håndtere og løse utfordringer de møter i livet utenfor klasserommet.

Utover 1980- og 1990-tallet ble begrepet *matematisk kompetanse*, i tillegg til beslektede begreper som *mathematical proficiency* (Kilpatrick et al., 2001) og *mathematical literacy* (Jablonka, 2003), synlig i læreplaner og matematikdidaktisk forskning (Kilpatrick, 2020; Niss et al., 2017). Matematisk kompetanse kan forstås som en vilje og evne til å ta i bruk matematikk for å håndtere utfordringer i ulike situasjoner (Blomhøj & Jensen, 2007). Etter hvert ble det utgitt flere rammeverk for matematisk kompetanse som har hatt stor innflytelse på forskningsfeltet og læreplaner rundt omkring i verden (Kilpatrick, 2020; Niss et al., 2017). Hensikten med disse rammeverkene var å utvide det tradisjonelle synet på at det å mestre matematikk, der det ble vektlagt å tilegne seg ferdigheter og kunnskap om matematiske begreper, prosedyrer og metoder. Man ønsket et mer nyansert syn, hvor det å mestre matematikk handler om å kunne *gjøre* matematikk– noe som gjerne er brutt ned til et sett med kognitive eller matematiske prosesser i rammeverkene (Kilpatrick, 2020; Niss et al., 2017). Et av disse rammeverkene ble utviklet gjennom det danske KOM-prosjektet (KOM = kompetencer og matematikk læring), ledet av Mogens Niss (Niss & Højgaard, 2019; Niss & Jensen, 2002). I dette rammeverket beskrives en helhetlig matematisk kompetanse (*mathematical competence*) gjennom åtte matematiske delkompetanser (*mathematical competencies*) (se figur 1). Et viktig poeng med delkompetansene er at de overlapper, noe som er illustrert med de overlappende kronbladene i blomsten i figur 1 (Niss & Højgaard, 2019). Dette betyr at når én av delkompetansene blir aktivisert, er det gjerne med støtte fra én eller flere av de andre delkompetansene. Formålet med KOM-rammeverket var å gi en helhetlig og dekkende beskrivelse av hva det vil si å utøve matematikk, og at rammeverket skulle danne et grunnlag for undervisning og læring i matematikkfaget (Niss & Højgaard, 2019).

KOM-rammeverket og de åtte delkompetansene har hatt innflytelse på læreplaner i en rekke land (Niss et al., 2017) og på utviklingen av tidligere rammeverk for matematikk i PISA-undersøkelsen (Niss, 2014). Dette kapittelet gir en gjennomgang av matematikkrammeverket for PISA 2022 og sammenlikninger rammeverket med matematisk kompetanse i KOM-rammeverket og i den norske læreplanen LK20. En slik sammenlikning kan belyse hvordan beskrivelsen av matematisk kompetanse i LK20 samsvarer med matematisk kompetanse i PISA 2022, og dermed også i hvilken grad matematikkresultatene fra PISA-undersøkelsen er relevant for norsk skole.



Figur 1. En visuell representasjon av de åtte matematiske delkompetansene i KOM-rammeverket. Tilpasset og oversatt fra Niss og Jensen (2002, s. 45)

Matematisk kompetanse og *mathematical literacy* i PISA

I PISA 2022 var matematikk hovedområde for tredje gang. Det ble utviklet et oppdatert rammeverk for matematikk, som var en videreutvikling av rammeverket fra PISA 2012, forrige gang matematikk var hovedområde. Rammeverkene i PISA er utviklet av ekspertgrupper for de ulike fagområdene og er basert på didaktisk forskningslitteratur (OECD, 2004, 2013, 2023a). Ekspertgruppa for matematikk er satt sammen av matematikkdidaktikere, matematikere og eksperter i prøveutvikling, teknologi og utdanningsforskning fra en rekke ulike land (for en oversikt over ekspertgruppa i matematikk for PISA 2022, se OECD (2023a, vedlegg C)). Mogens Niss har tidligere vært en del av ekspertgruppa i matematikk og var involvert i arbeidet med rammeverkene for 2003 og 2012. Mange av ideene fra arbeidet hans med KOM-rammeverket og de matematiske delkompetansene har spilt en viktig rolle i utviklingen av de tidligere PISA-rammeverkene (Niss, 2014).

Både i rammeverket for PISA 2022 og i tidligere rammeverk, har *mathematical literacy* blitt brukt som betegnelse på matematikken som måles i undersøkelsen (OECD, 2004, 2013, 2023a). Begrepet *mathematical literacy*

har blitt forstått og brukt på ulike måter i forskningslitteraturen, ofte uten en eksplisitt definisjon, men viser til evnen til å kunne ta i bruk matematisk kunnskap (Jablonka, 2003). Ifølge Niss og Jablonka (2014) ble den første eksplisitte definisjonen av *mathematical literacy* gitt i rammeverket for PISA 2000, en definisjon som i de senere PISA-rammeverkene har vært gjennom flere runder med små endringer. I rammeverket for PISA 2022 finner vi følgende definisjon av *mathematical literacy*:

(...) evnen til å resonnerer matematisk og å formulere, bruke og tolke matematikk for å løse problemer i mange forskjellige kontekster fra virkeligheten. Dette inkluderer begreper, prosedyrer, fakta og verktøy for å beskrive, forklare og forutsi fenomener. [*Mathematical literacy*] hjelper individer til å kjenne hvilken rolle matematikk spiller i verden og til å gjøre velbegrunnede vurderinger og avgjørelser som er nødvendige for å være konstruktive, aktive og reflekterte samfunnsborgere i det 21. århundre. (OECD, 2023a, s. 22, min oversettelse)

I denne definisjonen legges det vekt på å kunne bruke matematikk i forskjellige kontekster fra virkeligheten. Ifølge Niss (2015) er det nettopp denne avgrensningen til den virkelige verden som er forskjellen på *mathematical literacy* og matematisk kompetanse. *Mathematical literacy* vil si å kunne bruke matematikk i kontekster fra den virkelige verden, mens matematisk kompetanse vil si å kunne bruke matematikk både i den virkelige verden og innenfor matematikkens verden. Matematisk kompetanse vil blant annet innebære å kunne arbeide innenfor rene matematiske strukturer og utforske fenomener i matematikkens verden, som for eksempel irrasjonale tall som $\sqrt{2}$, og forstå rollen til aksiomer og bevis, noe som ikke er en del av *mathematical literacy* (Niss, 2014). Ifølge Niss (2014) kan *mathematical literacy* dermed forstås som en del av matematisk kompetanse, men matematisk kompetanse omfatter noe mer enn *mathematical literacy*. Niss (2014) viser hvordan KOM-rammeverket og de åtte delkompetansene har spilt en sentral rolle i tidligere matematikkrammeverk i PISA, både i rammeverket for 2003 og for 2012. I rammeverket for PISA 2012 er det beskrevet hvordan delkompetansene fra KOM-rammeverket, riktignok i en moderert versjon og omtalt som *fundamental mathematical capabilities*, er en del av *mathematical literacy* og må tas i bruk for å løse PISA-oppgavene (OECD, 2013). Delkompetansene fra KOM-rammeverket utgjør altså en viktig del av *mathematical literacy* i PISA.

Begrepet *mathematical literacy* lar seg ikke så enkelt oversette til norsk. I denne boka, og i tidligere norske PISA-rapporter (for eksempel i Jensen

et al., 2023; Kjærnsli & Jensen, 2016), er derfor begrepet matematisk kompetanse brukt synonymt med *mathematical literacy*. Begrepet matematisk kompetanse antyder ikke at PISA-undersøkelsen måler matematisk kompetanse slik det er beskrevet i for eksempel KOM-rammeverket, men framhever at matematikk handler om å kunne bruke matematikk i ulike sammenhenger. Dette er en utbredt forståelse av kompetansebegrepet, der kompetanse handler om å bruke kunnskaper og ferdigheter i ulike sammenhenger (Westera, 2001). For å framheve *literacy*-perspektivet vises det gjerne til at matematisk kompetanse i PISA handler om å bruke matematikk i virkelighetsnære kontekster. Dette gjelder både i PISA-rapportene og i andre publikasjoner.

I rammeverket for PISA 2022 er *mathematical literacy* strukturert i tre dimensjoner: matematiske prosesser, matematisk kunnskap og kontekster. De matematiske prosessene er knyttet til matematisk resonnering og til prosessene elevene må arbeide seg gjennom når de løser problemer. Matematisk kunnskap viser til det matematiske innholdet vi kan forvente at elevene har kunnskap om, mens kontekster viser til de ulike situasjonene og sammenhengene oppgavene er gitt i. Disse tre dimensjonene er nærmere beskrevet senere i kapitlet.

Matematisk kompetanse i LK20

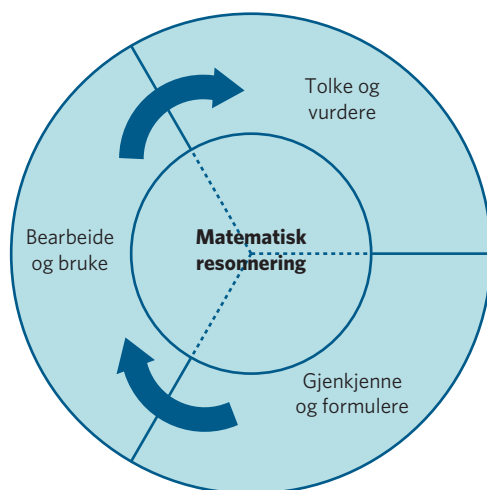
I Norge er det de nasjonale læreplanene som beskriver hva slags matematikk norske elever skal lære. Læreplanen (LK20) består av mange ulike deler, blant annet fagets relevans og verdier, kjerneelementer, kompetansemål, grunnleggende ferdigheter og tverrfaglige temaer (Kunnskapsdepartementet, 2019). Når vi leser de ulike delene, finner vi ikke bare beskrivelser av hva elevene skal lære i matematikkfaget, men også beskrivelser av hva matematikkfaget er, formålet med faget og fagets verdier. Ifølge Burkhardt (2014) er formålet med matematikkfaget ganske likt rundt om i verden: Elevene skal opparbeide seg en rekke matematiske ferdigheter og en dyp forståelse av matematiske begreper, og de skal kunne bruke dette til å løse forskjellige typer oppgaver og problemer i ulike kontekster. I den overordnede delen av LK20 finner vi en generell beskrivelse av kompetanse som gjelder på tvers av fag: «Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner» (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 11). Dette synet på kompetanse

likner på definisjonen av *mathematical literacy* i PISA ved at det å bruke kunnskaper og ferdigheter i ulike situasjoner er vektlagt, i tillegg til at et læringselement som går ut på å tilegne seg kunnskaper og ferdigheter, er inkludert. Kjerneelementer, som ble innført i LK20, beskriver det viktigste faglige innholdet og gjelder på tvers av trinn. Kjerneelementene skal bidra til en tydeligere sammenheng i faget gjennom hele utdanningsløpet. Disse kjerneelementene beskrives nærmere senere i kapittelet, hvor de sammenliknes med delkompetansene fra KOM-rammeverket og de matematiske prosessene i PISA-rammeverket.

Matematiske prosesser i PISA 2022

Problemløsning og matematisk modellering har alltid vært en sentral del av matematikkrammeverket i PISA (OECD, 2023a). Matematisk modellering handler om å forstå og løse problemer fra den virkelige verden ved hjelp av matematikk, og de matematiske prosessene er tett knyttet til dette. Modelleringscyklusen som brukes i PISA (figur 2), er en forenklet og idealisert beskrivelse av hvordan man jobber med matematisk modellering og problemløsning og bygger på tilsvarende sykluser fra forskningslitteraturen (se kapittel 4 av Berget et al. (2024) i denne boka for en grundigere beskrivelse av matematisk modellering og modelleringscyklusen). Situasjoner og problemer vi møter i livet, er gjerne rotete og uoversiktlige, og vi må forholde oss til og kunne skille mellom relevant og irrelevant informasjon. I slike tilfeller kan ikke situasjonen eller problemet overføres rett inn i en gitt formel eller løses med en standard framgangsmåte. En viktig del av matematisk kompetanse er å kunne omdanne problemer vi møter i ulike situasjoner og sammenhenger, slik at det er mulig å løse dem matematisk. Dette er representert ved den første prosessen i modelleringscyklusen i PISA, *Gjenkjenne og formulere*. Å omforme det opprinnelige problemet kan innebære å gjenkjenne matematiske sider og elementer (variabler) ved problemet, trekke ut relevant informasjon (og se bort ifra irrelevant informasjon) og gjøre hensiktsmessige forenklinger og antagelser. Denne omformingen resulterer i en matematisk modell som er en representasjon av virkeligheten. Slike matematiske modeller, eller representasjoner, kan ha mange ulike formater, som for eksempel en formel, likning, figur, tabell eller en algoritme. Etter at situasjonen eller problemet er representert matematisk, er det nødvendig å bruke matematisk kunnskap for å håndtere det matematiske problemet. Denne kunnskapen kan være

matematiske begreper, definisjoner, formler, framgangsmåter, algoritmer og verktøy. I PISA-rammeverket kalles denne prosessen *Bearbeide og bruke*. I PISA-rammeverket kalles denne prosessen *Bearbeide og bruke*. Dette innebærer å gjøre utregninger, manipulere uttrykk og likninger, analysere informasjon fra grafer og diagrammer, utvikle matematiske beskrivelser og forklaringer og bruke matematiske verktøy for å komme fram til et matematisk resultat. PISA-oppgaven i figur 9 er et eksempel på en oppgave knyttet til denne prosessen. Etter at man har kommet fram til et matematisk resultat, må dette overføres tilbake til den opprinnelige situasjonen og problemet. Denne prosessen kalles *Tolke og vurdere*. Dette innebærer å reflektere over, vurdere og tolke den matematiske løsningen i lys av konteksten. Er det matematiske resultatet en relevant og realistisk løsning på det opprinnelige problemet? Hvilke begrensninger bygger modellen og løsningen på? Figur 8 viser en PISA-oppgave knyttet til denne prosessen.



Figur 2. Modelleringszyklusen (problemløsningszyklusen) og de fire matematiske prosessene i PISA 2022. Tilpasset og oversatt fra OECD (2023a)

Mens disse tre modelleringsprosessene også var en del av rammeverket i 2012, er matematisk resonnering inkludert som en fjerde prosess i PISA 2022. Matematisk resonnering handler om å trekke logiske slutninger, vurdere situasjoner og velge strategier, og er en viktig del av matematisk modellering og problemløsning ved at det kan inngå i alle de tre ulike modelleringsprosessene (OECD, 2023a). I tillegg går matematisk resonnering ut over det å løse problemer fordi det også handler

om å legge fram argumenter, og å vurdere andres argumenter, tolkninger og påstander knyttet til matematiske løsninger og resultater (OECD, 2023a). Matematisk resonnering er beskrevet nærmere av Senneset og Pettersen (2024) i kapittel 5 i denne boka.

En endring fra 2012 til 2022 er at rammeverket ikke lenger inneholder en beskrivelse av delkompetansene (*fundamental mathematical capabilities*) fra KOM-rammeverket. Vi finner derimot at koplingen mellom prosesser og delkompetansene fra 2012-rammeverket er bevart i tabell 2.3 (OECD, 2023a, s. 45), men noe omformulert. I tillegg er beskrivelsene av de tre matematiske prosessene *Gjenkjenne og beskrive*, *Bearbeide og bruke* og *Tolke og vurdere* nesten identiske for PISA 2022- og 2012-rammeverkene (OECD, 2013, 2023a). Delkompetansene fra KOM-rammeverket spiller derfor fortsatt en viktig rolle for matematikk i PISA, selv om det ikke er like tydelig som i de tidligere rammeverkene.

Kjerneelementer i LK20

Figur 3 viser de seks kjerneelementene i matematikk i den norske læreplanen. Kjerneelementene er nesten identiske for læreplanen i matematikk på grunnskolen (MAT01-05) og for de ulike matematikkfagene på videregående, hvor det kun er beskrivelsen av «Matematiske kunnskapsområder» som er noe forskjellig på tvers av matematikkfagene. Videre i kapittelet er det læreplanen i matematikk for grunnskolen (1.–10. trinn) som brukes som utgangspunkt for sammenlikning og diskusjon.

Kjerneelementene i matematikk er relativt korte beskrivelser, som består av blant annet sentrale begreper, metoder, tenkemåter og kunnskapsformer. Beskrivelsene er ganske åpne, ved at det ikke gis noen tydelige definisjoner som forklarer hvordan de ulike begrepene skal forstås, men noen eksempler på hva kjerneelementet kan handle om i undervisningen. I kjerneelementet «Utforsking og problemløsning» kan vi for eksempel lese at «problemløsning i matematikk handler om at elevene utvikler en metode for å løse et problem de ikke kjenner fra før». I de neste delkapitlene sammenliknes kjerneelementene med de åtte delkompetansene i KOM-rammeverket og med prosessene i PISA-rammeverket. I tillegg sammenliknes grunnleggende ferdigheter i regning, og de fire ferdighetsområdene med PISA-prosessene. Regning er definert som en av fem grunnleggende ferdigheter i læreplanverket, og elevene skal utvikle de grunnleggende ferdighetene gjennom hele opplæringsløpet (Utdanningsdirektoratet, 2017).

Kjerneelementer (LK20)	Åtte delkompetanser (KOM-rammeverket)	Matematiske prosesser (PISA 2022)	Ferdighetsområder i regning som grunnleggende ferdighet (LK20)
Utforsking og problemløsning	Tankegangs-kompetanse	Gjenkjenne og formulere	Gjenkjenne og beskrive
Modellering og anvendelser	Problembehandlings-kompetanse	Bearbeide og bruke	Bruke og bearbeide
Resonnering og argumentasjon	Modellerings-kompetanse	Tolke og vurdere	Reflektere og vurdere
Representasjon og kommunikasjon	Resonnerings-kompetanse	Resonnere	Kommunisere
Abstraksjon og generalisering	Representasjons-kompetanse		
Matematiske kunnskapsområder	Symbol og formalisme-kompetanse		
	Kommunikasjons-kompetanse		
	Hjelpemiddel-kompetanse		

Figur 3. Oversikt over kjerneelementer og ferdighetsområder i læreplanen (Kunnskapsdepartementet, 2019), de åtte delkompetansene i KOM-rammeverket (Niss & Jensen, 2002) og matematiske prosesser i rammeverket for PISA 2022 (OECD, 2023a)

Sammenheng mellom kjerneelementer og delkompetanser

I beskrivelsene av kjerneelementene finner vi tydelige likhetstrekk med de åtte delkompetansene i KOM-rammeverket. *Problembehandlingskompetanse* finner vi igjen i kjerneelementet «Utforsking og problemløsning» ved at begge handler om å kunne løse matematiske problemer og utvikle metoder og strategier for dette. Vi finner også en forskjell i at problembehandlingskompetanse i KOM også legger vekt på å gjenkjenne og formulere matematiske problemer, noe vi ikke finner i beskrivelsen i kjerneelementet. Samtidig finner vi det å formulere problemer igjen i enkelte kompetansemål i LK20, som for eksempel «formulere og løse problemer fra sin egen hverdag som har med desimaltall, brøk og prosent å gjøre, og forklare egne tenkemåter» på 6. trinn. «Utforsking» i LK20 handler om å lete etter mønstre, finne sammenhenger og diskutere seg fram til en felles forståelse. En slik beskrivelse finner vi ikke igjen i KOM-rammeverket, noe som kan skyldes at dette i større grad handler om arbeidsmåter enn matematisk kompetanse.

Det er også store likhetstrekk mellom kjerneelementet «Modellering og anvendelser» og *modelleringskompetanse*, hvor begge handler om å vurdere

og lage matematiske modeller. Både kjerneelementet «Resonnering og argumentasjon» og *resonneringskompetansen* handler om å vurdere og forstå andres tankerekker samt utforme egne resonnementer og argumenter. I tillegg legger begge vekt på både formell resonnering og argumentasjon, som for eksempel å føre matematiske bevis, og på mer uformell resonnering, som for eksempel å begrunne svar og beskrive framgangsmåter.

Videre har kjerneelementet «Representasjon og kommunikasjon» mange fellestrekk med *representasjonskompetanse* og *kommunikasjonskompetanse*. I KOM-rammeverket er det også kommentert at det er klare forbindelser mellom disse to kompetansene (Niss & Jensen, 2002). Både kjerneelementet og representasjonskompetansen legger vekt på å kunne velge og oversette mellom ulike matematiske representasjonsformer. Mens kommunikasjon i kjerneelementet kun er beskrevet som å bruke matematisk språk i samtaler, argumentasjon og resonnementer, finner vi at kommunikasjonskompetanse også handler om å kunne sette seg inn i og tolke andres kommunikasjon (skriftlig og muntlig). I LK20 finner vi spor av dette i kompetansemålene, for eksempel på 9. trinn hvor elever skal tolke og vurdere statistiske framstillinger og utforske hvordan framstilling av tall og data kan brukes for å fremme ulike synspunkter.

Kjerneelementet «Abstraksjon og generalisering» kan knyttes til *Symbol- og formalisme-kompetanse* ved at begge handler om å mestre det formelle matematiske språket. I kjerneelementet innebærer abstraksjon å gradvis ta i bruk formelt symbolspråk og formelle resonnementer, mens generalisering handler om å oppdage sammenhenger og strukturer og formalisere dette med algebra og representasjoner. Dette finner vi igjen i *Symbol- og formalismekompetanse*, som handler om å oversette mellom matematisk symbolspråk og naturlig språk, og å «kunne behandle og betjene sig af symbolholdige udsagn og udtryk» (Niss & Jensen, 2002, s. 59) og formelle matematiske systemer. Abstraksjon og generalisering har også en tilknytning til *Tankegangskompetanse*, hvor sistnevnte involverer å

kunne udvide et begreb ved abstraktion af egenskaber i begrebet, i at kunne forstå hvad der ligger i generalisering af matematiske resultater, og selv at kunne generalisere sådanne til at omfatte en større klasse af objekter. (Niss & Jensen, 2002, s. 47)

«Matematiske kunnskapsområder» skiller seg litt fra de andre kjerneelementene ved at det beskriver viktige matematiske områder elevene må ha kunnskap om. Dette kunnskapsområdet blir beskrevet senere i kapitlet, under «Matematisk kunnskap i PISA og LK20».

Niss og Jensen (2002) skriver at én av begrunnelsene for å bruke KOM-rammeverket i matematikkfaget, er å få fram sammenhengene i faget og sikre at lærere på ulike trinn har en felles forståelse av hva elevene skal lære i matematikk. Ifølge Niss og Jensen (2002) er en av de store utfordringene med matematikkfaget nettopp at faget forstås og framstår veldig forskjellig på ulike klassetrinn, og at det er vanskelig å se at matematikk på for eksempel 1., 6. og 10. trinn er det samme faget. Innføringen av kjerneelementene i LK20, som skal vise sammenhenger på tvers av trinn og har mange likhetstrekk med KOM-rammeverket, vil derfor kunne sees på som et middel for å styrke en slik sammenheng og progresjon i faget.

I læreplanen er det ikke uttrykt eksplisitt at det er en kopling, eller at det er overlapp mellom de seks kjerneelementene, slik det er for de åtte delkompetansene i KOM. I beskrivelsene kan vi finne koplinger mellom enkelte kjerneelementer, for eksempel at kommunikasjon handler om å bruke matematisk språk i argumentasjon og resonneringer. Kjerneelementet «Matematiske kunnskapsområder» skiller seg ut ved at det er det eneste som eksplisitt er koplet til flere av de andre kjerneelementene.

Sammenheng mellom matematiske prosesser i PISA 2022 og LK20

De fire matematiske prosessene i modelleringssyklusen i PISA-rammeverket har tydelige koplinger til kjerneelementene «Utforskning og problemløsning», «Modellering og anvendelser» og «Resonnering og argumentasjon». Oppgavene i PISA krever at elevene selv må komme fram til strategier og framgangsmåter for å løse problemer de ikke kjenner fra før, som knytter seg til problemløsning slik det er beskrevet i kjerneelementet. Videre kan oppgavene i PISA ses i lys av kjerneelementet «Modellering og anvendelser», ved at oppgavene er gitt i virkelighetsnære kontekster for å måle i hvilken grad elevene mestrer å ta i bruk matematikk i ulike situasjoner utenfor matematikkens verden. Prosessene *Gjenkjenne og formulere*, *Bearbeide og bruke* og *Tolke og vurdere* i PISA-rammeverket, som beskriver ulike faser i matematisk modellering, utgjør derfor essensen av kjerneelementet «Modellering og anvendelser». Videre kan den fjerde prosessen i PISA-rammeverket, *Resonnering*, knyttes til kjerneelementet «Resonnering og argumentasjon». Selv om «argumentasjon» ikke er gitt i navnet på PISA-prosessen, finner vi i beskrivelsen i PISA-rammeverket

at resonnering også involverer argumentasjon, som for eksempel det å gi begrunnelser og vurdere andres tolkninger og påstander. Mens «Resonnering og argumentasjon» i LK20 spesifiserer at elevene skal bevise at framgangsmåter, resonnementer og løsninger er gyldige, nevnes ikke bevis (*proof*) i matematikkrammeverket i PISA 2022. I PISA vektlegges derimot det å kunne håndtere og kritisk vurdere all informasjonen vi som individer blir bombardert med, for å kunne ta velbegrunnede valg knyttet til personlige og samfunnsmessige spørsmål. Dette er ikke beskrevet i kjerneelementet i LK20, men kommer til uttrykk i beskrivelsen av kritisk tenkning under fagets relevans og sentrale verdier.

Kjerneelementer (LK20)	Matematiske prosesser (PISA 2022)
Utforsking og problemløsning	Gjenkjenne og formulere
Modellering og anvendelser	Bearbeide og bruke
Resonnering og argumentasjon	Tolke og vurdere
Representasjon og kommunikasjon	Resonnere
Abstraksjon og generalisering	
Matematiske kunnskapsområder	

Figur 4. De seks kjerneelementene i LK20 og de fire matematiske prosessene i PISA 2022

Det er også beskrivelser i de andre kjerneelementene som overlapper med rammeverket i PISA. Kjerneelementet «Representasjon og kommunikasjon» er til en viss grad inkludert i PISA ved at elevene må tolke, bruke og oversette mellom ulike matematiske representasjoner i oppgavene. I kjerneelementet omfatter representasjoner i tillegg verbale representasjoner og å bruke matematiske representasjoner i samtaler, noe som ikke er en del av PISA-undersøkelsen. I PISA er kommunikasjon redusert til å skrive relativt korte svar på oppgaver, mens i kjerneelementet beskrives kommunikasjon også som det å bruke matematisk språk i samtaler. Denne begrensningen av kommunikasjon i PISA kan forklares med rammebetingelsene for undersøkelsen, som en digital, skriftlig prøve som elevene

gjennomfører alene. Dette innebærer også at det å kunne samarbeide og diskutere med andre elever ikke er en del av PISA-undersøkelsen. I KOM-rammeverket er det å diskutere med andre om matematiske temaer en del av kommunikasjonskompetansen, og kjerneelementet «Utforsking og problemløsning» innebærer å diskutere seg fram til en felles forståelse. Også andre sider ved utforsking i LK20 er i liten grad til stede i PISA. Vi finner noe utforsking knyttet til datasimuleringer i PISA-rammeverket, hvor elevene skal utforske situasjoner med bruk av variabler og forstå hvilken betydning variablene har for utfallet av simuleringene (OECD, 2023a). Samtidig kan utforsking, slik det er beskrevet i læreplanen, forstås mer som en arbeidsmåte enn som en del av matematisk kompetanse, som nevnt tidligere. Abstraksjon beskrives i PISA-rammeverket som en del av det å resonnerer, for eksempel å finne likheter mellom matematiske objekter og bruke dette til å konstruere sammenhenger mellom objektene. Innholdet i noen av kjerneelementene er altså overlappende med noen av de matematiske prosessene i PISA-rammeverket, mens andre kjerneelementer finner vi spor av i større eller mindre grad.

Hvis vi sammenlikner PISA-rammeverket med de grunnleggende ferdighetene i regning (figur 9), finner vi en enda tydeligere kopling. Grunnleggende ferdigheter i regning handler om å kunne bruke matematikk i en rekke ulike kontekster (Utdanningsdirektoratet, 2017), som samsvarer med definisjonen av *mathematical literacy* i PISA. Når vi ser på tre av ferdighetsområdene i rammeverket for regning: *Gjenkjenne og beskrive*, *Bruke og bearbeide* og *Reflektere og vurdere*, er dette beskrivelser av ulike steg i en modelleringsprosess som langt på vei samsvarer med de tre modelleringsprosessene i PISA-rammeverket: *Gjenkjenne og formulere*, *Bearbeide og bruke* samt *Tolke og vurdere* (figur 5).

Ferdighetsområder i regning som grunnleggende ferdighet (LK20)	Matematiske prosesser (PISA 2022)
Gjenkjenne og beskrive	Gjenkjenne og formulere
Bruke og bearbeide	Bearbeide og bruke
Reflektere og vurdere	Tolke og vurdere
Kommunisere	Resonnerer

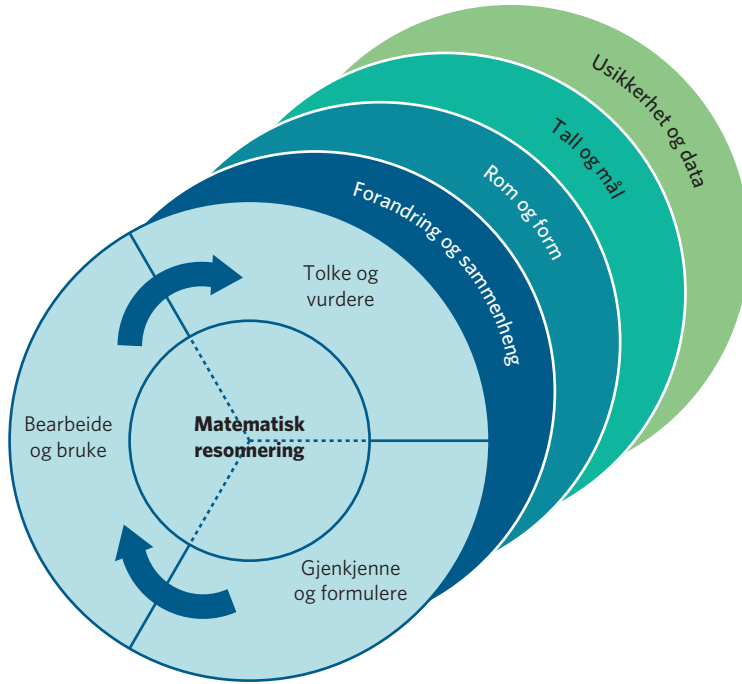
Figur 5. De fire ferdighetsområdene i regning som grunnleggende ferdighet i LK20 og de fire matematiske prosessene i PISA 2022

Ut fra dette er det tydelig at de matematiske prosessene i PISA-rammeverket, som elevene tar i bruk for å løse oppgavene i prøven, er svært relevante sett i lys av LK20. PISA-rammeverkets vektlegging av det å bruke matematikk til å løse virkelighetsnære problemer, med de fire tilhørende matematiske prosessene, overlapper med matematisk kompetanse i LK20 både ved at de inngår i kjerneelementene og at de i stor grad samsvarer med regning som grunnleggende ferdighet. Samtidig ser vi at det er elementer i den norske læreplanen i matematikk som ikke har en like tydelig rolle i PISA-rammeverket. Når vi sammenlikner den matematiske kompetansen som beskrives gjennom kjerneelementene og regning som grunnleggende ferdighet med prosessene knyttet til problemløsning og resonnering i PISA 2022, finner vi altså at deler av den matematiske kompetansen i læreplanen ikke er en del av PISA-undersøkelsen.

Matematisk kunnskap i PISA og LK20

I KOM-rammeverket er det et viktig poeng at det matematiske innholdet må utgjøre grunnmuren i mesteparten av matematikkundervisningen, og at elevene utvikler de åtte delkompetansene når de arbeider med konkret matematisk innhold (Niss & Jensen, 2002). Tilsvarende påpekes det i PISA-rammeverket at resonnering og problemløsning krever at elevene kan hente fram og bruke matematisk kunnskap og forståelse (OECD, 2023a, s. 34). Matematisk innhold og kunnskap er altså en viktig del av matematisk kompetanse.

I PISA-rammeverket er den matematiske kunnskapen som oppgavene bygger på delt inn i fire kategorier: «Forandring og sammenheng» (*change and relationship*), «Rom og form» (*space and shape*), «Tall og mål» (*quantity*) og «Usikkerhet og data» (*uncertainty and data*). Figur 6 illustrerer at de matematiske prosessene i PISA utspiller seg i sammenheng med disse kategoriene, det vil si at elevene må hente fram matematisk kunnskap når de arbeider med problemløsning og matematisk resonnering. Inndelingen i disse fire kategoriene tar utgangspunkt i overordnede matematiske ideer som brukes til å beskrive, forstå og tolke verden rundt oss og skal dekke de viktigste typene oppgaver elevene møter i grunnskolen (Stacey & Turner, 2015). Inndelingen i fire kategorier gjør det også mulig å oppnå tilstrekkelig antall oppgaver innenfor hver kategori, slik at man kan rapportere resultater for hver av kategoriene.



Figur 6. De fire kategoriene med matematisk kunnskap i PISA-rammeverket og sammenhengen med de matematiske prosessene. Tilpasset og oversatt fra OECD (2023a)

I de tidligere PISA-rammeverkene har de fire kategoriene blitt omtalt som «overarching ideas» (OECD, 2004, 2013). Kategoriene skiller seg fra den tradisjonelle inndelingen vi kjenner fra tidligere læreplaner (LK06) og lærebøker, som for eksempel tallforståelse, geometri, algebra, funksjoner og statistikk, som bygger på disipliner eller grener innenfor matematikken. Mange matematikdidaktikere (se for eksempel Charles, 2005) har argumentert for at den tradisjonelle inndelingen er uheldig for matematikkfaget fordi den gir en uklar kopling mellom matematikken og verden rundt oss og skjuler mange av sammenhengene som finnes på tvers i matematikken. Inndelingen i overordnede ideer, som vi finner blant annet i PISA, er ment å tydeliggjøre sammenhengene i faget (Stacey & Turner, 2015). I PISA-rammeverket vises det til alternative måter å organisere matematikkfaget på, blant annet legger Steen (1990) fram fem dype matematiske ideer (dimensjon, kvantitet, usikkerhet, form og forandring) (OECD, 2023a). Det viktige her er ikke hvilke ideer som utgjør de ulike kategoriene, men å bryte med den tradisjonelle horisontale og lagvise

inndelingen av matematikkfaget og lage en inndeling med en tydeligere vertikal sammenheng som får fram mønstrene som finnes på tvers av områder i matematikken (Steen, 1990).

I PISA-rammeverket beskrives *forandring og sammenheng* som koplinger mellom objekter og hendelser vi finner i verden rundt oss, både kortvarige og permanente. Disse koplingene følger ofte mønstre, som i befolkningsvekst, vekst hos organismer, årstider og værmønstre. Forandringer kan være diskrete eller kontinuerlige, skje over tid eller henge sammen med endringer i andre objekter. Matematiske modeller brukes for å beskrive disse forandringene og sammenhengene. Matematisk kompetanse innebærer å lage passende modeller med funksjoner og likninger, samt å lage, tolke og oversette mellom symbolske og grafiske representasjoner.

Rom og form omfatter fenomener i vår visuelle og fysiske verden. Vi er opptatt av å oppdage forskjeller og likheter mellom objekter, analysere egenskaper ved former og gjenkjenne former i ulike representasjoner (Steen, 1990), enten synlige former vi kan se og ta på, eller abstrakte former som for eksempel firedimensjonale terninger. Rom og form er ikke bare knyttet til geometri, men også til måling og algebra. Vi bruker geometriske representasjoner og egenskaper, målinger og funksjoner for å beskrive rom og form, og i mange tilfeller er det nødvendig med digitale verktøy som geometrisk programvare og GPS. Matematisk kompetanse innebærer forståelse av perspektiv, kartlesing, omforming av former og konstruksjon av representasjoner, både med og uten teknologi.

Tall og mål. Menneskets «trang» til å telle og måle er viktig for vår forståelse av verden og vår intellektuelle utvikling. Situasjoner, ting og egenskaper rundt oss kan ofte kvantifiseres. Dette krever forståelse av måling, telling, størrelsesordener, enheter, relative størrelser og numeriske mønstre. Kvantifisering hjelper oss å utforske forandringer, beskrive rom og form samt tolke data. Matematisk kompetanse innen tall og mål handler om å bruke tall og operasjoner (som for eksempel addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon) i ulike situasjoner. Dette inkluderer tallforståelse, hensiktsmessige beregninger, hoderegning og vurdering av resultatets gyldighet.

Usikkerhet og data. Variasjon og usikkerhet er viktige begreper i vitenskap, teknologi og hverdagsliv, innenfor en rekke ulike områder, som for eksempel økonomiske prognoser, værmeldinger og meningsmålinger. Dette handler om å forstå og måle variasjon, vurdere usikkerhet og

feilkilder samt og forstå hvordan dette påvirker slutninger og konklusjoner. Statistikk og sannsynlighet brukes til å beskrive, modellere og tolke fenomener med variasjon, samt trekke konklusjoner. Når flere variabler varierer sammen, kan dette skape betingete sannsynligheter som påvirker valg og beslutninger. For å løse problemer innenfor denne kategorien er det nødvendig med kunnskap om tall og algebra, blant annet om grafiske og symbolske representasjoner.

Matematiske kunnskapsområder (LK20)	Matematisk kunnskap (PISA 2022)
Algebra	Forandring og sammenheng
Funksjoner	Rom og form
Geometri	Tall og mål
Tall og tallforståelse	Usikkerhet og data
Statistikk og sannsynlighet	

Figur 7. Oversikt over temaene som er eksplisitt nevnt innenfor kjerneelementet matematiske kunnskapsområder i LK20 (Kunnskapsdepartementet, 2019) og over de fire kategoriene med matematisk kunnskap i PISA 2022-rammeverket (OECD, 2023a)

I LK20 finner vi beskrivelsen av de viktigste områdene elevene skal ha kunnskap om i kjerneelementet «Matematiske kunnskapsområder». Her vises det til områdene tall og tallforståelse, algebra, funksjoner, geometri, statistikk og sannsynlighet (figur 7). I KOM-rammeverket finner vi en tilsvarende liste med ti matematiske områder: *Talområdene*, *Aritmetikk*, *Algebra*, *Geometri*, *Funksjoner*, *Sandsynlighet*, *Statistikk* og *Diskret matematikk* (som inneholder blant annet kombinatorikk, klassisk tallteori, grafer og algoritmer) (Niss & Jensen, 2002). Det er altså stort overlapp mellom kunnskapsområdene i LK20 og KOM-rammeverket. Selv om inndelingen i kunnskapsområder er ulik i PISA og LK20, er det en sammenheng mellom temaer vi finner knyttet til kategoriene i PISA-rammeverket og områdene som er listet opp i kjerneelementet i LK20. Oppgavene innenfor *Tall og mål* er ofte knyttet til temaer i området tall og tallforståelse, *Forandring og sammenheng* har en tilknytning til temaer i områdene algebra og funksjoner, *Rom og form* har fellestrekk med temaer innenfor geometri, og *Usikkerhet* kan knyttes til statistikk og sannsynlighet (OECD, 2023a; Stacey & Turner, 2015).

I tidligere læreplaner i matematikk i Norge, har denne typen matematiske områder hatt en mer framtrædende rolle. For eksempel i den

forrige læreplanen, LK06, var matematikkfaget strukturert i såkalte hovedområder. På 8.–10. trinn var hovedområdene «Tall og algebra», «Geometri», «Måling», «Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk» og «Funksjoner» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Det er altså langt på vei de samme områdene som er beskrevet i kjerneelementet i LK20, med unntak av hovedområdet «Måling». Denne typen inndeling i temaer og områder er fortsatt vanlig i lærebøker, også etter overgangen til LK20 (se for eksempel Kongsnes, 2021). Ifølge Højgaard (2024) kan det å legge vekt på denne typen kjerneelementer, som vi finner i LK20, være et middel for å unngå et overdrevent fokus på temaer og områder som elevene skal lære i matematikkfaget. Højgaard (2024) bruker begrepet «pensumitis» (Højgaard, 2009) om en overbevisning om at å mestre et fagområde er det samme som å mestre det spesifikke faginnholdet, og at denne overbevisningen påvirker alt fra undervisningen til lærebøker og læreplanen. Med et slikt syn vil framgangsmåten for å lære matematikk handle om å liste opp faginnholdet så tydelig som mulig, i en rekke biter i håndterlig størrelse, og undervise og øve på hver bit til eleven mestrer dem (Schoenfeld, 1992). I KOM-rammeverket er det påpekt at det ikke må være en overdrevet detaljert oppdeling i delområder og temaer, fordi dette kan føre til «pensumfiksering» (Niss & Jensen, 2002). En konsekvens av dette kan være at det ikke blir prioritert å se sammenhenger på tvers av temaer eller å gå i dybden på noe av innholdet (Højgaard, 2024). Matematikkfaget i USA på 1990-tallet, som Schmidt (1997) beskrev som «a mile wide and an inch deep», er et eksempel på dette. Når de matematiske områdene nå har fått en mindre framtrædende rolle i LK20 enn i tidligere læreplaner, og kjerneelementene løftes fram med en tydelig kopling til delkompetansene i KOM, er dette i tråd med flere beskrivelser av matematisk kompetanse vi finner i forskningslitteraturen (Kilpatrick, 2020).

Kontekster for problemløsning i PISA 2022

En viktig del av matematikken i PISA handler om at elevene skal kunne bruke kunnskaper og ferdigheter i matematikk til å håndtere og løse problemer utenfor matematikkens verden. Begrepet *kontekst* viser til verden utenfor matematikken og hva slags «omgivelse» problemet er gitt i. Konteksten kan ha betydning for hvilke strategier og matematiske representasjoner som er hensiktsmessige å bruke for å løse problemet.

Kontekstene i PISA skal være relevante for 15-åringene og dekke et bredt spekter av elevenes interesser. Matematikkoppgavene i PISA er kategorisert i fire ulike typer kontekster: personlige, yrkesrelaterte, sosiale/samfunnsmessige og vitenskapelige. *Personlige* kontekster vil si aktiviteter og situasjoner som er knyttet til det daglige livet til eleven (familielivet eller til jevnaldrende). Eksempler på personlige kontekster er matlaging, spill, reise og (personlig) helse. *Yrkesrelaterte* kontekster er knyttet til arbeidslivet og ulike yrker. Eksempler på kontekster i denne kategorien er måling, kostnadsberegning og bestilling av materialer, regnskap, planlegging og design. *Samfunnsmessige* kontekster handler om samfunnet og fellesskapet, enten lokalt, nasjonalt eller globalt. Selv om man kan være personlig involvert i dette, har oppgavene i denne kategorien et samfunnsmessig perspektiv. Eksempler på dette er offentlig transport, demografi, helse, reklame og statistikk. *Vitenskapelige* kontekster handler om bruk av matematikk for å forstå den verden vi lever i og er knyttet til temaer innenfor vitenskap og teknologi. Slike kontekster kan for eksempel være knyttet til vær og klima, medisin, genetikk og målinger. PISA-oppgavene i figur 8 og 9 er eksempler på oppgaver i en vitenskapelig kontekst.

Matematikkoppgavene i PISA 2022

Figur 8 og 9 viser to av matematikkoppgavene som var med i PISA 2022 og som har blitt friggitt i etterkant av gjennomføringen. De to oppgavene er en del av den samme oppgaveenheten («Solsystemet»), som vil si at de er satt i den samme konteksten. I denne oppgaveenheten er også informasjonen som er gitt til høyre i oppgaven, den samme for de to oppgavene.


I den første oppgaven (spørsmål 1 / figur 8) skal elevene finne ut hvilke tre planeter som har de gjennomsnittlige avstandene som er vist i modellen til venstre. For å finne det ut må elevene bruke informasjonen i tabellen til høyre, og de svarer på oppgaven ved å dra planetene til de stiplede sirklene. Riktig svar, fra venstre til høyre, er Jupiter, Saturn og Uranus. Denne oppgaven er vurdert innenfor prosessen tolke og vurdere, fordi elevene må tolke modellen til venstre og skjønne at tallene 4,38 AU og 9,62 AU viser differansen mellom de gjennomsnittlige avstandene fra sola for to og to planter. Videre er den matematiske kunnskapen oppgaven bygger på, kategorisert som «Tall og mål», mens konteksten er kategorisert som vitenskapelig.

PISA 2022

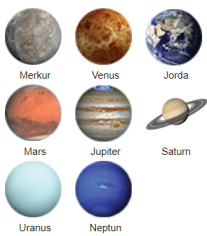
Solsystemet
Spørsmål 1 / 2

Les "Solsystemet" til høyre. Svar på spørsmålet ved å bruke dra og slipp.

Modellen nedenfor viser de gjennomsnittlige avstandene mellom tre planeter. (Planetene og modellen er ikke i riktig målestokk.)



Ut ifra avstandene som er oppgitt, hvilke av planetene passer inn i modellen? Dra de tre riktige planetene til riktig plass. For å endre et svar, må du først dra den forrige planeten ut.



SOLSYSTEMET

Tabellen nedenfor viser den gjennomsnittlige avstanden mellom sola og de følgende planetene i astronomiske enheter (AU).
1 AU er omtrent 150 millioner kilometer.

Planet	Gjennomsnittlig avstand fra sola i AU
Merkur	0,39
Venus	0,72
Jorda	1,00
Mars	1,52
Jupiter	5,20
Saturn	9,58
Uranus	19,20
Neptun	30,05

Figur 8. Fritt matematikkoppgave fra PISA 2022, oppgave 1 innenfor oppgaveenheten «Solsystemet»

PISA 2022

Solsystemet
Spørsmål 2 / 2

Les "Solsystemet" til høyre. Svar på spørsmålet ved å klikke på et av alternativene.

Omtrent hvor mange millioner kilometer fra sola er planeten Neptun, i gjennomsnitt?

5 millioner km
 30 millioner km
 180 millioner km
 4500 millioner km

SOLSYSTEMET

Tabellen nedenfor viser den gjennomsnittlige avstanden mellom sola og de følgende planetene i astronomiske enheter (AU).
1 AU er omtrent 150 millioner kilometer.

Planet	Gjennomsnittlig avstand fra sola i AU
Merkur	0,39
Venus	0,72
Jorda	1,00
Mars	1,52
Jupiter	5,20
Saturn	9,58
Uranus	19,20
Neptun	30,05

Figur 9. Fritt matematikkoppgave fra PISA 2022, oppgave 2 innenfor oppgaveenheten «Solsystemet»

I den andre oppgaven i «Solsystemet» (spørsmål 2 / figur 9) skal elevene bestemme omtrent hvor langt fra sola planeten Neptun er. Her må elevene lese av riktig verdi i tabellen til høyre (30,05 AU) og bruke informasjonen som er gitt i oppgaven til å gjøre om fra AU til millioner kilometer. Riktig svar er 4500 millioner km. Oppgaven er knyttet til prosessen «Bearbeide og bruke», fordi elevene må bruke sin matematiske kunnskap til å finne ut hvordan de skal regne ut avstanden i millioner kilometer. Også denne oppgaven er kategorisert som «Tall og mål» og som en vitenskapelig kontekst.

Matematikkoppgavene som inngår i PISA-undersøkelsen, er utviklet ut fra beskrivelsen av matematisk kompetanse og de tre dimensjonene i PISA-rammeverket. For at undersøkelsen skal kunne gi et godt mål på kompetansen, må oppgavene være fordelt utover de ulike matematiske prosessene, kunnskapskategoriene og kontekstene i rammeverket. I tillegg må undersøkelsen bestå av oppgaver med ulik vanskegrad som reflekterer spredningen i den matematiske kompetansen blant 15-åringer. Fordelingen av oppgavene i PISA 2022 utover prosesser, kunnskapskategorier og kontekster er vist i tabell 1.

Tabell 1. Fordelingen av oppgaver utover de matematiske prosessene, kunnskapskategoriene og kontekstene i PISA (OECD, 2023b, Vedlegg A)

Matematisk prosess	Matematisk kunnskap	Kontekst
Gjenkjenne og formulere (21 %)	Forandring og sammenheng (24 %)	Personlig (26 %)
Bearbeide og bruke (32 %)	Rom og form (18 %)	Yrkesrelatert (21 %)
Tolke og vurdere (24 %)	Tall og mål (32 %)	Samfunnmessig (23 %)
Matematisk resonnering (23 %)	Usikkerhet og data (26 %)	Vitenskapelig (30 %)

For å kunne måle endringer over tid er det mange av oppgavene som brukes igjen i flere undersøkelser, såkalte trend-oppgaver. I PISA 2022 bestod undersøkelsen av 234 matematikkoppgaver, 160 nye og 74 trend-oppgaver. Mens trend-oppgavene i utgangspunktet ble utviklet for den papirbaserte prøven i PISA 2012, har de nye oppgavene blitt utviklet til et digitalt prøveformat. Det betyr at det også ble utviklet interaktive oppgaver, blant annet hvor elevene skal bruke datasimuleringer og regneark (OECD, 2023b). I forbindelse med inkluderingen av matematisk resonnering i rammeverket, ble det også utviklet mange oppgaver til denne prosessen. I tillegg ble det gjort nye vurderinger av kategoriseringen av trend-oppgavene, som medførte at noen av disse ble om-kategorisert som matematisk resonnering.

Oppsummering

PISA-undersøkelsen måler ikke alt som står i læreplanen for matematikkfaget i norsk skole. Elevenes evne til å samarbeide og utforske mønstre og sammenhenger sammen med andre er eksempler på viktige deler av matematikkfaget og matematisk kompetanse som ikke er en del av PISA-undersøkelsen. Det samme gjelder muntlig diskusjon, argumentasjon og presentasjon av matematikk. Det er også et viktig poeng at *mathematical literacy*, som PISA-undersøkelsen tar sikte på å måle, utgjør en betydelig del av, men ikke alt, innenfor matematisk kompetanse slik det er definert i forskningslitteraturen i for eksempel KOM-rammeverket. I tillegg er det viktig å presisere at PISA-undersøkelsen er utviklet for å *måle* elevenes evne til å bruke matematikk til å løse problemer i ulike virkelighetsnære situasjoner. Resultatene fra undersøkelsen gir lite informasjon om hvordan elevene skal *lære* seg dette.

Rammeverket for matematikk i PISA 2022 har likevel en tydelig tilknytning til beskrivelsene av matematisk kompetanse i KOM-rammeverket og i den norske læreplanen (LK20). Matematikk i PISA handler om å kunne ta i bruk matematikk i ulike virkelighetsnære situasjoner for å være rustet til å håndtere utfordringer i videre utdanning, arbeidsliv og privatliv. Dette er den samme siden ved kompetanse i matematikk som løftes fram i LK20. Problemløsning og matematisk modellering, som spiller en sentral rolle i PISA-undersøkelsen, finner vi igjen i kjerneelementene i matematikkfaget i LK20. I tillegg er det store likhetstrekk mellom matematikk i PISA og beskrivelsen av regning som grunnleggende ferdighet i læreplanen, hvor det å kunne bruke matematikk til å løse problemer i ulike situasjoner og sammenhenger står svært sentralt. Siden alle de matematiske prosessene og kunnskapskategoriene i PISA også inngår i LK20, tyder dette på at alt som testes i PISA, er relevant for matematikkfaget i norsk skole.

Med LK20, og innføringen av kjerneelementer og nedtoningen av innholdsområder, er likhetstrekkene mellom matematisk kompetanse i læreplanen og beskrivelsen av matematisk kompetanse – både i forskningslitteraturen og PISA-rammeverket – tydeligere enn de har vært for tidligere læreplaner. Ut fra dette kan man si at matematikkresultatene fra PISA-undersøkelsene vil fortsette å være svært relevante for norsk skole, også etter innføring av LK20.

Forfatterbiografi

Andreas Pettersen er forsker ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo. Han har en doktorgrad i matematikkdidaktikk og har jobbet med PISA-undersøkelsen siden 2017. Pettersen har utgitt flere artikler om matematikkdidaktikk og vært redaktør for boka *Equity, Equality and Diversity in the Nordic Model of Education* (utgitt på Springer i 2020).

Referanser

- Berget, Ingeborg, L., Løvgren, M. & Pettersen, A. (2024). Å kome i gang med matematisk modellering i klasserommet – kan PISA-oppgåver vise veg frå kaos til system i første del av modelleringsprosessen? I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 75–110). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch4>
- Blomhøj, M. & Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? I P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and applications in mathematics education* (s. 45–56). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_3
- Bringeland, T. A. (2022, 8. august). Er PISA-testene på vei ut? [Debattinnlegg]. *Dagsavisen*. <https://www.dagsavisen.no/debatt/2022/08/08/er-pisa-testene-pa-vei-ut/>
- Burkhardt, H. (2014). Curriculum design and systemic change. I Y. Li & G. Lappan (Red.), *Mathematics curriculum in school education* (s. 13–34). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7560-2_2
- Charles, R. I., & Carmel, C. A. (2005). Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school mathematics. *Journal of Mathematics Education*, 7(3), 9–24.
- Evans, J. (1999). Building bridges: Reflections on the problem of transfer of learning in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 23–44. <https://doi.org/10.1023/A:1003755611058>
- Gillespie, J. (2002). The integration of mathematics into vocational courses: Some issues and concerns. I A. Bessot & J. Ridgway (Red.), *Education for mathematics in the workplace* (s. 53–64). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47226-0_5
- Højgaard, T. (2009). Kompetencebeskrivelser og pensumitis i økonomi som undervisningsfag. I A. Lind, M. Achilles, J. D. Hansen & P. Henriksen, *Fagdidaktik i økonomifagene* (s. 20–28). Columbus.
- Højgaard, T. (2024). Competencies and fighting syllabusism. *Educational Studies in Mathematics*, 115, 459–479.
- Jablonka, E. (2003). Mathematical literacy. I A. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick & F. K.-S. Leung (Red.), *Second international handbook of mathematics education* (s. 78–102). Springer.
- Jensen, F., Pettersen, A., Frones, T. S., Eriksen, A., Løvgren, M. & Narvhus, E. K. (2023). *PISA 2022: Norske elever kompetanse i matematikk, naturfag og lesing*. Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/noasp.205>
- Kilpatrick, J. (2020). Competency frameworks in mathematics education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of mathematics education* (s. 85–87). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0>
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Red.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Research Council.

- Kjærnsli, M. & Jensen, F. (2016). *Stø kurs: Norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015*. Universitetsforlaget. <https://doi.org/10.18261/9788215027463-2016>
- Kongsnes, A. L. W. (2021). *Matemagisk 10*. Aschehoug undervisning.
- Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. <https://www.udir.no/lk20/overordnet-del>
- Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)*. <https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob>
- Niss, M. (2014). Mathematical competencies and PISA. I K. T. Stacey & R. Turner (Red.), *Assessing mathematical literacy: The PISA experience* (s. 35–55). Springer.
- Niss, M. (2015). Mathematical literacy. I S. J. Cho (Red.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education: Intellectual and attitudinal challenges* (s. 409–414). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_31
- Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R. & Villa-Ochoa, J. A. (2017). Conceptualisation of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research. I G. Kaiser (Red.), *Proceedings of the 13th international congress on mathematical education: ICME-13* (s. 235–248). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_15
- Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9–28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- Niss, M. & Jablonka, E. (2014). Mathematical literacy. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of mathematics education* (s. 391–396). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_100
- Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring – idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. The Ministry of Education.
- OECD. (2004). *The PISA 2003 assessment framework*. <https://doi.org/10.1787/9789264101739-en>
- OECD. (2013). *PISA 2012 assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. OECD Publishing. <http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en>
- OECD. (2023a). *PISA 2022 assessment and analytical framework*. <https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en>
- OECD. (2023b). *PISA 2022 Technical report*. <https://www.oecd.org/pisa/data/pisa2022technicalreport/>
- Schmidt, W. H. (1997). A splintered vision: An investigation of US science and mathematics education. Executive summary. *Wisconsin Teacher of Mathematics*, 48(2), 4–9.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 334–370). Macmillan.
- Senneset, M. & Pettersen, A. (2024). Hvordan argumenterer norske elever i matematikk i PISA 2022? I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 111–138). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch5>
- Stacey, K. & Turner, R. (2015). The evolution and key concepts of the PISA mathematics frameworks. I K. Stacey & R. Turner (Red.), *Assessing mathematical literacy: The PISA experience* (s. 5–33). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10121-7_1
- Steen, L. A. (1990). *On the shoulders of giants*. National Research Council. <https://doi.org/10.17226/1532>
- Straesser, R. (2000). Mathematical means and models from vocational contexts: A German perspective. I A. Bessot & J. Ridgway (Red.), *Education for mathematics in the workplace* (s. 65–80). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47226-0_6
- Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag*. <https://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf>
- Utdanningsdirektoratet. (2017). *Rammeverk for grunnleggende ferdigheter*. Hentet 6. juni 2024 fra <https://www.udir.no/laring-og-trivsel/rammeverk/rammeverk-for-grunnleggende-ferdigheter/>
- Westera, W. (2001). Competences in education: A confusion of tongues. *Journal of Curriculum Studies*, 33(1), 75–88. <https://doi.org/10.1080/00220270120625>

KAPITTEL 4

Å kome i gang med matematisk modellering i klasserommet – kan PISA-oppgåver vise veg frå kaos til system i første del av modelleringsprosessen?

Ingeborg Lid Berget Høgskulen i Volda

Maria Løvgren Universitetet i Oslo

Andreas Pettersen Universitetet i Oslo

Samandrag: Matematisk modellering handlar om å bruke matematikk til å løyse problem frå den verkelege verda. Resultat frå fleire studiar viser at den første delen av modelleringsprosessen, der problemet skal omsetjast til eit matematisk problem, er spesielt krevjande for elevar, og at matematikkoppgåver i liten grad utfordrar elevane i dette. I dette kapittelet presenterer vi eksempel på korleis matematisk modellering er framstilt i eit utval av litteratur om matematikkundervisning. Vidare gjer vi greie for utviklinga av eit analyseskjema som blir brukt for å undersøke kva for utfordringar elevane møter og ikkje møter i arbeid med modelleringsprosessen i PISA-oppgåver. Vi analyserer også to tidlegare gitte eksamensoppgåver for 10. trinn om matematisk modellering. I resultatane kjem det fram at PISA-oppgåvene berre utfordrar elevane i delar av *handlingane* i å *kjenne igjen og formulere* i PISA-rammeverket, særleg å kjenne igjen struktur, mønster og samanhengar, og å lage ein matematisk modell. Gjennom kapittelet gir vi eksempel på ulike typar modelleringsoppgåver og presenterer både frigitte PISA-oppgåver og andre oppgåver. Vidare argumenterer vi for at analyseskjemaet kan vere nyttig for matematikklærarar for å bidra til økt refleksjon og bevisstgjerjing om kva for utfordringar knytte til matematisk modellering elevane møter i ulike oppgåver.


Nøkkelord: Matematisk modellering, PISA, modelleringsssyklus, kjenne igjen og formulere, eksamensoppgåve, rekning som grunnleggande ferdigheit

Sitering: Berget, I. L., Løvgren, M. & Pettersen, A. (2024). Å kome i gang med matematisk modellering i klasserommet – kan PISA-oppgåver vise veg frå kaos til system i første del av modelleringsprosessen? I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (Kap. 4, s. 75–110). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch4>
Lisens: CC-BY 4.0

Abstract: In mathematical modelling, mathematics is used to solve real-world problems. Findings from multiple studies indicate that the initial phase of the modelling process, in which the problem is translated into a mathematical problem, is particularly challenging for students. Further, it seems that mathematical tasks often do not sufficiently challenge students in this part of the modelling process. In this chapter, we present examples of how mathematical modelling is presented in the research literature. We further elaborate on our development of an analysis scheme used to investigate the challenges that students encounter, and do not encounter, while working on the modelling process in PISA tasks. We also use the scheme to analyse two mathematical modelling exam tasks previously given to the 10th grade. The results reveal that only parts of the actions in the *formulate* process of the PISA framework are actually tested in the PISA tasks, particularly recognising structure, patterns and relationships, and, creating a mathematical model. Throughout the chapter, we put emphasis on providing examples of different types of modelling tasks, and present released PISA tasks and other tasks. Furthermore, we argue that the analysis scheme can be valuable for mathematics teachers to facilitate increased reflection and awareness about the challenges related to mathematical modelling encountered by students in various tasks.

Keywords: mathematical modelling, PISA, modelling cycle, formulate, exam task, numeracy as a basic skill

Eitt mål med matematikkundervisninga i skulen er at elevane skal kunne bruke kunnskapen og ferdigheitene dei utviklar i matematikkfaget til å handtere situasjonar og løyse problem dei møter i livet utanfor klasserommet (Kunnskapsdepartementet, 2019; Niss & Blum, 2020). Matematisk modellering i undervisninga handlar om nettopp dette: å bruke matematikk til å løyse slike problem som ein kan møte utanfor skulematematikken. Eit eksempel på eit problem som krev matematisk modellering, er å svare på spørsmålet «kva kostar det å ta ein dusj?» (sjå figur 1). Til skilnad frå meir tradisjonelle matematikkoppgåver krev denne og andre modelleringsoppgåver at ein må setje seg inn i og forstå problemet og omforme det til eit matematisk problem før ein kan arbeide matematisk og kome fram til eit svar. I oppgåva i figur 1 vil denne omforminga krevje at ein gjer forenklingar og avgrensingar, hentar inn relevant informasjon og strukturerer problemet ved å bestemme variablar og samanhengar mellom desse. Vidare kan ein lage ein matematisk modell som kan brukast til å rekne på kva det kostar å ta ein dusj. Løysinga ein kjem fram til, må vurderast, og sidan det ofte finst fleire løysingar på modelleringsoppgåver, er det viktig også å gjere greie for kva som ligg til grunn i utviklinga av den matematiske modellen. Å gjere greie for samanhengen og overgangen mellom den verkelege verda og den matematiske verda er ein sentral del av matematisk modellering. Vi kjem tilbake til oppgåva i figur 1 seinare i kapitlet.

<p>Les dette utdraget frå eit debattinnlegg i ei avis.</p> <p>Det koster ikke 30 kroner å dusje!</p> <p>Avisene ønsker å maksimere strømkrisen. Da er dusjing blitt et yndet tema. Dagsrevyen har innslag fra treningssentre som har kø i dusjen, fordi det koster 30 kr å dusje hjemme. Slike påstander sprer seg fort, særlig når ingen prøver å kvalitetssikre utregningene [...].</p> <p>https://www.aftenbladet.no/meninger/debatt/i/8QbEgE/det-koster-ikke-30-kroner-aa-dusje</p> <p>Oppgåva er å svare på dette spørsmålet:</p> <p>Kva kostar det å ta ein dusj?</p>	
---	--

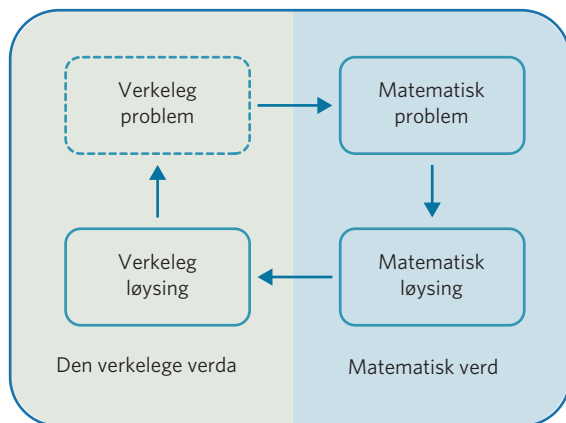
Figur 1. Eksempel på modelleringsoppgåve. Bildet er henta frå freepik.com

Matematisk modellering er ikkje noko nytt. Matematikk og matematisk kunnskap har alltid vorte brukt i ulike samanhengar for å forstå verda og løyse problem, både teoretiske og praktiske (Gjone, 1996). Dette har også lenge vore ein del av læreplanen i Noreg. For eksempel står det i mønsterplanen frå 1987 at undervisninga i matematikk skal ta sikte på «å utvikle kunnskapane og dugleikane til elevane slik at dei ser på matematikk som ein nyttig reiskap når dei skal løyse problem i dagleglivet og i yrkessamheng» (Kyrkje- og undervisningsdepartementet, 1987, s. 194). Samtidig har matematisk modellering fått ein større plass i matematikklæreplanane i fleire land dei siste tiåra, også i Noreg (Berget & Bolstad, 2019). I fagfornyninga av kunnskapsløftet (LK20) er matematisk modellering innført som eit eige kjerneelement, «modellering og anvendingar». Dette inneber at matematisk modellering skal vere ein sentral del av matematikkfaget gjennom heile grunnskulen og i vidaregåande opplæring. I tillegg spelar modellering ei viktig rolle i «rekning som grunnleggande ferdigheit» (Berget & Bolstad, 2019). Modellering er altså ikkje berre ein del av matematikkfaget, men skal vere ein del av undervisninga på tvers av fag i skulen. Også i internasjonale undersøkingar, slik som i PISA (Programme for International Student Assessment), spelar matematisk modellering ei sentral rolle, der elevane skal løyse problem formulerte i ulike praktiske kontekstar (OECD, 2023a).

I dette kapitlet skal vi sjå nærare på den første delen av modelleringsprosessen, nemleg overgangen frå den verkelege verda til den matematiske verda, og korleis ein kan angripe eit kaotisk kvardagsproblem som ikkje er forenkla eller strukturert. Med utgangspunkt i PISA-rammeverket og to andre skildringar av matematisk modellering har vi utvikla eit analyse-skjema for å konkretisere og vurdere kva for utfordringar som krevst for å omforme eit problem frå den verkelege verda til eit matematisk problem. Eit slikt verktøy kan vere nyttig for å gjere denne delen av matematisk modellering meir konkret, og det kan gjere oss meir bevisste på utfordringane elevar møter, og ikkje møter, i arbeidet med matematisk modellering. Vidare har vi brukt skjemaet til å analysere oppgåver gitt i PISA 2022 for å undersøke kva for utfordringar elevane møter i PISA-oppgåvene når dei skal gå frå ein situasjon i den verkelege verda til å uttrykke dette matematisk, og kva som kjenneteiknar desse oppgåvene. Til slutt analyserer vi to eksamensoppgåver for 10. trinn knytte til matematisk modellering for å vurdere kva utfordringar oppgåvene gir, og diskuterer dei i lys av resultatata i analysen av PISA-oppgåvene.

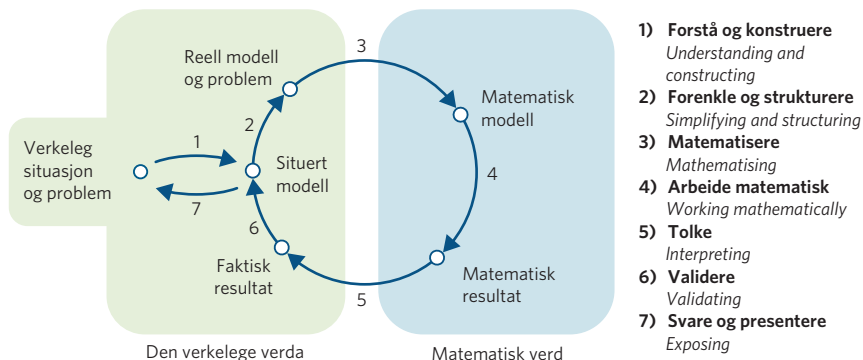
Modelleringsprosessen

Ein kan sjå på matematisk modellering som ein prosess der ein flyttar seg fram og tilbake mellom den verkelege verda og ei matematisk verd (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Ein kan framstille denne prosessen som vist i figur 2, der ein startar med eit verkeleg problem ein skal løyse (oppe til venstre i figuren).



Figur 2. Enkel framstilling av prosessen matematisk modellering. Inspirert av Blum (2015, s. 77)

Å gå frå verkeleg problem til matematisk problem blir kalla «å matematisere», mens forenklingane og struktureringane ein først gjer av det verkelege problemet, blir kalla «prematematisering» (Niss & Blum, 2020). Modelleringsprosessen er ofte framstilt som ein syklisk prosess med ulike delprosessar eller steg som ein jobbar seg gjennom for å løyse problem frå verkelegheita. Det er ikkje slik at elevar følgjer prosessen steg for steg, men dei kan hoppe fram og tilbake mellom dei ulike stega (Borromeo Ferri, 2018). Ulike modelleringssyklusar er utvikla for ulike føremål og speglar også at det finst litt ulike syn på kva matematisk modellering er (Kaiser, 2020). Modelleringscyklusen av Blum og Leiss (2007) (sjå figur 3) er eit anna eksempel på ei framstilling av modelleringsprosessen og har fleire steg enn den i figur 2. Modelleringscyklusen i figur 3 er uttrykt frå eit kognitivt perspektiv og skildrar prosessen eleven går gjennom i arbeidet med matematisk modellering.



Figur 3. Modelleringscyklus inspirert av Blum og Leiss (2007, s. 225)

I denne syklusen blir matematisk modellering presentert gjennom dei sju stega som er lista opp til høgre i figuren. Vi vil no forklare kvart av dei sju stega ved å ta føre oss oppgåva vi presenterte i figur 1, «Kva kostar det å ta ein dusj?».

Steg 1 er å forstå og konstruere ein situert modell, altså at elevane må etablere ei forståing av situasjonen. Dei må for eksempel vite at det kostar pengar å varme opp vatn, og at vi betaler straumrekning. Dei må vite at det er vanleg å ha varmtvasstank, og at kva type dusj, kor lenge ein dusjar og dermed mengda vatn, spelar inn på prisen. Det same gjer for eksempel temperaturskilnad på vatnet inn i varmtvasstanken og ut i dusjen, og straumprisen.

I steg 2 må elevane forenkle og strukturere. Dei må velje kva dei skal ta omsyn til, og gjere forenklingar. For eksempel kan dei gå ut frå ein spesifikk dusjtype og finne ut kor mykje vatn som går gjennom dusjhovudet per minutt. Dei kan gjere ei vurdering av ulike dusjtypar, slik som ein «sparedusj», der det blir brukt mindre vatn per tid. Her kan dei søke på internett og finne ut detaljar om ulike dusjhovud. Dei kan også samle empiri ved for eksempel å finne ut kor lang tid dei treng til å fylle ei 10 liters bøtte med ulike dusjar. Dei kan også bestemme seg for å føre statistikk og finne gjennomsnittstida elevane i klassa bruker i dusjen. Her kan læraren organisere erfaringsdeling mellom elevgruppene og vere til støtte i idémlydringsprosessen.

Steg 3, å matematisere, inneber å omforme den reelle modellen til eit matematisk språk (Blum & Leiss, 2007). Den matematiske modellen kan ha ulike variablar. Dersom elevane vel å setje opp ein funksjon, må dei kanskje forenkle med berre å la éin uavhengig variabel variere. For eksempel kan

det vere interessant å studere pris som funksjon av tid du dusjar. Då må elevane bruke konstantar på andre variablar, slik som straumpris og kor mykje vatn som blir brukt per minutt. Ut frå den matematiske modellen kjem dei etter steg 4, å arbeide matematisk, fram til eit matematisk svar. Å arbeide matematisk kan mellom anna inkludere å rekne, bruke hjelpemiddel, kritisk vurdere, overføre til andre representasjonsformer, resonnerer og utforske matematisk. I dusj-oppgåva vil dei kanskje nytte GeoGebra til å teikne grafen og lese av for nokre verdiar. Elevane må tolke den matematiske løysinga inn i den situerte modellen og gi det matematiske svaret meining i den praktiske konteksten (steg 5). Kva betyr punktet på grafen? Og kva fortel stigningstalet? Kva har det å seie for den praktiske situasjonen? Gir det meining?

Vidare vurderer elevane svara dei har fått i steg 6, og dei må i tillegg vurdere modellen sin. Kanskje vil dei heller la noko anna variere og for eksempel lage eit uttrykk for pris som funksjon av tid på døgnet dei dusjar (som er avhengig av korleis straumprisen varierer gjennom døgnet). Då endrar dei den matematiske modellen og må dermed gjere steg 3–6 på nytt. Til slutt må elevane gjere steg 7, der dei forklarar korleis forenklingane deira og vala dei gjorde, påverka svaret dei kom fram til. For eksempel at modellen berre er gyldig om føresetnadene stemmer, og at løysinga dei kjem fram til, kan diskuteras. Vidare kan dei bruke det dei kom fram til når dei deltar i diskusjonar om privatøkonomi og sparing, eller er kritiske til framstillingar i media.

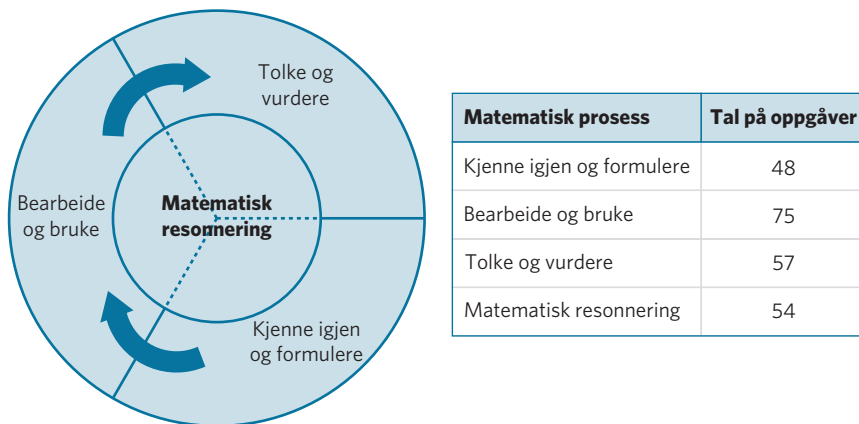
Modelleringscyklusar er først og fremst eit verktøy for å forstå matematisk modellering. I følgje Blum og Leiss (2007) er syklusen deira eigna for å hjelpe elevane til å ha eit meta-perspektiv på korleis dei arbeidar når dei modellerer. I tillegg får lærarar eit utgangspunkt for å identifisere kva elevane strevar med i modelleringsarbeidet, og kan dermed lettare hjelpe dei vidare. Ein fare ved å aktivt bruke ein slik syklus i modelleringsarbeidet med elevane kan vere at ein reduserer kreativt modelleringsarbeid til å fylgje ei fast oppskrift steg for steg. Vi vil derfor presisere at slike syklusar er meint som inspirasjon eller hjelp til meta-refleksjon, men ikkje som ei oppskrift på korleis ein skal jobbe med modellering. Frejd (2011) operasjonaliserte dei ulike delane av modelleringsprosessen for å kunne analysere eksamensoppgåver, og utvikla til saman 11 kategoriar og hjelpespørsmål basert på ein modelleringscyklus. Dette kan også vere ei hjelp for lærarar i arbeidet med å velje hensiktsmessige modelleringsaktivitetar i undervisninga. Vi kjem tilbake til Frejd (2011) si operasjonalisering seinare i kapitlet, når vi gjer greie for utviklinga av analyseskjemaet vårt.

Matematisk modellering i PISA

Formålet med PISA 2022 er å måle elevane si evne til å «resonnere matematisk og å formulere, bruke og tolke matematikk for å løyse problem i ulike verkelegheitsnære situasjonar» (OECD, 2023, s. 22, vår omsetjing). Denne vektlegginga av å løyse problem i ulike situasjonar gjer at matematisk modellering spelar ei sentral rolle i undersøkinga, der å *kjenne igjen og formulere (formulate)*, å *bearbeide og bruke (employ)* og å *tolke og vurdere (interpret)* viser til tre ulike steg i modelleringsprosessen som elevane må arbeide med for å løyse PISA-oppgåvene. Opne modelleringsoppgåver der ein er involvert i heile modelleringsprosessen, er ofte svært tidkrevjande å løyse, og utfordrande å vurdere i skriftlege prøver (Niss et al., 2007). Dette inkluderer også nasjonale matematikkeksamener i vidaregåande skule (Frejd, 2011). PISA-oppgåvene er ikkje utforma slik at elevane blir utfordra på heile modelleringsprosessen i kvar oppgåve. Kvar PISA-oppgåve involverer enkelte delar av prosessen slik at oppgåvene til saman avdekkjer kompetansen elevane har i matematisk modellering.

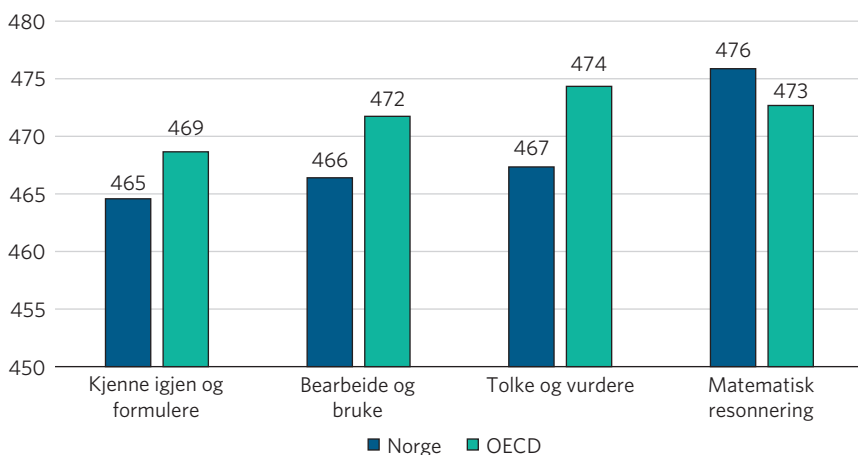
I PISA-rammeverket er prosessen illustrert gjennom ein modelleringssyklus (figur 4) med tre steg. Denne modelleringssyklusen er utvikla frå det som i tidlegare PISA-rammeverk vart kalla «mathematical modelling cycle» (OECD, 2013) og «mathematising cycle» (OECD, 2004). Modelleringssyklusen i PISA har mange fellestrekk med andre, men er mindre detaljert enn for eksempel syklusen, presentert i figur 3. Samanliknar ein dei to syklusane, finn ein at *kjenne igjen og formulere* inneheld stega 1) formulere og konstruere, 2) forenkla og strukturere og 3) matematisere. *Bearbeide og bruke* kan knytast til steg 4) arbeide matematisk, og *tolke og vurdere* inneheld stega 5) tolke og 6) validere. I tillegg kjem steg 7) svare og presentere.

Nytt i rammeverket for PISA 2022 er at *matematisk resonnering* er inkludert i tillegg til dei tre nemnde stega. *Matematisk resonnering* handlar mellom anna om å trekke slutningar, vurdere situasjonar, velje strategiar og utvikle løysingar, og er relevant i alle stega i modelleringssyklusen (OECD, 2023). I tillegg handlar *matematisk resonnering* om å kunne vurdere og legge fram argument og vurdere tolkingar og slutningar knytte til påstandar grunnlagt ved matematiske resultat, som går utover det å løyse problem (OECD, 2023). I dette kapitlet vil vi ikkje gå nærare inn på *matematisk resonnering*, men det kan du lese meir om i kapittel 5 av Senneset og Pettersen (2024) i denne boka.



Figur 4. Modelleringssyklusen i rammeverket for matematikk i PISA 2022. Figuren er tilpassa og omsett frå OECD (2023a). Tabellen til høgre viser kor mange oppgaver det totalt var i PISA 2022 knytte til kvar av prosessane

Kvar av oppgåvene i PISA er kategoriserte i dei fire matematiske prosessane ut frå kva som er mest sentralt for å løyse oppgåva. Tabellen til høgre i figur 4 viser kor mange av matematikkoppgåvene i PISA 2022 som er kategoriserte i dei ulike prosessane.



Figur 5. Resultata for norske elevar og for OECD-gjennomsnittet for dei tre modelleringstega og for matematisk resonnering i PISA 2022 (OECD, 2023b). Standardfeilen er mellom 2,2 og 2,5 for dei norske verdiane og mellom 0,4 og 0,5 for verdiane i OECD-gjennomsnittet

Figur 5 viser resultata i dei tre modelleringstega og i matematisk resonnering frå PISA 2022 for dei norske elevane og for gjennomsnittet blant

OECD-landa. På oppgåver innanfor å *kjenne igjen og formulere* presterte norske elevar på same nivå som OECD-gjennomsnittet, men lågare enn elevane i Danmark (485 poeng), Finland (482 poeng) og Sverige (474 poeng) (OECD, 2023b). Også i dei tre andre prosessane presterte norske elevar lågare enn elever i Danmark, Finland og Sverige. Norske elevar presterte på same nivå som dei islandske i *bearbeide og bruke*, og høgare i dei tre andre prosessane (OECD, 2023b).

Solsystemet
Spørsmål 1 / 2

Les "Solsystemet" til høgre. Svar på spørsmålet ved å bruke dra og slipp.

Modellen nedanfor viser dei gjennomsnittlege avstandane mellom tre planetar. (Planetane og modellen er ikkje i rett målestokk.)

4.38 AU 9.62 AU

Ut frå dei avstandane som er oppgitt, kva for nokre av planetane passar inn i modellen? Dra dei tre rette planetane til rett plass. For å endre eit svar må du først dra den fjerre planeten ut.

Merkur Venus Jorda
Mars Jupiter Saturn
Uranus Neptun

SOLSYSTEMET

Tabellen nedanfor viser den gjennomsnittlege avstanden mellom sola og planetane i vårt solsystem, oppgitt i astronomiske einingar (AU).
1 AU er om lag 150 millionar kilometer.

Planet	Gjennomsnittleg avstand frå sola i AU
Merkur	0,39
Venus	0,72
Jorda	1,00
Mars	1,52
Jupiter	5,20
Saturn	9,58
Uranus	19,20
Neptun	30,05

Solsystemet
Spørsmål 2 / 2

Les "Solsystemet" til høgre. Svar på spørsmålet ved å klikke på eit av alternativa.

Omrent kor mange millionar kilometer er det frå sola til planeten Neptun, i gjennomsnitt?

5 millionar km
 30 millionar km
 180 millionar km
 4500 millionar km

SOLSYSTEMET

Tabellen nedanfor viser den gjennomsnittlege avstanden mellom sola og planetane i vårt solsystem, oppgitt i astronomiske einingar (AU).
1 AU er om lag 150 millionar kilometer.

Planet	Gjennomsnittleg avstand frå sola i AU
Merkur	0,39
Venus	0,72
Jorda	1,00
Mars	1,52
Jupiter	5,20
Saturn	9,58
Uranus	19,20
Neptun	30,05

Figur 6. Frigitt oppgåve frå PISA 2022, «Solsystemet»

For at elevane skal bli testa i kva grad dei klarer å bruke matematiske kunnskapar og ferdigheiter til å løyse problem frå verkelegheita, er alle oppgåvene i PISA-undersøkinga knytte til ein kontekst. I figur 6 viser vi eit eksempel på to frigitte PISA-oppgåver frå 2022 som er plasserte i ein vitenskapelig (scientific) kontekst. Den første oppgåva (til venstre i figur 6) er kategorisert under prosessen *tolke og vurdere*, mens oppgåve to (til høgre)

er knytt til prosessen *bearbeide og bruke*. Mange av PISA-oppgåvene er utforma som fleirvalsoppgåver slik som denne, men det er også oppgåver med opne svarfelt (eksempel på slike opne oppgåver kan du sjå i Senneset og Pettersen (2024), kapittel 5 i denne boka).

I oppgåve 1 i figur 6 får elevane presentert ein modell som viser avstanden mellom tre planetar. For at elevane skal svare på spørsmålet, må dei tolke denne modellen, som kan vere ei noko uvanleg framstilling for elevane, og forstå korleis dei kan bruke informasjonen i tabellen til å kome fram til desse avstandane. Dette er knytt til prosessen *tolke og vurdere*. I oppgåve 2 skal elevane gjere omrekning mellom einingar for å svare på oppgåva, altså *bearbeide og bruke* matematikk. Rammevilkåra i PISA gjer som nemnt at det ikkje er med fullstendige modelleringsoppgåver som testar heile prosessen (OECD, 2013), men oppgåvene er altså knytte til eitt av dei tre stega i modelleringsprosessen.

I PISA-rammeverket er kvar av dei tre stega i modelleringsprosessen skildra med fleire ulike *handlingar (actions)*. Desse *handlingane* skildrar kva oppgåvene innanfor kvart steg kan krevje av elevane, og er på den måten ei hjelp til å konkretisere ulike handlingar som er venta. I éi oppgåve kan det vere nødvendig å gjennomføre éi eller fleire av desse *handlingane*. Eitt eksempel på ei slik *handling* for steget *kjenne igjen og formulere* er å «omsetje eit problem til ein vanleg matematisk representasjon eller algoritme» (OECD, 2023, s. 45, vår omsetjing). Slike konkrete skildringar hjelper oss å få tak på kva utfordringar som møter elevane i modelleringsoppgåver, og kan derfor vere nyttige å kjenne til for å kunne legge til rette for undervisning av matematisk modellering i klasserommet. Vi vil presentere eksempel på slike *handlingar* seinare i kapitlet.

Matematisk modellering i undervisninga

I læreplanen LK20 er *modellering og anvendingar* eitt av seks kjerneelement. I dette kjerneelementet er ein matematisk modell definert som ei beskriving av verkelegheita i matematisk språk, og modellering handlar om å lage slike modellar (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2). *Anvendingar* «handlar om at elevane skal få innsikt i korleis dei skal bruke matematikk i ulike situasjonar, både i og utanfor [matematikk]faget» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3). Rekning som grunnleggande ferdigheit er også knytt til matematisk modellering, og dei ulike ferdigheitsområda i rammeverket for rekning som grunnleggande ferdigheit har ein sterk samanheng med ulike steg i modelleringsprosessen (Bolstad, 2020). Rekning er ei av dei fem grunnleggande

ferdigheitene som elevane skal utvikle gjennom heile opplæringsløpet, og som skal gjennomsyre alle faga i skulen. Omgrepet modellering blir også eksplisitt brukt i kompetansemål og vurdering på ulike trinn, i tillegg finn ein kompetansemål som kan knytast til ulike delar av modelleringsprosessen utan at ordet modellering blir brukt (Bolstad, 2020).

Oppgåve 8

Sjå eksamensinformasjon s.2 for tips om korleis du kan vise kompetanse i oppgåve 8. **Bruk tabellen og utsegnene nedanfor til å vise din kompetanse innan modellering og anvending.**

Therese er 16 år, og skal kjøpe ein brukt mopedbil. Ho planlegg å eige bilen i to år.

Informasjon	Pris
Mopedbilen	83 600 kr
Omregistrering	600 kr
Ansvarsforsikring	4 000 kr/år
Førarkort, minimumspakke	11 990 kr
Ekstra køyretime, pris per time	850 kr
Vegavgift	470 kr
Sparepengar	41 827 kr
Forbruk	0,3 L per mil



Figur 7. Eksamensoppgåve i matematikk 10. trinn våren 2023, oppgåve 8, del 2, henta frå udir.no

Modellering har òg vore synleg i eksamensoppgåver etter at LK20 vart innført. Eit eksempel på dette er oppgåva i figur 7 som vart gitt på eksamen

for 10. trinn våren 2023, der elevane er bedne om å vise sin kompetanse innanfor *modellering og anvending*. Ut frå oppgåveteksta kan det verke som hensikta med eksamensoppgåva er at elevane skal vise sin kompetanse innanfor alle delar av modelleringsprosessen. I eksamensinformasjonen er det anbefalt at elevane bruker om lag 60 minutt til saman på denne og ei anna tilsvarende omfattande oppgåve.

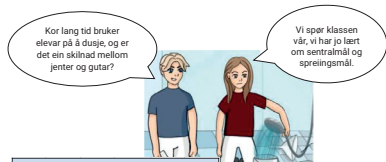
Informasjon om oppgåve 8

Her presenterer vi ein situasjon med ulike problemstillingar kor/der du skal bruke din kompetanse i matematikk til å:

- utforske matematiske spørsmål som er knytte til innhaldet i oppgåva og løyse problem
- lage modellar og vurdere gyldigheit og avgrensingar
- vise framgangsmåtar og resonnerment
- argumentere for løysingane dine og gjere kritiske vurderingar
- bruke høvelege hjelpemiddel

Oppgåve 8

Bruk informasjonen og samtalene til å utforske og finne samanhang.
Emma og Lucas undersøker vassforbruk og kostnader. Dei gjennomfører ei undersøking i klassen. Det dei fann ut er presentert nedanfor.



Sørjeundersøking i klassen:
Kor mange minutt dusjar du i snitt per dusj?

	Gutar			Jenter		
5	8	4	6	30	15	
5	6	16	8	17	12	
15	9	12	5	40	10	
18	10	18	20	15	8	
25	10		15	10	5	

Oppgåva fortsett på neste side.

Emma og Lucas vil rekne på kostnadane ved å dusje. Dei vil også modellere samanhangen mellom vassforbruk og pris.



I ei hushaldning blir vatn brukt til mykje forskjellig, til dømes vasking, dusjing, tannpuss, matlaging og mykje meir.

- Pris på vatn: Ein liter vatn frå krana kostar i snitt 2 øre.
- I Noreg brukar ein person i snitt 140 L vatn per døgn
- Vatnet frå krana held 10 grader celsius. I ein varmtvassberedar blir vatnet varma opp til 70 grader celsius.
- I juni 2023 var prisen på elektrisitet for hushaldningar i Norge 1,00 kr. per kWh.

Pris for energi til oppvarming:

Elektrisk energi blir målt i kilowatt-timar (kWh). Mengda energi som krevst for å varme opp vatn måles i joule (J).

Det trengst 4,2 kilojoule for å varme 1 kilogram vatn 1 grad celsius. Det blir då 4,2 kJ/kg.

kg vatn · temperaturoake · 4,2 kJ/kg = Mengd kJ

3 600 kJ = 1 kWh

Formelen for kostnad på straum:

$$\text{Pris} = \frac{\text{Mengde kJ}}{3\,600\text{ kJ}} \cdot x \text{ (pris per kWh)}$$

Figur 8. Eksamensoppgåve matematikk 10. trinn våren 2024, oppgåve 8 del 2. Henta frå udir.no

Også våren 2024 var modellering inkludert i eksamen etter 10. trinn (sjå figur 8). Denne oppgåva er noko ulik eksamensoppgåva i figur 7. For det første er det ikkje uttrykt at elevane skal vise sin modelleringskompetanse, men at dei mellom anna skal vise sin matematiske kompetanse knytt til å lage modellar og vurdere gyldigheit og avgrensingar. I tillegg skal også kjerneelementa utforsking og problemløysing, og resonnering og argumentasjon inngå i vurderinga av denne oppgåva. Det er ikkje uttrykt eit spesifikt spørsmål som elevane skal finne svar på i oppgåvene, men spørsmål er formulerte i snakkebobler på bilda. I den første snakkebobla, som vi vil kalle a), står det «Kor lang tid bruker elevane på å dusje, og er det ein skilnad mellom jenter og gutar?», i snakkeboble b) er spørsmålet «Kva kostar det å dusje?». Dette spørsmålet er nesten identisk med spørsmålet vi stilte i figur 1, «Kva kostar det å ta ein dusj?», men elles ser oppgåvene svært ulike ut. Vi kjem tilbake til eksamensoppgåvene seinare i kapitlet.

Men kvifor har matematisk modellering fått ein så sentral plass i matematikkfaget? Ifølgje Niss og Blum (2020) er det fleire grunnar til dette, og desse kan delast i to hovudmål. Ein kan enten sjå det slik at ein arbeider med *matematikk for modelleringa sin del*, eller at ein arbeider med *modellering for matematikken sin del*. Det eine målet utelukkar ikkje det andre, for ei enkelt modelleringsoppgåve kan føre til at ein utviklar seg innanfor begge måla (Niss & Blum, 2020). Om ein arbeider innanfor det første målet, ser ein på modellering som ein viktig del av det å kunne matematikk og å bruke matematikk i kvardagsliv og samfunn. Her er det lagt vekt på at utgangspunktet er eit problem frå ein konkret autentisk situasjon som ein kan løyse ved hjelp av matematikk. Ein bør då arbeide med oppgåver der ein tek utgangspunkt i aktuelle saker, som for eksempel dusj-oppgåva i figur 1. Den frigitte PISA-oppgåva i figur 6 er uttrykt i ein vitskapleg kontekst, og ein ser at matematikk er nyttig for å beskrive noko i verdsrommet. Om ein arbeider med *modellering for matematikk sin del*, er hovudmålet å lære matematikk, mens å kunne bruke matematikk i kvardagsliv og arbeidsliv er mindre vektlagt. Då kan ein forsvare å jobbe med oppdikta og konstruerte kontekstar der det er gitt kva matematisk område ein skal operere i. Når grunnane til å arbeide med modellering er ulike, kan matematisk modellering sjå forskjellig ut i klasserommet.

Når ein arbeider med matematikk for modelleringa sin del er det viktig at elevane blir utfordra til å takle rotete kvardagsproblem, der mykje av jobben er å strukturere og forenkla problemet. Det vil elevane i liten grad erfare dersom oppgåvene dei møter ikkje involverer prematematisering, men allereie er strukturerte og forenkla. Studiar har vist at den første delen av modelleringsprosessen i liten grad blir inkludert i oppgåver i lærebøker og eksamenar, både i Noreg (Berget, 2022) og i andre land (Frejd, 2011; Gatabi et al., 2012; Jessen & Kjeldsen, 2021; Urhan & Dost, 2018). Oppgåver formulerte i autentiske kontekstar som i utgangspunktet er rotete og «opne» er ofte brotne ned i deloppgåver, noko som strukturerer og forenkla problemet. Eit eksempel på dette er om dusj-oppgåva i figur 1 heller blir gitt som vist i figur 9. Her får elevane all informasjon dei treng for å løyse oppgåva, og ho er formulert med fleire lukka deloppgåver. Viss elevane berre møter oppgåver der all informasjonen er gitt og strukturert og nødvendige forenklingar er gjort, får dei ikkje moglegheita til å utvikle ein heilskapleg modelleringskompetanse.

- Gå ut frå at ein bruker omtrent 5 kWh straum for å varme opp vatnet ein bruker om ein dusjar i 10 minutt, og at straumprisen er 1 kr pr kWh.
- Kva kostar det å dusje i 10 minutt?
 - Set opp eit uttrykk for $P(x)$ der P er prisen for ein dusj og x er kor mange minutt ein dusjar.
 - Teikn grafen til $P(x)$ når $0 \leq x \leq 30$.
 - Bruk grafen til å finne ut kor lenge ein kan dusje for 15 kroner.
- Gå heller ut frå at straumprisen var 1,50 kr pr. kWh.
- Set opp eit uttrykk for $Q(x)$, ny pris for ein dusj, der x er kor mange minutt ein dusjar.
 - Kor lenge kan ein no dusje for 15 kroner?

Figur 9. Ein annan versjon av dusj-oppgåva i figur 1, broten ned i deloppgåver som strukturerer og forenkler problemet

Dei ulike modelleringscyklusane er teoretiske modellar for kva steg ein går gjennom når ein løyer eit kvardagsleg problem, og kan vere ei hjelp for å få oversikt over kva som ligg i arbeid med matematisk modellering. Men dei seier ikkje noko om korleis ein lærar skal gå fram for å velje eller lage modelleringsoppgåver til elevane eller legge opp undervisninga slik at elevane utviklar modelleringskompetanse. Sjølv om matematisk modellering er ein tydeleg del av læreplanen LK20, kjem det ikkje fram i læreplanen kva ein skal legge vekt på i dette arbeidet (Berget & Bolstad, 2019). Å arbeide med matematisk modellering krev solid matematisk kompetanse i tillegg til motivasjon og vilje til å arbeide med denne typen oppgåver (Niss & Blum, 2020). Matematisk modellering kan også bryte med forventningar elevane har, dersom dei for eksempel er vande med at ei matematikkoppgåve skal kunne løysast på nokre minutt, at all nødvendig informasjon er gitt, at oppgåva berre har eitt rett svar, eller at ein ikkje for alvor treng å ta omsyn til konteksten oppgåva er formulert i (Lesh & Zawojewski, 2007). Det er også ein føresetnad at læraren har kunnskap om og kompetanse i matematisk modellering, for eksempel å kjenne til modelleringscyklusar og modelleringsoppgåver, kunne løyse, analysere og lage modelleringsoppgåver, planlegge og gjennomføre undervisning med modelleringsoppgåver og kjenne igjen når elevane arbeider med og strever med ulike delar i modelleringscyklusen (Borromeo Ferri, 2018). I tillegg må læraren ha kjennskap til konteksten oppgåva er formulert i (Blum, 2015).

Matematisk modellering kan vere krevjande å implementere i undervisninga, og den første delen spesielt. Det kan vere uvant for både lærarar og elevar at ei oppgåve ikkje inneheld all informasjonen som er nødvendig for å løyse oppgåva, eller at oppgåva inneheld overflødig og irrelevant informasjon (Niss & Blum, 2020). Det kan også vere uvant at konteksten er

viktig for å forstå og løyse oppgåva og ikkje berre er «til pynt», og at elevane sjølve må gjere forenklingar eller bestemme føresetnader for vidare arbeid med oppgåva. For eksempel fann Jankvist og Niss (2020) at den viktigaste grunnen til feilsvar frå elevar ikkje var matematiske feil, men at dei ikkje klarte å omsetje frå den verkelege situasjonen til ein eigna matematisk modell. Språkleg kompleksitet i ei oppgåve kan gjere det vanskeleg å forstå situasjonen (Plath & Leiss, 2018). Frejd og Ärleback (2011) fann at elevar strevde med å gjere forenklingar for å gå frå det opphavslege problemet til ein matematisk modell. I ein studie av feilsvar frå elevar i ei tidlegare PISA-undersøking, viste resultatane at det oftast var å skape mening i situasjonen oppgåva var presentert i, og å gjere det om til eit matematisk problem som var utfordringa (Wijaya et al., 2014). Dette peikar på at ein i undervisninga i større grad bør gi elevane moglegheit til å lære seg å handtere utfordringane i denne første delen av modelleringsprosessen, overgangen frå eit kaotisk kvardagsproblem til eit matematisk problem. Dette er nødvendig for å utvikle modelleringskompetanse slik at dei i framtida kan bruke matematikk for å løyse problem frå kvardagsliv og yrkesliv.

Vår studie

I denne studien ville vi utvikle eit analyseskjema for å identifisere ulike utfordringar i oppgåver knytte til den første delen av modelleringsprosessen. Analyseskjemaet er utvikla basert på *handlingane* knytte til å *kjenne igjen og formulere* i PISA-rammeverket og to andre skildringar av modelleringsprosessen, Blum og Leiss (2007) og Frejd (2011). Vidare bruker vi skjemaet til å analysere dei 48 PISA-oppgåvene som er plasserte under å *kjenne igjen og formulere* i PISA 2022, for å undersøke kva utfordringar frå den første delen av matematisk modellering elevane møter i PISA-undersøkinga. Problemstillinga vår er formulert slik:

Kva blir elevane utfordra i når dei løyser oppgåver knytte til å *kjenne igjen og formulere* i PISA?

Resultata frå denne analysen kan hjelpe oss å forstå kva som ligg bak PISA-resultata knytte til å *kjenne igjen og formulere*. *Handlingane* er skildra i PISA-rammeverket, og ved denne analysen kan vi få innsikt i kva som faktisk blir testa. Vi vil også bruke analyseskjemaet til å diskutere utfordringane i to eksamensoppgåver for 10. trinn frå 2023 (sjå figur 7) og 2024 (sjå figur 8) og på den måten gjere betre greie for resultatane i analysen vår.

Ved å beskrive oppgåvene som er knytte til ulike analysekategoriar, får vi eksempel på korleis modelleringsoppgåver kan vere utforma. Det blir også tydelegare kva som ligg i den første delen av modelleringsprosessen. Vidare trur vi at eit slikt skjema også kan vere nyttig for lærarar som støtte for å reflektere over og vurdere korleis oppgåver utfordrar elevane i å omsette eit kvardagsproblem til eit matematisk problem.

Metode

Utforming av analyseskjema

Vi utvikla analyseskjemaet til bruk i denne studien med bakgrunn i modelleringssyklusen til Blum og Leiss (figur 3) og operasjonaliseringa av stega i modelleringssyklusen skildra av Frejd (2011), i tillegg til *handlingane* innanfor steget *kjenne igjen og formulere* i PISA-rammeverket.

Å *kjenne igjen og formulere* er altså knytt til første del i modelleringssyklusen, at problemet blir formulert ved hjelp av matematisk språk (steg 1, 2 og 3 i modelleringssyklusen i figur 3). I PISA-rammeverket er dette skildra gjennom tolv *handlingar* som uttrykker kva elevane blir utfordra på i *kjenne igjen og formulere*-oppgåvene. Desse er viste i tabell 1.

Tabell 1. Dei tolv «handlingane» i prosessen «kjenne igjen og formulere» i PISA 2022 (OECD, 2023a, s. 45). Omsett av oss

a	Velje matematisk uttrykk eller representasjon som skildrar problemet.
b	Identifisere viktige variablar i ein modell.
c	Velje passende representasjon som passar til konteksten.
d	Lese, dekode og finne mening i påstandar, spørsmål, oppgåver, objekt eller bilde for å lage ein modell av situasjonen.
e	Kjenne igjen matematisk struktur i problem eller situasjonar (inkludert regelmessighet, relasjonar og mønster i problem eller situasjonar).
f	Identifisere og skildre dei matematiske aspekta og variablar i den praktiske situasjonen.
g	Forenkle eller dekomponere situasjonen og splitte opp problemet for å gjere matematisk analyse mogleg.
h	Kjenne igjen delar av problemet som korresponderer med kjente problem eller matematiske omgrep, fakta eller prosedyrar.
i	Omsetje eit problem til standard matematisk representasjon eller algoritme.
j	Bruke matematiske verktøy (bruke variablar/symbol/diagram) for å skildre matematiske strukturar og/eller samanhengar i problemet.
k	Bruke matematiske verktøy eller digitale verktøy til å sjå/utforske/skildre matematiske samanhengar.
l	Identifisere avgrensingar, forenklingar og føresetnader som ligg til grunn i ein matematisk modell.

Frejd (2011) har i sin studie utforma hjelpespørsmål for å kunne kategorisere matematikkoppgåver opp mot ulike steg i modelleringsprosessen. Dei fem første kategoriane er knytte til første delen av prosessen, og desse hjelpespørsmåla er utforma slik:

1. Må elevane gjere forenklingar og sjølv bestemme føresetnader i problemsituasjonen for å løse problemet?
2. Basert på den reelle situasjonen, må elevane klargjere kva dei vil oppnå med den matematiske modellen? (Er det uklart i oppgåva kva informasjon og kva samanhengar som er mest relevante for å formulere ein matematisk modell?)
3. Må elevane gjennomføre simuleringar eller vurdere slike for å setje seg inn i problemet?
4. Må elevane definere variablar, parameterar eller konstantar for å løse problemet?
5. Må elevane sjølv setje opp eit matematisk formulert uttrykk (matematisk modell) for å beskrive problemet?

Vi kopla desse kategoriane frå Frejd til dei første stega i modellerings-syklusen til Blum og Leiss (sjå figur 3) og *handlingane* under å *kjenne igjen og formulere* i PISA-rammeverket. Vi kom då fram til fire ulike kategoriar. Kategori A handlar om å gjere forenklingar og bestemme føresetnader, kategori B handlar om å identifisere og strukturere informasjon, kategori C handlar om å lage eit matematisk uttrykk (ein modell), og kategori X handlar om å bruke simuleringar og andre verktøy. Tabell 2 viser dei fire kategoriane og samanhengen med PISA-handlingane, kategoriane til Frejd og stega i modellerings-syklusen til Blum og Leiss.

Tabell 2. Kategoriane i førsteutkastet av analyseskjema, «handlingane» i PISA-prosessen «kjenne igjen og formulere», dei første fem kategoriane i Frejds rammeverk og steg i modelleringsprosessen til Blum og Leiss frå figur 3 sett i samanheng

Våre kategoriar	PISA-handlingar	Frejd	Blum og Leiss
A	g	1	1, 2
B	b, d, e, f, h,	2, 4	2, 3
C	a, c, i, l	5	3
X	k, j	3	

Etter å ha testa analyseskjemaet på åtte oppgåver frå PISA 2012 kom vi fram til at det var nødvendig med nokre endringar i kategoriane. For det første såg vi på det å bruke verktøy (kategori X) som noko ein kan gjere i alle delar av modelleringsprosessen, og vi valde derfor å halde denne kategorien utanfor i den vidare analysen. I tillegg fann vi at kategori B, som handla om både å identifisere og å strukturere informasjon, kunne vere nyttig å skilje i to kategoriar i analysen av oppgåvene. Dette resulterte i B1 (identifisere informasjon) og B2 (strukturere informasjon). Når det gjeld kategori C, som handlar om å velje eller lage ein matematisk modell, ville vi skilje det å lage ein modell frå å gjere ei vanleg utrekning. Vi bestemte at alle oppsett og utrekningar der det verken eksplisitt eller implisitt var oppgitt i oppgåveteksta kva operasjon elevane skulle bruke, vart vurderte som å lage ein modell. I tillegg vart å velje passende modell i fleirvalsoppgåver også sett på som å lage ein matematisk modell. Spørsmålet «kva er ein matematisk modell?» vil vi kome tilbake til seinare i kapittelet.

I den neste utprøvinga av skjemaet analyserte kvar av forfattarane 10 av dei 48 oppgåvene i datamaterialet og diskuterte desse. Det viste seg å vere utydeleg skilje mellom kategori B2 og C. Vi endra beskrivinga av kategoriar for å presisere at kategorien B2 inkluderer å finne mønster i informasjonen som allereie er oppgitt, mens kategori C inkluderer utrekningar. Vi presiserte også med eksempel kva som var med i C, og kva som ikkje vart rekna som C. Det endelege analyseskjemaet er vist i tabell 3.

Tabell 3. Endeleg analyseskjema med forklaring av dei fire kategoriane

Beskriving av kategoriar	
A	<p>Gjere forenklingar eller bestemme føresetnader</p> <p>Forenkling er at elevane ser vekk frå variasjonar, for eksempel at dei bestemmer seg for å bruke ein gjennomsnittleg verdi. Å bestemme føresetnader er at dei anslår noko, for eksempel ei høgde til noko på eit bilde ut frå å samanlikne med noko på bildet som dei kjenner høgda til.</p> <p>Ei oppgåve krev <i>ikkje</i> dette når det er oppgitt korleis ein skal forenkla, eller når det ikkje trengst forenkling, og når føresetnadene er gitt i oppgåva.</p>
B1	<p>Finne relevant informasjon og bestemme nøkkelvariablar</p> <p>Elevane må finne ut kva informasjon som er nødvendig for å løyse problemet, det kan vere å skilje mellom relevant og irrelevant informasjon. Elevane må definere variablar, parameterar og konstantar for å løyse problemet.</p> <p>Ei oppgåve krev <i>ikkje</i> dette når nøkkelvariablane og all nødvendig informasjon er gitt og oppgåva ikkje inneheld noko irrelevant informasjon, eller det er tydeleg ut frå oppgåva kva informasjon som er relevant, og kva som er irrelevant.</p>

(Forts.)

Tabell 3. (Forts.)

Beskriving av kategoriar	
B2	<p>Kjenne igjen struktur, mønster og samanhengar</p> <p>Elevane må kjenne igjen matematisk struktur i problemet eller situasjonen. Dette kan også innebere å kunne sjå korleis matematisk kunnskap (omgrep, fakta eller prosedyrar) kan bli brukte i den gitte situasjonen, for eksempel å kjenne igjen situasjonar der ein kan bruke Pytagoras-setninga.</p> <p>Ei oppgåve krev <i>ikkje</i> dette når det er tydeleg kva matematisk kunnskap ein skal bruke, og når informasjonen i oppgåva er presentert på ein strukturert måte som gjer det enkelt å knyte saman dei ulike delane eller stega som er nødvendige for å løyse oppgåva.</p>
C	<p>Lage ein matematisk modell</p> <p>Elevane må sjølve finne ut av den matematiske modellen. Ein matematisk modell kan for eksempel vere ein (standard-)algoritme (utrekning), eit uttrykk eller ein representasjon. Å velje ein modell i form av fleirvalsoppgåve er også her definert som å lage ein modell.</p> <p>Ei oppgåve krev <i>ikkje</i> dette når den matematiske modellen er gitt frå før, for eksempel at oppgåveteksta gir tydeleg informasjon om kva ein skal gjere (finne gjennomsnitt, prosentrekning, bruke Pytagoras-setninga), når ein formel er oppstilt og elevane berre skal fylle inn tal, eller når oppgåva berre krev at ein vekslar mellom ulike matematiske representasjonsformer.</p>

Analyse av PISA-oppgåver

For å undersøke oppgåvene som skal teste elevane i den første delen av modelleringsprosessen, analyserte vi dei 48 *kjenne igjen og formulere*-oppgåvene i PISA 2022 ved hjelp av analyseeskjemaet som er vist i tabell 3. For å styrke og å kunne vurdere pålitelegheita i analyseverktøyet og kodinga vart kvar av oppgåvene analysert av minst to av forfattarane. 10 av oppgåvene vart analyserte av alle tre, og dei 38 andre vart analyserte av to og to av forfattarane. Samsvaret mellom koderane vart rekna ut (sjå tabell 4). For dei oppgåvene der vi var ueinige om kodinga av ein eller fleire av kategoriane, diskuterte alle tre forfattarane til vi vart einige. Vi noterte ned argument for ulik koding og tok med oss desse innspela vidare i diskusjonen i dette kapittelet. Ei utfordring med analysen av oppgåvene var at vurdering av kva for kategoriar som inngår, er avhengig av kva løysingsmetode som blir brukt av elevane. I kodinga av oppgåvene vart løysingmetodar ein kan tenke seg at 15-åringar ville ha brukt, lagt til grunn.

Kodesamsvar

Vi berekna kodesamsvar for å undersøke kor einige vi tre forfattarane var om kva for nokre av dei fire kategoriane som var inkluderte i dei ulike oppgåvene vi analyserte. Samsvaret mellom kodarane gir ein indikasjon

på at analysen og tolkinga som er gjort av matematikkoppgåvene, ville ha vore den same om det vart gjort av andre (O'Connor & Joffe, 2020). Kodesamsvaret kan også gi informasjon om eit analyseskjema er strengt og gjennomsiiktig, og kor godt det fungerer med dataa som blir analyserte (O'Connor & Joffe, 2020). Å gjere greie for desse verdiane kan styrke pålitelegheita til resultatane. Sidan dei fleste oppgåvene var koda av to kodarar, med dikotome kategoriar (ja eller nei), vart kodesamsvar berekna med Cohens kappa (Cohen, 1960) for kvart par av kodarane. I tolkinga av kappa-verdiane kan 0–0,20 vurderast som svakt samsvar, 0,21–0,40 som noko samsvar, 0,41–0,60 som moderat samsvar, 0,61–0,80 som betydeleg samsvar og 0,81–1,00 som nesten perfekt samsvar (Landis & Koch, 1977). Verdien for samsvaret i kodinga er presentert i tabell 4. For kodinga totalt, det vil seie samla sett for alle dei fire kategoriane, var det frå moderat til betydeleg samsvar mellom forfattarane. Det var fullstendig samsvar i kategori A og derfor ikkje mogleg å rekne ut ein verdi for berre denne kategorien. For kategori B1 var det moderat samsvar for to par av forfattarane, men svakt samsvar for det tredje paret. Ei forklaring på det låge samsvaret mellom forfattar B og C kan vere knytt til ulike oppfatningar om når informasjon som er gitt i oppgåva, skal vurderast som irrelevant. For kategori B2 var det frå noko til moderat samsvar. Ei utfordring med denne kategorien var å vurdere når ei oppgåve var tilstrekkeleg ustrukturert til å hamne i kategori B2. Dei ulike verdiane mellom forfattarane i tabell 4 tyder på at dette vart vurdert noko forskjellig. Det relativt låge samsvaret for kategori C mellom nokre av forfattarane kjem i stor grad av ueinigheit knytt til om det er opplagt ut frå oppgåva korleis den matematiske modellen skal bli utforma, eller om ein kan seie at oppgåva krev at elevane sjølve må lage ein

Tabell 4. Samsvar mellom analysen av dei 48 PISA-oppgåvene i kategorien «kjenne igjen og formulere» rekna ut med Cohens kappa. Tabellen viser samsvaret mellom to og to av forfattarane. Verdiane i parentes viser p-verdiane. P-verdiar under 0,05 betyr at kappa-verdien er statistisk signifikant større enn 0 på eit 5 prosent signifikansnivå. Det var fullstendig samsvar i kodinga av kategori A og derfor ingen verdiar i den kolonnen

	Totalt	A	B1	B2	C
Forfattar X og Y	0,626 (<0,001)	–	0,430 (0,031)	0,514 (0,015)	0,611 (0,006)
Forfattar X og Z	0,455 (<0,001)	–	0,571 (0,003)	0,349 (0,055)	0,195 (0,299)
Forfattar Z og Y	0,455 (<0,001)	–	0,194 (0,108)	0,408 (0,045)	0,256 (0,202)

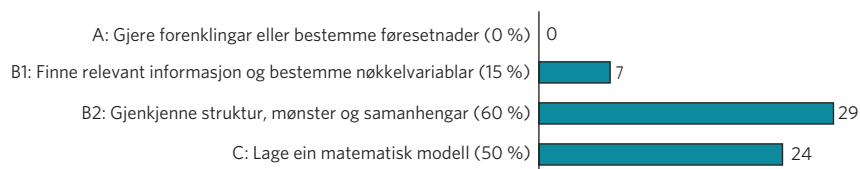
modell. Nokre av grunnane til låge samsvar blir diskuterte seinare i kapitlet. Dei høge p-verdiane i dei enkelte kategoriane er påverka av at det var forholdsvis få oppgåver som vart koda for kvart forfattarpar.

Analyse av eksamensoppgåver

For å belyse resultatata frå analysane av PISA-oppgåver ville vi også anvende analyseskjemaet vårt på oppgåver som lærarar kjenner til, eksamensoppgåver frå eksamen på 10. trinn i 2023 (figur 7) og 2024 (figur 8). Dette er oppgåver dei fleste elevane på 10. trinn vil få introdusert, og det er den same elevgruppa som gjennomfører PISA-undersøkinga (15-åringar). Resultatet av analysen av desse eksamensoppgåvene blir presenterte etter resultatet frå analysen av PISA-oppgåvene. Vi tolka mopedbil-oppgåva som ei oppgåve, og dusjetid og dusjepris-spørsmålet i den andre eksamensoppgåva som to deloppgåver.

Kva for utfordringar fann vi i PISA-oppgåvene?

Figur 10 viser resultatet av analysen av dei 48 oppgåvene knytte til prosessen *kjenne igjen og formulere* i PISA 2022. Her ser vi kor mange av oppgåvene som vart vurderte til å inkludere dei ulike kategoriane i analyseverktøyet vårt. Summen av dei fire kategoriane er meir enn 100 prosent, sidan nokre oppgåver involverte fleire av kategoriane.



Figur 10. Tal på kor mange oppgåver i kvar av analysekategoriane og som prosent av det talet på oppgåver totalt

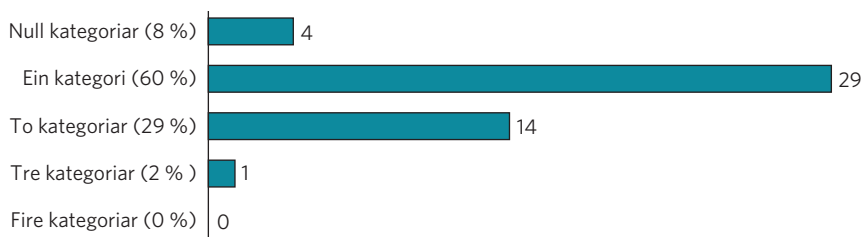
Som ein kan sjå i figur 10 fann vi tre av dei fire kategoriane i oppgåvene, der å kjenne igjen struktur, mønster og samanhengar (B2) og å lage ein matematisk modell (C) var inkludert i flest oppgåver. Å gjere forenklingar eller bestemme føresetnader (A) vart ikkje funne i nokon av oppgåvene. Det vil seie at ut frå våre analyser av dei 48 oppgåvene innanfor å *kjenne*

igjen og formulere, blir ikkje elevane testa i handling g) å «forenkle eller dekomponere situasjonen og splitte opp problemet for å gjere matematisk analyse mogleg». Svaret på Frejd sitt hjelpespørsmål 1, «Må elevane gjere forenklingar og sjølv bestemme føresetnader i problemsituasjonen for å løyse problemet?», var altså «nei» for alle desse PISA-oppgåvene.

Det var relativt få oppgåver som vart plasserte i kategori B1, å kunne skilje ut relevant informasjon som trengst for å løyse oppgåva. Der var stor overvekt av kategori B2 og C. Dei fleste oppgåvene innanfor desse kategoriane har eit svarformat der elevane enten skal velje mellom fire verdiar (sjå oppgåva «trekanta mønster» i figur 12) eller setje inn rett verdi i eit oppe felt. For eksempel kan ei oppgåve krevje at elevane må bruke Pytagoras-setninga for å kome fram til svaret, men elevane blir ikkje bedne om å vise utrekninga og dermed ikkje modellen dei har brukt. Elevane gir altså eit svar dei får i utrekningane sine der dei har brukt ein modell. Berre tre av oppgåvene har eit svarformat der elevane sjølve må uttrykke ein matematisk modell, for eksempel ved eit matematisk uttrykk med variablar.

I analysen av oppgåvene var det mest usemje om kategori C. I diskusjonen i etterkant vart det klart at vi var usikre på om oppgåva kravde «nok» til at ein kunne seie at elevane sjølve kom fram til den matematiske modellen, eller om den matematiske modellen allereie var gitt i oppgåveteksta. Eksempel på dette er om det i oppgåveteksta er formuleringar som «kor mange per dag?». Er det då heilt opplagt at ein må ta den totale mengda som er gitt, og dele på talet på dagar som er gitt, eller er det krevjande nok til å seie at dette er å setje opp ein modell eller ei utrekning?

Vidare undersøkte vi kor mange kategoriar dei ulike oppgåvene inkluderte. Fordelinga er vist i figur 11. Nokre av oppgåvene inkluderte ingen av kategoriane i analysen vår. Dei fleste oppgåvene er koda til éin kategori, mens éi oppgåve inkluderte tre kategoriar.



Figur 11. Tal på oppgåver som inkluderte null, ein, to, tre eller fire kategoriar

For å kunne beskrive kva som blir vurdert i *kjenne igjen og formulere*-prosessen i PISA-undersøkinga, ville vi studere kva som kjenneteikna oppgåvene som var plasserte i kvar av kategoriane, og dei som var i fleire kategoriar. Det er berre nokre få av PISA-oppgåvene som er frigitt, vi har ikkje høve til å vise eksempel på alle typar oppgåver.

Det er frigitt ei PISA-oppgåve som vart koda til kategorien B2, så i figur 12 kan vi sjå eksempel på ei slik. Vi ser her at elevane må utvide mønsteret i trekanten, og dette inkluderer kategori B2, å kjenne igjen struktur, mønster og samanhengar. Vidare for å løyse oppgåva er det tilstrekkeleg å innsjå at det vil vere færre blå trekantar enn raude trekantar, altså er under 50 prosent av trekantane blå. Dermed er einaste moglege svaralternativ 40,0 prosent. Elevane kan også telje opp talet på raude og blå trekantar etter å ha lagt til ei rad, og rekne ut eksakt. Men sidan det er oppgitt at dei skal finne prosent blå trekantar, er det gitt at dei må gjere utrekninga $\frac{\#blå\ trekantar}{\#trekantar\ totalt}$, og vi vurderte det derfor slik at kategori C, å lage ein matematisk modell, ikkje var aktuell i denne oppgåva.

The screenshot shows a digital interface for a PISA 2022 math problem. The interface is divided into two main sections. On the left, there is a question box titled "Trekanta mønster" (Triangle pattern) with the sub-header "Spørsmål 2 / 3". The text in the question box reads: "Les 'Trekanta mønster' til høgre. Svar på spørsmålet ved å klikke på eit av alternativa." (Read 'Triangle pattern' on the right. Answer the question by clicking on one of the alternatives.) Below this, the question asks: "Dersom Adli utvidar mønsteret med ei femte rad, kor mange prosent av trekantane i alle dei fem radene vil vere blå?" (If Adli expands the pattern with a fifth row, what percentage of the triangles in all five rows will be blue?). There are four radio button options: 40,0%, 50,0%, 60,0%, and 66,7%. On the right, the problem is titled "TREKANTA MØNSTER". The text says: "Adli teikna dette mønsteret med raude og blå trekantar. Dei første fire radene i mønsteret er viste nedanfor." (Adli drew this pattern with red and blue triangles. The first four rows of the pattern are shown below). Below the text is a diagram of a triangle pattern on a grid. The pattern consists of four rows of triangles. The first row has 1 red triangle. The second row has 2 triangles: 1 red and 1 blue. The third row has 3 triangles: 1 red, 1 blue, and 1 red. The fourth row has 4 triangles: 1 red, 1 blue, 1 red, and 1 blue. To the right of the diagram are two pens, one blue and one red.

Figur 12. Frigitt oppgåve frå PISA 2022, «Trekanta mønster», kategorisert til B2, kjenne igjen struktur, mønster og samanhengar

Det er også frigitt ei oppgåve som vi har vurdert til å inkludere kategori C, sjå figur 13. Her får elevane eit rekneark med informasjon, og dei får vite at dei kan «øve på å bruke reknearket». Det er fire oppgåver knytte til denne konteksten (skogareal), men det er berre den første oppgåva som er knytt til å *kjenne igjen og formulere* og dermed inkludert i data-materialet i denne studien. Det er oppgitt i oppgåveteksta at elevane skal finne endring i prosentpoeng mellom 2005 og 2015, og det er dermed gitt kva informasjon dei skal nytte (kolonne B og kolonne D). Det vart derfor vurdert at elevane ikkje treng å finne relevant informasjon og bestemme nøkkelvariablar, og oppgåva er dermed ikkje koda som kategori B1. Ein kan diskutere kor opplagt det er for elevane at dei må finne differansen mellom prosent oppgitt for dei to årstala for å finne kva land som har «størst auke», «inga endring» og «størst nedgang» i prosentpoeng, altså velje *kolonne D – kolonne B* som formel i kolonne E. I denne oppgåva vurderte vi det til at det ikkje nødvendigvis er heilt opplagt for 15 år gamle elevar, og oppgåva inkluderer dermed kategori C, å lage ein matematisk modell. Vidare må elevane vurdere at det høgste positive talet i kolonne E er landet som har størst auke, og landet med det minste talet (som er negativt) har størst nedgang (størst negativ differanse). Det er eitt land som har like stor del skogareal for begge åra og dermed 0 i differanse, som er svaret på spørsmålet i midten.

Skogareal-oppgåva i figur 13 er også eit eksempel på grunn for diskusjon mellom forfatarane i analysearbeidet. Sidan reknearket inneheld meir informasjon enn det som trengst for å løyse denne oppgåva, som data frå 2010 i kolonne C, kan ein her argumentere for at elevane også må utføre kategori B1, å finne relevant informasjon og bestemme nøkkelvariablar. Men sidan det er oppgitt i spørsmålet kva årstal dei skal ta utgangspunkt i, vurderte vi det slik at dei ikkje sjølv trong avgjere kva for informasjon som var relevant og ikkje.

13 av dei 14 oppgåvene som vi plasserte i to kategoriar, har kombinasjonen B2 og C. I desse oppgåvene må elevane ikkje berre sjå mønster og system, men dei må også i nokre tilfelle uttrykke dette ved hjelp av ein formel. Eller dei må gjere utrekningar i tillegg for å kunne avgjere kva for slags svaralternativ som er det rette. Den siste av dei 14 oppgåvene med to kategoriar har B1 og C. Der må elevane både velje ut relevant informasjon og gjere ei utrekning ut frå ein modell dei sjølve må lage.

PISA 2022

Skogareal

Innleiing


Les innleiinga. Klikk deretter på NESTE-pila.

SKOGAREAL

I denne oppgaveeininga skal du bruke eit rekneark for å svare på spørsmål knytte til desse opplysningane:

Ein skog er eit økosystem der det finst mange ulike tre, plantar og dyr.

Prosentdelen skogareal i eit land kan endre seg over tid.



På det neste skjembiletet kan du øve på å bruke reknearket.

PISA 2022

Skogareal

Spørsmål 1 / 4

► Korleis bruke reknearket

Les "Skogareal" til høgre. Bruk reknearket for å svare på spørsmålet nedanfor. Svar på kvart av spørsmåla ved å velje frå nedtrekksmenyane.

Svar på kvart spørsmål i tabellen nedanfor ved å velje eit land i den tilhøyrande nedtrekksmenyen.

Spørsmål	Land
Kva land hadde størst auke , i prosentpoeng, mellom 2005 og 2015?	Vel <input type="text"/>
Kva land hadde inga endring totalt sett mellom 2005 og 2015?	Vel <input type="text"/>
Kva land hadde størst nedgang , i prosentpoeng, mellom 2005 og 2015?	Vel <input type="text"/>

SKOGAREAL

Reknearket nedanfor viser andelen skogareal, i prosent av det totale landarealet, i kvart av dei 15 landa i dette datasettet. Dataa er viste for åra 2005, 2010 og 2015.

Kolonne A	Kolonne B	Kolonne C	Kolonne D	Kolonne E	Kolonne F	Kolonne G
Land	2005	2010	2015	↺ ✕	↻ ✕	↻ ✕
Algerie	0,64	0,81	0,82			
Armenia	11,77	11,74	11,77			
Colombia	54,26	52,85	52,73			
Hellas	29,11	30,28	31,45			
India	22,77	23,47	23,77			
Kasakhstan	1,24	1,23	1,23			
Libanon	13,34	13,38	13,42			
Panama	64,33	63,21	62,11			
Peru	59,01	58,45	57,79			
Portugal	36,52	35,89	35,25			
Senegal	45,05	44,01	42,97			
Ser-Korea	64,42	64,08	63,69			
Thailand	31,51	31,81	32,1			
Tyskland	32,66	32,73	32,76			
USA	33,26	33,7	33,85			

Rekn ut

Kolonne Operasjon Kolonne

Gjennomsnitt Kolonne

Figur 13. Frigitt oppgave PISA 2022, «Skogareal». Kategorisert til C, å lage ein matematisk modell

Fire av *kjenne igjen* og *formulere*-oppgåvene vart ikkje vurderte til å innehalde nokon av kategoriane vi brukte i analysen. I desse oppgåvene er framgangsmåten allereie gitt, for eksempel blir det spurt etter gjennomsnitt eller prosent. Vi undrar oss derfor på om desse oppgåvene heller burde vere knytte til prosessen *bearbeide* og *bruke* heller enn *kjenne igjen* og *formulere*. Elevane treng verken å vurdere kva informasjon dei skal bruke, eller kva framgangsmåte som må til for å løyse oppgåva, når alt dette er gitt. Dette kan tyde på at vi forfattarane av dette kapitlet har ulik oppfatning av utfordringane i desse oppgåvene og korleis dei er knytte til dei ulike stega i modelleringsprosessen, enn dei som har kategorisert oppgåvene for PISA.

Kva blir elevane utfordra på i eksamensoppgåvene?

Vi analyserte også eksamensoppgåvene i figur 7 og figur 8 for å kunne drøfte desse oppgåvene og resultatet frå analysen av PISA-oppgåvene. For oppgåva om mopedbilen i figur 7 kom vi fram til kategoriar slik det er vist i tabell 5.

Tabell 5. Analyseresultat av eksamensoppgåva i figur 7

A	Gjere forenklingar eller bestemme føresetnader	Nei
B1	Finne relevant informasjon og bestemme nøkkelvariablar	Nei
B2	Kjenne igjen struktur, mønster og samanhengar	Ja
C	Lage ein matematisk modell	Ja

Når det gjeld kategori A, å gjere forenklingar eller bestemme føresetnader, er dette allereie gjort i oppgåva. Det er oppgitt gjennomsnittsverdiar eller faste verdiar på dei relevante parameterane. Føresetnader er allereie bestemte, som rente på kontoen, årleg verditap på bilen, dieselpris og gjennomsnittleg køyrelengd per veke. Elevane skal ikkje finne relevant informasjon som skildra i kategori B1, for dei blir gitt all informasjon dei treng for å løyse oppgåva, og dei blir i liten grad gitt noko irrelevant informasjon. Det er ikkje oppgitt kor mange ekstra køyretimar som er forventa at jenta i oppgåva treng, og dermed er det opplagt at dette kan vere ein variabel. Dei kan også velje å gå ut frå at jenta ikkje treng ekstra køyretimar, og på den måten unngå å måtte setje opp eit uttrykk med variablar. Elevane må til ei viss grad sortere i korleis dei skal bruke den informasjonen som er gitt, så kategori B2, å kjenne igjen struktur, mønster og samanhengar, er nødvendig for å løyse oppgåva. Dei må også finne ut av samanhengane mellom

dei ulike verdiane som er oppgitt, og korleis desse påverkar prisen totalt. Dette inngår også i kategori B2. Vidare må elevane setje opp matematiske modellar som viser desse samanhengane. Oppgåva inkluderer altså også kategori C, å lage ein matematisk modell. Vår vurdering er at sjølv om det er lagt opp til at elevane skal bruke om lag 30 minutt på denne oppgåva, og at ho krev at dei sorterer mykje informasjon for å lage ein matematisk modell, er det fleire viktige delar av denne første delen av modelleringsprosessen som ikkje er involverte i oppgåva.

I den andre eksamensoppgåva (sjå figur 8) analyserte vi det vi tolka som spørsmål a) og spørsmål b), kvar for seg.

Tabell 6. Analyseresultat av eksamensoppgåva i Figur 8

		Oppgåve a)	Oppgåve b)
A	Gjere forenklingar eller bestemme føresetnader	Nei	Ja
B1	Finne relevant informasjon og bestemme nøkkelvariablar	Nei	Ja
B2	Kjenne igjen struktur, mønster og samanhengar	Nei	Nei
C	Lage ein matematisk modell	Nei	Nei

Vi vurderte det slik at spørsmål a), «Kor lang tid bruker elevar på å dusje, og er det ein skilnad mellom jenter og gutar?», ikkje inkluderer nokon av kategoriane frå analyseskjemaet (tabell 6). Vi tolka informasjonen i den andre snakkebobla, «Vi spør klassa vår, vi har jo hatt om sentralmål og spreingsmål», slik at framgangsmåten for å svare på spørsmålet er gitt, og datasettet er gitt. Elevane treng derfor i spørsmål a) ikkje å gjere noko anna enn å rekne ut desse for å svare på spørsmålet.

I spørsmål b), «Kva kostar det å dusje?», er det meste av informasjonen gitt og også dei matematiske modellane elevane må bruke for å kome fram til eit svar. I formlane som er gitt i oppgåva, er den einaste informasjonen som manglar, kor mange kg vatn ein bruker, og kor stor temperaturauken er. I den andre snakkebobla på bildet er det føreslått kva vurderingar elevane må gjere: «Det er mange ting å tenke på. For eksempel kor ofte du dusjar, kor mykje vatn det kjem per minutt, og temperaturen på vatnet». Det er uklart for oss om det er forventa om elevane skal ha klart føre seg eit tal på kor mykje vatn det kjem per minutt når ein dusjar. Dette er det ikkje gitt noko informasjon om. Men sidan det er oppgitt kor mykje vatn ein person i gjennomsnitt bruker i døgnet, kan elevane heller bruke dette talet som utgangspunkt for å gjere ei vurdering av kor mykje vatn som blir brukt til dusjing. Då er i tilfelle svara frå oppgåve a) ikkje relevante for arbeid med

oppgåve b). Når det gjeld temperaturendring, kan dei forenkle situasjonen og gå ut frå at dusjvatnet skal varmest opp frå 10°C til ønskt dusjtemperatur, i staden for å ta stilling til at blandebatteriet skal blande oppvarma vatn frå varmtvasstanken med kaldt for å oppnå rett temperatur. Då må elevane altså utføre kategori A, å forenkle og bestemme føresetnader, for å svare på spørsmål b). Dei må også vurdere kva slags informasjon dei vil ta omsyn til og bruke til å bestemme kg vatn og temperatur, kategori B1. Men dei må ikkje lage ein matematisk modell slik det er skildra i analyseskjemaet vårt. Dei matematiske samanhengane og formlane er allereie gitt. I vår analyse av oppgåva har vi tatt utgangspunkt i at dei fleste elevane vil gå ut frå at alt dusjvatnet vert varma opp, og at oppgåva dermed ikkje involverer kategori C. Dersom ein løyser denne oppgåva på andre måtar kan det involvere ulike prosessar. Viss elevane for eksempel tek omsyn til blandebatteriet og berre reknar på temperaturendring for vatnet frå varmtvasstanken, må dei lage ein modell for å finne ut av dette (kategori C). Det er også mogleg å lage eit uttrykk for dusjprisen som funksjon av tid (kor lenge ein dusjar), vassmengd og/eller temperaturen for vatnet. På denne måten vil alle dei fire kategoriane kunne vere relevante.

Diskusjon

Den viktigaste delen av matematisk modellering inneber å omforme og omsetje eit problem frå den verkelege verda til ei matematisk form, for vidare å kunne løyse problemet (Stillman, 2015). Resultata frå fleire studiar tyder på at det er lagt lite vekt på denne delen av matematisk modellering i matematikkoppgåver i lærebøker og på eksamen (Berget, 2022; Frejd, 2011; Gatabi et al., 2012; Jessen & Kjeldsen, 2021; Urhan & Dost, 2018), og at denne delen er utfordrande for elevar (Wijaya et al., 2014). Å gjere forenklingar og bestemme føresetnader er kanskje ikkje like opplagt ein del av matematikkfaget som å setje opp ei utrekning eller lage eit matematisk uttrykk. Som det er presisert i PISA-rammeverket frå 2012, er det i ein testsituasjon ikkje lagt til rette for å utfordre elevar til å gjennomføre heile modelleringsprosessen, men ulike oppgåver vil teste ulike delar (OECD, 2013). Oppgåvene knytte til å *kjenne igjen og formulere* skal til saman utfordre elevane på alle dei ulike *handlingane* som er skildra i tabell 1. At ingen av PISA-oppgåvene krev at elevane skal gjere forenklingar eller bestemme føresetnader, er derfor overraskande. Å gjere forenklingar er eksplisitt uttrykt som ein del av modelleringsprosessen i syklusen til Blum og Leiss,

slik som vist i figur 3. Dersom elevar berre får oppgåver der forenklingar allereie er gjorde, vil dei ikkje få erfaringar dei treng for å løyse problemstillingar frå kvardagslivet. For å løyse den opne dusj-oppgåva i figur 1 er det å gjere forenklingar og bestemme føresetnader avgjerande for om ein klarer å kome vidare i prosessen. Ei hovudutfordring i matematisk modellering kan vere at ein ikkje veit korleis ein skal starte. Det er så mange ulike vegar ein kan gå, og ein har ikkje fått noko kompass å navigere med (Blomhøj & Jensen, 2003). Elevar må derfor få erfaring med å takle «rotete» kvardags-situasjonar i matematikkopplæringa for sjølve å kunne bruke matematikkunnskapane sine i livet (Boaler, 2001).

Det kan vere fleire moglege forklaringar på kvifor å forenkla og bestemme føresetnader ikkje er testa i PISA-oppgåvene. Ei årsak kan vere at det er vanskeleg å vurdere kva som er rett eller feil på slike oppgåver, og ei anna årsak kan vere at slike oppgåver kan krevje ikkje-matematiske kunnskapar. Dersom kjennskap til konteksten er avgjerande for at elevane klarer å løyse oppgåva, testar oppgåva også noko anna enn matematiske kunnskapar. For å gi eit eksempel på dette viser vi i figur 14 ei oppgåve som krev at elevane bestemmer ein føresetnad, nemleg kor mange publikummarar det er per kvadratmeter på ein utseld rockekonsert. Denne oppgåva vart brukt i utprøvinga til PISA 2003, men var ikkje med i sjølve undersøkinga.

ROCKEKONSERTEN	
Oppgave 1: ROCKEKONSERTEN	M552Q01 - 019
På en rockekonsert ble et rektangulært jorde på 100 m ganger 50 m satt av til publikum. Konserten var helt utsolgt, og jordet var fullt av stående fans.	
Hvilket av alternativene under viser det mest sannsynlige antallet personer som hørte på konserten?	
A 2 000	
B 5 000	
C 20 000	
D 50 000	
E 100 000	

Figur 14. Tidlegare friggitt PISA-oppgåve frå utprøvingfasen før PISA 2003

Det viste seg at det vanlegaste svaret i utprøvinga var alternativ B. Ei årsak kan vere at elevar ofte i tekstoppgåver der to tal er oppgitt, skal utføre ein rekneoperasjon. Sidan eitt av svaralternativa nettopp var produktet av dei to tala som var oppgitt i oppgåva, kan det vere ei årsak

til at mange valde det svaret (Blum, 2015). I oppgåva var alternativ C meint som det mest sannsynlege, altså at det står fire personar per kvadratmeter. For å kunne gjere denne vurderinga må elevane ha erfaring med rockekonsertar, eller i alle fall ha sett bilde av ein slik rockekonsert. Viss ein tenker sikkerheit, burde det kanskje ha vore opne område på det rektangulære jordet, slik at vakter kunne kome seg rundt. Då er det i overkant tett med eit snitt på fire personar per kvadratmeter på det rektangulære området, særleg om det var gjerda inn og det var fare for klemskadar mot gjerdet. Slike vurderingar kan også ha gjort at elevane svara alternativ B. Det kan vere utfordrande å formulere fleirvalsoppgåver når elevane skal gjere estimat for å kome fram til svaret. Dersom det skal vere eitt rett svar, må dei andre svara vere langt frå det som er meint å vere rett estimat. Dette fordi svar innanfor eit ganske breitt intervall kunne ha vore fornuftige.

Ei anna utfordring når ein skal måle den matematiske kompetansen til elevane, er at prøvene ofte må innehalde relativt mange oppgåver. Dette avgrensar kor omfattande oppgåvene kan vere. Eksamensoppgåvene i figur 7 og figur 8 er forholdsvis omfattande og tidkrevjande samanlikna med for eksempel PISA-oppgåvene. Analysen vår viser at sjølv slike oppgåver ikkje nødvendigvis involverer alle delar av modelleringsprosessen. Ifølgje vår analyse involverer ikkje eksamensoppgåva i figur 7 utfordringar knytte til prematematisering, sidan all informasjon er gitt i oppgåva og elevane ikkje treng gjere forenklingar eller bestemme føresetnader. Eksamensoppgåva i figur 8 er eit eksempel på ei oppgåve som involverer prematematisering. Her er det lagt opp til at elevane sjølve må bestemme mengda vatn og temperaturen på vatnet i dusjen. For at oppgåva i figur 7 skulle involvert prematematisering, kunne ho ha vore meir open ved å utelate noko relevant informasjon, for eksempel prisar på køyretimar, bensinprisar eller kor langt ein køyrer på ei vanleg veke.

Dagens eksamensordning gir ikkje elevane moglegheit til sjølv å finne informasjon som er relevant for å svare på oppgåva. Dette gjer at oppgåvene inneheld «kunstig» mykje informasjon. Denne ordninga avgrensar også kva slags informasjon ein kan forvente at elevane skal kunne gjere forenklingar av eller bestemme føresetnader for. Kan vi for eksempel forvente at alle elevar veit kva som er normal temperatur på vatnet i dusjen? Og korleis skal ein vurdere føresetnadene elevane gjer? Er eit svar som baserer seg på 40 grader, betre enn eit som baserer seg på 60 grader? Vil alle temperaturar mellom 10 og 70 grader vere «godkjente»?

Sjølvs om det kan vere utfordrande å inkludere dei første delane av modelleringsprosessen i oppgåver som skal brukast i skriftlege vurderingssituasjonar, er det likevel viktig å arbeide med slike oppgåver i undervisninga for at elevane skal utvikle heilskapleg modelleringskompetanse. Analysekategoriene i tabell 3 kan vere til hjelp for å bli bevisst på kva ein bør utsette elevane for i arbeid med desse første stega i ein modelleringsprosess. For at elevane skal få arbeide med å gjere forenklingar og bestemme føresetnader, må oppgåvene vere formulerte i ein rotete kvardagskontekst, der elevane kan ta ulike val for å kome fram til ei løysing på problemet. Dei må sjølve kunne bestemme kva som skal vere nøkkelvariablar og gjere greie for relevant informasjon. For at det skal vere rom for dette, må konteksten i oppgåva vere autentisk, slik at det er mogleg for elevane å innhente informasjon. Oppgåva i figur 12, «Trekanta mønster», har ein kontekst som ikkje er autentisk, og det vil derfor vere vanskeleg å gjere om denne oppgåva slik at elevane blir utsett for sjølv å skulle velje nøkkelvariablar og bestemme føresetnader.

Resultata av denne studien viser at forholdsvis mange PISA-oppgåver kravde at elevane måtte lage ein matematisk modell. Men i diskusjonane av analysekategoriene kom det fram at desse oppgåvene oftast var på eit lågt kognitivt nivå, for ein skulle stort sett bruke standard algoritmar og operasjonar. Om ein for eksempel ser på oppgåva «Skogareal» i figur 13, er utfordringa berre å rekne ut differansen mellom to tal for ulike land og samanlikne desse. Berre tre av oppgåvene i datamaterialet vårt kravde at elevane skulle setje opp eit generelt uttrykk. Om ein vil ta utgangspunkt i konteksten skogareal, som i oppgåva i figur 13, og utforme ei modelleringsoppgåve der elevane blir utfordra til også å gjennomføre dei første stega, kan ein for eksempel gjennomføre eit tverrfagleg prosjekt med naturfag om berekraft og utbygging. Ein kan bruke data frå Statistisk sentralbyrå om nedbygging av jordbruksareal eller stille spørsmål om utbygging av hyttefelt i myrområde. I utviklinga av den matematiske modellen må elevane sjølve innhente data og bestemme nøkkelvariablar. Dei må gjere forenklingar og bestemme føresetnader for vidare arbeid. Dersom ein bur i ein kommune der denne diskusjonen er aktuell, kan ein gjennom eit slikt prosjekt belyse samfunnsaktuell tematikk i lokalmiljøet. På den måten får elevane setje seg inn i eit naturfagleg tema og bruke matematisk modellering til grunn for argumentasjon om berekraft.

Konklusjon og implikasjonar

For å oppsummere kva elevane blir testa i når dei løyser oppgåver knytte til å *kjenne igjen og formulere* i PISA, vil vi løfte fram dette: Elevane blir oftast testa i å kjenne igjen matematiske strukturar, mønster og samanhengar, og dei blir i stor grad utfordra på å lage eller å kjenne igjen enkle matematiske modellar. Ut frå vår analyse av oppgåvene blir elevane ikkje testa i å gjere forenklingar eller i å bestemme føresetnader, og oppgåvene testar berre i liten grad evna til å finne relevant informasjon og å bestemme nøkkelvariablar. Desse resultatata viser at sjølv om det i PISA-rammeverket er uttrykt at ulike oppgåver testar dei ulike stega i modelleringsklusen, er det ikkje breidde i oppgåvene slik at alle *handlingane* innanfor å *kjenne igjen og formulere* er inkluderte i PISA-oppgåvene. Elevane blir ikkje testa i sjølve å ta avgjersler som kan føre til ulike løysingar på eit problem. Som nemnt er det viktig at elevane også blir utfordra i å takle «rotete» kvardagsproblem når dei arbeider med *matematikk for modelleringa sin del*. Vi trur at analyseskjemaet som vart utvikla knytt til PISA-oppgåver, kan vere nyttig for å bli bevisst på kva utfordringar som blir gitt i ulike modelleringsoppgåver. Resultatet frå analysane av PISA-oppgåvene viser veg på den måten at det peikar på at ein i undervisninga bør vere ekstra merksam på den første delen av modelleringsprosessen. Det låge samsvaret i vurderinga av nokre av kategoriane tyder på at det kan vere vanskeleg å skilje mellom dei, og at det kan vere nyttig for lærarar å gjere denne typen vurderingar av oppgåver saman.

Ved å passe på at elevane møter oppgåver som involverer dei utfordringane ein møter når ein skal bruke matematikk til å løyse eit problem frå det verkelege livet, vil elevane bli betre rusta til å ta i bruk matematikk utanfor klasserommet. For eksempel det å skulle rekne ut kva det kostar å ta ein dusj, som i oppgåva i figur 1, er truleg ikkje noko elevane treng å gjere i livet. Men ved å gjere det steg for steg og i fellesskap diskutere kva forenklingar dei skal gjere, og korleis dei kan hente inn data, kan dei bli merksame på kor samansett verkelegheita er, og at dei sjeldan kan kome fram til eitt fasitsvar på slike problemstillingar. Elevane erfarer då at svara etter å arbeide med matematisk modellering ofte startar med «det kjem an på, men ...». Ved å arbeide med matematisk modellering får elevar også erfaring med å forhalde seg kritisk til modellar presenterte i samfunnet, som ifølgje Niss og Jensen (2002) er ein del av matematisk modelleringskompetanse, og elevane utviklar seg dermed som kritiske borgarar som kan

komme med reflekterte argument i samfunnsdebattar. Det kan handle om økonomi og straumsparing, som vist i avisinnlegget i figur 1, eller oppgåver knytte til andre aktuelle problemstillingar.

Forfattarbiografiar

Ingeborg Lid Berget er tilsett som førsteamanuensis ved Høgskulen i Volda og underviser i matematikk i lærarutdanninga. Ho har doktorgrad om matematisk modellering i matematikkundervising og har tidlegare arbeid som lærar i den vidaregåande skulen. Berget har vore med som gjesteredaktør for eit spesialnummer om matematisk modellering i tidsskriftet *Tangenten* (2/2024).

Maria Løvgren er tilsett som seniorrådgivar ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo. Ho har ein mastergrad i matematikkdiraktikk og har arbeid som lærar på ungdomsskulen og i den vidaregåande skulen. Ho har arbeid med PISA-undersøkinga sidan 2020.

Andreas Pettersen er forskar ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo. Han har ein doktorgrad i matematikkdiraktikk og har arbeid med PISA-undersøkinga sidan 2017. Pettersen har gitt ut fleire artiklar om matematikkdiraktikk og vore redaktør for boka *Equity, Equality and Diversity in the Nordic Model of Education* (gjeven ut på Springer i 2020).

Referansar

- Berget, I. K. L. (2022). Mathematical modelling in textbook tasks and national examination in Norwegian upper secondary school. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 27(1), 51–70.
- Berget, I. K. L. & Bolstad, O. H. (2019). Perspektiv på matematisk modellering i Kunnskapsløftet og Fagfornyinga. *Nordisk tidsskrift for utdanning og praksis*, 13(1), 83–97. <https://doi.org/10.23865/up.v13.1882>
- Blomhøj, M. & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 22(3), 123–139. <https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123>
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? I S. J. Cho (Red.), *The proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (s. 73–96). Springer.
- Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1, 45–58.

- Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? I C. Haines, *Mathematical modelling: Education, engineering and economics* (s. 222–231). Horwood.
- Boaler, J. (2001). Mathematical modelling and new theories of learning. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 20(3), 121–128. <https://doi.org/10.1093/teamat/20.3.121>
- Bolstad, O. H. (2020). *Teaching and learning for mathematical literacy* [Doktorgradsavhandling, Universitetet i Agder]. AURA. <https://hdl.handle.net/11250/3072702>
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer International Publishing AG.
- Cohen, J. (1960). A coefficient of agreement for nominal scales. *Educational and Psychological Measurement*, 20(1), 37–46. <https://doi.org/10.1177/001316446002000104>
- Frejd, P. (2011). An investigation of mathematical modelling in the Swedish national course tests in mathematics. I M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Red.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 947–956). University of Rzeszów.
- Frejd, P. & Ärlebäck, J. B. (2011). First results from a study investigating Swedish upper secondary students' mathematical modelling competencies. I G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Red.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling ICTMA 14* (s. 407–416). Springer.
- Gatabi, A. R., Stacey, K. & Gooya, Z. (2012). Investigating grade nine textbook problems for characteristics related to mathematical literacy. *Mathematics Education Research Journal*, 24(4), 403–421. <https://doi.org/10.1007/s13394-012-0052-5>
- Gjone, G. (1996). *Matematikkhistorie i miniatyr*. Caspar forlag.
- Jankvist, U. T. & Niss, M. (2020). Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(4), 467–496. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1587530>
- Jensen, T. H. (2007). Assessing mathematical modelling competency. *Mathematical modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics*, 141–148. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.3.141>
- Jessen, B. E. & Kjeldsen, T. H. (2021). Mathematical modelling in scientific contexts and in Danish upper secondary education: Are there any relations? *Quadrante*, 30(2), 37–57. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23658>
- Kaiser, G. (2020). Mathematical Modelling and Applications in Education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 553–561). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_101
- Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)*. Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/mat01-05>
- Kyrkje- og undervisningsdepartementet. (1987). *Mønsterplan for grunnskolen, M87*. Aschehoug.
- Landis, J. R. & Koch, G. G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics*, 159–174.
- Lesh, R. A. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. I F. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 763–802). Information Age Publishing.
- Niss, M. & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/97813151893145>
- Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. I P. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (s. 3–32). Springer.
- Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring*. Undervisningsministeriets forlag.
- O'Connor, C. & Joffe, H. (2020). Intercoder reliability in qualitative research: Debates and practical guidelines. *International Journal of Qualitative Methods*. <https://doi.org/10.1177/1609406919899220>

- OECD. (2004). *The PISA 2003 assessment framework*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264101739-en>
- OECD. (2013). *Assessment and analytical framework*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264190511-en>
- OECD. (2023a). *PISA 2022 Assessment and analytical framework*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en>
- OECD. (2023b). *PISA 2022 results (Volume I). The state of learning and equity in education*. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- Plath, J. & Leiss, D. (2018). The impact of linguistic complexity on the solution of mathematical modelling tasks. *ZDM*, 50(1), 159–171. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0897-x>
- Senneset, M. K. & Pettersen, A. (2024). Hvordan argumenterer norske elever i matematikk? En analyse av 15-åringers besvarelser på tre oppgaver fra PISA 2022. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 111–138). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch5>
- Stillman, G. A. (2015). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt? I S. J. Cho (Red.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (s. 791–805). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_44
- Urhan, S. & Dost, S. (2018). Analysis of ninth grade mathematics course book activities based on model-eliciting principles. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16, 985–1002. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9808-4>
- Utdanningsdirektoratet. (2023, 22. mai). *Eksamen MAT0015 Matematikk Del 2*. Utdanningsdirektoratet. <https://www.udir.no/eksamen-og-prover/eksamen/>
- Utdanningsdirektoratet. (2024, 21. mai). *Eksamen Del 2 MAT0015 Matematikk*. Utdanningsdirektoratet. <https://www.udir.no/eksamen-og-prover/eksamen/>
- Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., Doorman, M. & Robitzsch, A. (2014). Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors. *The Mathematics Enthusiast*, 11(3), 555–584. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1317>

KAPITTEL 5

Hvordan argumenterer norske elever i matematikk? En analyse av 15-åringers besvarelser på tre oppgaver fra PISA 2022

Marte K. Senneset Universitetet i Oslo

Andreas Pettersen Universitetet i Oslo

Sammenheng: Det finnes en del tidligere forskning som har vist at skriftlig argumentasjon er krevende for elever (Evens & Houssart, 2004; Healy & Hoyles, 2000; Kosko & Zimmerman, 2017; Nippold & Ward-Lonergan, 2010). Likevel er det få studier som har undersøkt norske elevers skriftlige argumentasjon. Denne studien tar utgangspunkt i omtrent 2 500 besvarelser fra norske elever (15 år) på tre oppgaver fra PISA 2022. I oppgavene skulle elevene vurdere om en påstand er sann og gi en skriftlig begrunnelse for hvorfor eller hvorfor ikke. Formålet med studien er å undersøke karakteristikker ved elevenes skriftlige argumenter i disse oppgavene. Besvarelsene ble gruppert ut fra karakteristikker ved elevenes argumenter gjennom en induktiv kodeprosess.

Kun en liten andel av besvarelsene ble vurdert til å inneholde et gyldig argument, noe som kan tyde på at det å argumentere skriftlig på denne typen oppgaver er krevende for norske elever. For de andre gruppene av besvarelser, finner vi blant annet argumenter med språklige uklarheter, argumenter som bygger på feil eller på misforståelser av oppgaven, og besvarelser som kun gjengir informasjon som er gitt i oppgaveteksten. De ulike karakteristikkene ved besvarelsene i gruppene tyder på at elevene strever med ulike sider ved det å legge fram et skriftlig argument. Videre viser resultatene at fordelingen av besvarelser i de ulike gruppene varierer på tvers av de tre oppgavene, noe som tyder på at oppgavens utforming påvirker hvilke typer feil eller mangler som oppstår i elevenes argumentasjon. Kapittelet diskuterer hvorvidt den lave andelen gyldige argumenter delvis kan skyldes at mange elever mangler kunnskap om hva som kjennetegner et gyldig argument.

Nøkkelord: resonnering og argumentasjon, skriftlig argumentasjon, PISA 2022, skriving i matematikk

Sitering: Senneset, M. K. & Pettersen, A. (2024). Hvordan argumenterer norske elever i matematikk? En analyse av 15-åringers besvarelser på tre oppgaver fra PISA 2022. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (Kap. 5, s. 111–138). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch5>

Lisens: CC-BY 4.0

Abstract: Although previous research has shown that written argumentation is challenging for students (Evens & Houssart, 2004; Healy & Hoyles, 2000; Kosko & Zimmerman, 2017; Nippold & Ward-Lonergan, 2010), few studies have examined the written argumentation of Norwegian students. This study analyzed approximately 2,500 responses from 15-year-old Norwegian students on three tasks from PISA 2022. In these tasks, students were asked to assess whether a statement was true and provide a written justification explaining why or why not. The aim of the study was to investigate the characteristics of students' written arguments in these tasks. The responses were grouped based on the characteristics of the students' arguments using an inductive coding process.

Only a small fraction of the responses was deemed to contain a valid argument, suggesting that formulating written arguments for these types of tasks is challenging for Norwegian students. Among the other groups of responses, we found arguments with ambiguous use of language, arguments based on misunderstandings or errors related to the task, and responses that simply repeat information given in the task. These various characteristics indicate that students struggle with different aspects of providing a written argument. Furthermore, the results show that the distribution of responses among the different groups varied across the three tasks, indicating that the task design affects the types of errors or deficiencies that arise in students' arguments. The chapter discusses whether the low proportion of valid arguments may partly be due to many students lacking an understanding of what constitutes a valid argument.

Keywords: reasoning and argumentation, written argumentation, PISA 2022, writing in mathematics

Resonnering og argumentasjon sees på som en grunnleggende og sentral del av det å bruke matematikk og utvikle matematisk forståelse (Ball & Bass, 2003). I forskningslitteraturen blir resonnering og argumentasjon løftet fram som en viktig del av matematisk kompetanse i flere kompetanserammeverk. For eksempel er det å kunne resonnerere matematisk en av åtte delkompetanser for matematisk kompetanse i KOM-rammeverket (Niss & Højgaard, 2019; Niss & Jensen, 2002) og utgjør en av fem komponenter i Kilpatrick et al.s (2001) rammeverk for matematisk kompetanse (*mathematical proficiency*).

Selv om resonnering og argumentasjon lenge har vært en viktig del av skolematematikken, er det først i den nyeste læreplanen i matematikk i Norge (LK20) at dette framheves matematisk som en del av «det viktigste faglige innholdet elevene skal arbeide med i opplæringen» (Kunnskapsdepartementet, 2019), ved at det er formulert som et *kjerneelement*: «Resonnering og argumentasjon». Resonnering og argumentasjon blir dermed i norsk skolesammenheng sett på som en grunnleggende del av det som skal til for å mestre matematikk. Kjerneelementet «Resonnering og argumentasjon» beskriver blant annet at elevene skal utvikle evner til å følge matematiske tankerekker, og at de skal forstå at regler i matematikk ikke er tilfeldige, men er basert på «klare begrunnelser». Den framtreddende rollen resonnering og argumentasjon spiller i læreplanen er gjenspeilet i eksamen. På matematikk eksamen på 10. trinn i 2024 er det lagt opp til at elevene skal resonnerere og argumentere for svarene sine på flesteparten av oppgavene.¹ Matematikkoppgaver hvor elevene skal argumentere for hvorfor et svar er riktig, involverer gjerne flere sider ved deres matematisk kompetanse. Eleven må i slike oppgaver ofte gjøre en beregning eller en utregning som viser ens matematiske forståelse, eller tolke og forstå matematiske begreper. I tillegg må eleven legge fram et skriftlig argument, basert på utregningen, som overbeviser leseren om hvilket valg som er best og hvorfor. Dette krever at elevene kan kommunisere skriftlig, med matematisk språk og matematiske begreper og representasjoner. I tillegg krever det at elevene vet hva et gyldig argument er. Det er også viktig at argumentet forankres i relevante matematiske egenskaper (Lithner, 2008; Niss & Højgaard, 2019).

Flere internasjonale studier har vist at skriftlig argumentasjon er krevende for elever (Evens & Houssart, 2004; Kosko & Zimmerman, 2017;

1 Matematikk eksamen finnes på <https://www.matematikk.net/side/Eksamensoppgaver>

Nippold & Ward-Lonergan, 2010), selv for høytpresterende elever (Healy & Hoyles, 2000). Det er derimot begrenset kunnskap om norske elevers skriftlige argumentasjon i matematikk. I denne studien ønsker vi å bidra til mer kunnskap om dette ved å analysere norske 15-åringers besvarelser på tre matematikkoppgaver fra Programme for International Student Assessment (PISA) 2022, hvor elevene skal vurdere om en påstand er riktig eller ikke, samt begrunne hvorfor. Hensikten med studien er å undersøke karakteristikk ved norske elevers skriftlige argumenter på denne typen oppgaver.

Resonnering og argumentasjon i matematikk

For å utvikle forståelse i matematikk, trenger vi å *resonnere* (Ball & Bass, 2003). Det vi greier å resonnerer oss fram til, vil i stor grad danne grunnlaget for vår matematiske forståelse. Men hva betyr det egentlig å resonnerer i matematikk? Når vi tenker på hva det vil si å resonnerer, tenker vi kanskje på «det å tenke seg fram til noe». Matematisk resonnering kan forstås som en slik prosess: å tenke seg fram til en konklusjon i møte med en matematisk oppgave eller et problem. Underveis i prosessen, for å underbygge det som framkommer i tankerekken man gjør, kan det også tas i bruk argumenter (Lithner, 2008). Dermed ser man også at resonnering i stor grad henger sammen med *argumentasjon*. Argumentasjon blir ansett som en sentral del av det å resonnerer, der det både i formelle og uformelle sammenhenger blir vektlagt å argumentere og begrunne tankeganger (Niss & Højgaard, 2019).

Matematisk resonnering blir i forskningsfeltet forstått og brukt på ulike måter. Resonnering kan være tankeprosessen, produktet av tankeprosessen, eller begge deler, hevder Lithner (2008). Jeannotte og Kieran (2017) fant at resonnering i forskningslitteraturen ser ut til å i hovedsak dreie seg om to aspekter: ett om de strukturelle ved resonnering, og ett om resonnering som prosess. Innen det strukturelle aspektet er matematisk resonnering noe mer ordnet og systematisk, og deles ofte i tre ulike typer: abduktiv, induktiv og deduktiv resonnering. Matematisk resonnering koples slik til en struktur bygget opp av ulike elementer, hvor hvert element henger sammen og er ordnet som et system (Jeannotte & Kieran, 2017). Resonnering kan også sees som prosess, ifølge Jeannotte og Kieran (2017). De beskriver et skille i forskningslitteraturen mellom om man er opptatt av resonnering som prosesser i tilknytning til å se etter forskjeller og ulikheter (for eksempel å generalisere, begrunne, se etter mønstre, å sammenlikne), eller om man ser på prosesser knyttet til validering (å rettferdiggjøre, å bevise). Det er

anerkjent i litteraturen at det kan være utfordrende å få informasjon om noens matematiske resonnering, og noen forskere anser derfor resonnering heller som et produkt som kan gi oss et hint om hva som har foregått i prosessen (Jeannotte & Kieran, 2017).

Innen skoleforskning oppfatter de fleste matematisk resonnering som noe som har å gjøre med såkalt høyere ordens tenkning (*higher-order thinking*) (Lithner, 2008). Niss og Højgaard (2019) beskriver ulike typer matematisk kompetanse elever bør tilegne seg. Her skildrer de resonneringskompetanse som det å kunne lage argumenter, enten på muntlig eller skriftlig form, for å grunngi en konklusjon. Både Lithner (2008) og Niss og Højgaard (2019) framhever viktigheten av at matematisk resonnering ikke bare innebærer å tenke logisk og plausibelt, men at det også bør forekomme matematisk *forankring* eller substans. En slik forankring betyr at resonneringen man gjør er grunnfestet i matematiske egenskaper som er relevante for problemet eller oppgaven man står overfor.

Lithner (2008) trekker fram at en fruktbar resonneringssekvens kjenne- tegnes av at den er *ny* for den som resonnerer, og at det framlegges *plausible* argumenter som har *matematisk forankring*; at de er forankret i «indre» matematiske egenskaper (Lithner, 2008). Slik resonnering sees utviklende for dybdelæring, og er i stor grad knyttet til utviklingen av relasjonell forståelse (Skemp, 1978). I vurderingen av om et resonnement har matematisk forankring, vil det være relevant å undersøke hvilke matematiske egenskaper som finnes i konteksten, for eksempel i en matematikkoppgave. Her skiller Lithner (2008) mellom overflatiske (*surface*) egenskaper og indre eller reelle (*intrinsic*) egenskaper. Ser man for eksempel på brøkgregning, vil en overflatisk egenskap kunne være hvor store tallene er, mens delestreken representerer en indre egenskap. Ser man bare på hvor store tall er, og ikke tar delestreken i betraktning, vil for eksempel $51/100$ kunne oppfattes som et mye større tall enn $4/5$. Delestreken blir slik en indre, matematisk egenskap ved en brøk. Lithner (2008) peker videre på at validiteten til et argument i slik oppgaveløsning vil avhenge av tre faktorer: dets gyldighet, evnen til å overbevise, og «konstruktivitet» (gjøre en vurdering av resultatet).

Argumenterende skriving i matematikk

Skriving i matematikk er vektlagt i den norske læreplanen ved at det fremheves som en grunnleggende ferdighet elever skal tilegne seg i matematikkfaget (Kunnskapsdepartementet, 2019). Viktigheten av å skrive i

matematikk er anerkjent i forskningslitteraturen, men mye av forskningen på skrivning i matematikk er knyttet til elevers skriftlige forklaringer eller beskrivelser av deres tankegang innenfor problemløsning (Kosko & Zimmerman, 2017). Når det kommer til studier som har sett på elevers skriftlige argumentasjon, bygger mye av dette på Toulmins (1958) modell, hvor et argument brytes ned til tre grunnleggende komponenter: *claim* (det man påstår i argumentet), *data* (datagrunnlaget som støtter argumentet) og *warrant* (resonnementet som utgjør overgangen mellom datagrunnlaget og påstanden).

Resonnement og argumentasjon omfatter i matematikdidaktikk en bredde av konsepter og begreper, hvor resonnering kan sees både som noe formelt (for eksempel en strengt logisk argumentasjon) eller som noe mer uformelt («en tankerekke», Lithner, 2008). Av denne grunn er også forskning på elevers skriftlige resonnementer og argumentasjon gjort på ulike måter. Flere studier undersøker hvordan elever skriver bevis, hvor et eksempel på dette er en studie av Bleiler et al. (2013), som undersøkte hvordan et utvalg lærere vurderte videregående-elevers induktive bevisføring. Rø og Arnesen (2020) så i sin studie på hvordan lærerstudenter argumenterte ved bruk av «generiske eksempler». Ved hjelp av Toulmins (1958) modell for argumentasjon undersøkte de hvordan lærerstudentene brukte de såkalte generiske eksemplene til å bevise en matematisk påstand.

I tillegg til studier av elevers skriftlige bevisføring, er det flere studier som har undersøkt resonnering ut fra elevenes skriftlige begrunnelser og argumenter. Evens og Houssart (2004) analyserte engelske 11-åringers svar på en oppgave hvor de skulle vurdere om en påstand var riktig og gi en forklaring for hvordan de visste det. De fant at mange av elevene så ut til å forstå oppgavens matematiske utfordring, men ikke klarte gi en egnet forklaring. Dette handlet for eksempel om at elevene var upresise i forklaringene eller manglet viktige steg i argumentet. De fant også at mange av elevene kun gjentok informasjonen gitt i oppgaven og at de forstod mer enn svarene ga uttrykk for. Kosko og Zimmerman (2017) undersøkte de skriftlige argumentene til yngre elever (5–9 år) som løste ulike oppgaver bestående av spørsmål og utsagn elevene skulle svare på og begrunne. I disse oppgavene fikk elevene beskjed om å svare ved å både forklare og tegne. Kosko og Zimmerman (2017) fant at også barnehagebarn kan gi matematiske skriftlige argumenter, og at det er mulig å skille mellom ulike typer argumenter med ulike kvaliteter også i denne aldersgruppen. De fant videre at elevenes matematisk skrivning ble mer sofistisert på høyere klassetrinn.

Banes (2017) undersøkte i sin doktorgrad hvordan oppgavers utforming kan påvirke hvorvidt elevene evner å gi gode skriftlige argumenter og hvilken type argumenter elevene gir. Hun fant at oppgaver hvor påstanden som var gitt var mindre krevende enn oppgaver hvor elevene selv skulle formulere en påstand. Videre fant hun at oppgaver som gir elevene informasjon om formålet med svaret eller hva et godt svar bør inneholde (for eksempel «bruk plassverdi i forklaringen» og «legg fram bevis som overbeviser meg om hvem som har rett»), gjør det mer sannsynlig at elevene klarer å gi et gyldig svar enn når denne typen informasjon ikke er gitt (for eksempel «forklar hvorfor eller hvorfor ikke»). Banes (2017) fant også at det å gi informasjon om *hvem* elevene skal forklare til, for eksempel en medelev eller læreren, kan være motiverende og støttende for elevene.

I norsk sammenheng er det gjort lite forskning på hvordan elever argumenterer skriftlig i matematikk når de løser oppgaver. Det er derfor lite kunnskap om i hvilken grad norske elever mestrer å legge fram skriftlige argumenter og eventuelt hvilke utfordringer elever har med dette.

Resonnering og argumentasjon i PISA 2022

I PISA 2022 har matematisk resonnering fått en mer sentral rolle enn i de tidligere undersøkelsene og utgjør en av de fire matematiske prosessene i matematikkrammeverket (OECD, 2023a). I rammeverket er matematisk resonnering beskrevet som både deduktiv og induktiv resonnering. Begge disse formene for resonnering er viktige for problemløsning og matematisk modellering, som er kjernen av matematisk kompetanse i PISA. I tillegg er matematisk resonnering beskrevet som det å vurdere argumenter, tolkninger og slutninger knyttet til utsagn og løsninger som er «kvantitative», og å lage argumenter (OECD, 2023a).

I PISA 2022 var det 54 matematikkoppgaver (av totalt 234 oppgaver) som skulle måle elevenes evne til å resonnerere. Noen av disse resonneringsoppgavene var utformet slik at elevene skulle vurdere en matematisk påstand eller et spørsmål og gi en skriftlig begrunnelse for hvorfor dette var, eller ikke var, sant. Da elevsvarene på disse oppgavene ble vurdert, ble det gjort skjønnsmessige vurderinger av elevsvarene for å avgjøre om svaret skulle «godkjennes» og gis poeng eller ikke. Dette gjøres i tråd med en kodeguide som beskriver hvilke typer svar som godkjennes (OECD, 2023c, vedlegg C). For de fleste oppgavene ble elevsvarene kodet som enten godkjent eller ikke godkjent, mens for noen av oppgavene ble elevsvarene også kodet som delvis

godkjent. I denne kodingen skilles det hovedsakelig mellom elevsvar som tyder på at elevene har den matematiske forståelsen eller kunnskapen som oppgaven krever og elevsvar som ikke viser en slik forståelse. Dette er hensiktsmessig ut fra PISA-undersøkelsens summative formål: å måle elevenes kompetanse. Resultatene av denne kodingen gir derimot lite informasjon om kjennetegn eller karakteristikk ved elevenes skriftlige argumenter på disse oppgavene, for eksempel argumentets gyldighet, den matematiske forankringen og hvorvidt språket er korrekt og tydelig.

Vår studie

I denne studien undersøker vi norske 15-åringers skriftlige argumentasjon på tre oppgaver fra PISA 2022. Formålet med studien er å få kunnskap om hvordan norske elever argumenterer skriftlig i matematikk. Vi ønsker å besvare følgende forskningsspørsmål:

Hvilke karakteristikk preger norske elevers skriftlige argumenter på tre oppgaver i PISA 2022?

Vi ser på argumentasjon som en sentral del av resonnering, som kan være både formell og uformell, hvor plausibilitet, evnen til å overbevise og matematisk forankring er viktige egenskaper ved et gyldig argument (Lithner, 2008).

Datamaterialet og koding av elevsvar

Omtrent 8 500 norske elever deltok i PISA 2022. PISA-undersøkelsen måler 15-åringers kompetanse i matematikk, lesing og naturfag, og bestod av et representativt utvalg elever som hovedsakelig gikk på 10. trinn.

Vår studie tok utgangspunkt i 795, 959 og 695 elevsvar på de tre oppgavene «Trekantet mønster» (figur 1), «Poeng» (figur 2) og «Skogareal» (figur 3) fra PISA 2022. I disse tre oppgavene ble elevene presentert for en påstand eller et spørsmål som de skulle vurdere om var riktig, og hvor de ble bedt om å begrunne svaret sitt. Dette kan sees på som en type matematisk argumenterende skrivingsoppgaver (*mathematical argumentative writing tasks*) (Banes, 2017). De tre oppgavene har blitt frigitt etter gjennomføringen av undersøkelsen, noe som gjør det mulig å presentere både oppgavene og eksempler på elevsvar. De aller fleste oppgavene fra

undersøkelsen blir ikke frigitt, fordi de skal brukes videre i de neste PISA-undersøkelsene for å kunne måle endringer i resultater over tid. Videre beskriver vi først de tre PISA-oppgavene og elevsvarene på oppgavene, deretter prosessen med å kode og gruppere elevsvarene.

Oppgaven «Trekantet mønster»

Oppgaveenheten «Trekantet mønster» bestod av tre oppgaver. I alle de tre oppgavene ble elevene vist en figur av et mønster bestående av fire rader med røde og blå trekkanter. Det var i den tredje og siste oppgaven innenfor denne oppgaveenheten at elevene skulle vurdere en påstand og gi en begrunnelse (figur 1). Den første oppgaven spurte om hvor mange prosent av trekantene som er blå i de fire første radene i mønsteret, mens den andre oppgaven spurte om hvor mange prosent av trekantene som vil være blå hvis mønsteret utvides med en femte rad. I den tredje oppgaven sa oppgaveteksten at Adil skal legge til flere rader i mønsteret, og påstanden elevene skal vurdere er «prosentandelen blå trekkanter i mønsteret alltid vil være mindre enn 50 %» (figur 1). Elevene skulle velge «Ja» eller «Nei» for om påstanden er rett, og gi en begrunnelse for svaret.

The screenshot shows the PISA 2022 interface for the task «Trekantet mønster». On the left, the task title and question number are displayed. The main text describes the task: Adil is adding more rows to a triangle pattern. The pattern consists of 4 rows of triangles. The first row has 1 red triangle, the second row has 2 blue triangles, the third row has 3 red triangles, and the fourth row has 4 blue triangles. The question asks if the percentage of blue triangles in the pattern will always be less than 50% if more rows are added. The interface includes a calculator icon, a question mark icon, and navigation arrows. The right side of the interface shows the title «TREKANTET MØNSTER» and the text «Adil tegnet det følgende mønsteret med røde og blå trekkanter. De første fire radene i mønsteret er vist nedenfor.» Below this text is a diagram of the triangle pattern on a yellow background with blue horizontal lines. The pattern is a large triangle composed of smaller triangles. The first row has 1 red triangle, the second row has 2 blue triangles, the third row has 3 red triangles, and the fourth row has 4 blue triangles. To the right of the diagram are two pens, one blue and one red.

Figur 1. Oppgave 3 i oppgaveenheten «Trekantet mønster» fra PISA 2022

Denne oppgaven krevde at elevene kunne analysere mønsteret og finne sammenhengen mellom antall blå og røde trekkanter i hver rad. Det riktige svaret er «Ja», og for at argumentet skulle være gyldig, måtte elevene vise til at det er flere røde enn blå trekkanter som legges til i hver rad. Eksempler på typiske elevsvar som ble vurdert som gyldige argumenter er «Det er alltid en mer rød trekant enn blå trekant i hver rad» og «Dette er fordi hver rad har mer røde enn blå trekkanter».

Oppgaven «Poeng»

Oppgaveenheten «Poeng» bestod av kun én oppgave (figur 2). Elevene ble vist en nyhetsartikkel om et basketballag, hvor det oppgis at laget vant alle kampene sine denne sesongen og at de vant med en gjennomsnittlig seiersmargin på 19 poeng. I oppgaveteksten er det også beskrevet hva seiersmargin betyr. Her skulle elevene vurdere om det er mulig at laget faktisk aldri vant en kamp med 19 poeng.

The screenshot shows the PISA 2022 interface for the 'Poeng' task. The interface is in Norwegian and contains the following elements:

- Header:** PISA 2022, a progress bar, a clock icon, a calculator icon, a question mark icon, and navigation arrows.
- Task Title:** Poeng
- Question:** Spørsmål 1 / 1
- Instructions:** Les "Poeng" til høyre. Svar på spørsmålet ved å klikke på et av alternativene, og begrunn deretter svaret ditt.
- Text:** Ut fra den gjennomsnittlige seiersmarginen for denne sesongen, er det mulig at laget faktisk aldri vant en kamp med 19 poeng?
- Options:**
 - Ja
 - Nei
- Response Area:** Begrunn svaret ditt. (A large empty text box for the student's answer.)
- Article Content:**
 - Title:** ZEDLAND TIDENDE
 - Text:** I lokalavisa stod følgende overskrifter om Zedlands basketballag.
 - Section:** Basketballaget vant tittelen!
 - List:**
 - Vant alle kampene denne sesongen.
 - Gjennomsnittlig seiersmargin var på 19 poeng denne sesongen.
 - Image:** A photograph of basketball players in action on a court.
 - Definition:** Seiersmargin er differansen mellom det antallet mål vinnerlaget scoret og det antallet mål det tapende laget scoret i en kamp.

Figur 2. Oppgaveenheten «Poeng» fra PISA 2022

Oppgaven krevde forståelse av begrepet *gjennomsnitt*, og at elevene kunne bruke denne forståelsen til å vurdere hypotesen/påstanden som er oppgitt. Det riktige svaret er «Ja», at det er mulig, med en begrunnelse som viser

til at gjennomsnittet ikke trenger å være et av tallene i datamengden som er brukt til å regne ut gjennomsnittet. Begrunnelser som viste at dette var mulig med talleksempler ble også vurdert som gyldige. Eksempler på typiske elevsvar som ble vurdert som gyldige er «ja det er mulig, de kunne vunnet noen kamper under 19 og noen over 19 også har gjennomsnittet blitt 19» og «de kan ha vunnet 18 og 20 poeng og likevel fått 19 i gjennomsnitt».

Oppgaven «Skogareal»

Oppgaveenheten «Skogareal» bestod av fire oppgaver. Oppgaveenheten ga først elevene litt bakgrunnsinformasjon om temaet, at størrelsen på skogarealet i et land kan endre seg over tid, og deretter en øvelse, slik at elevene skulle bli kjent med hvordan regnearket fungerte. I de tre første oppgavene ble det lagt opp til at elevene skulle bruke regnearket til å gjøre utregninger for å svare på spørsmål. I det fjerde spørsmålet, som vises i figur 3, ble elevene presentert for følgende påstand: «Helene hevder at Sør-Korea har større skogareal enn noen av de andre landene på lista for de årene som vises.» Elevene skulle svare «Ja» eller «Nei» på om informasjonen i regnearket støtter denne påstanden og gi en begrunnelse for svaret sitt.

PISA 2022

Skogareal
Spørsmål 4 / 4

Hvordan bruke regnearket

Les «Skogareal» til høyre. Bruk regnearket for å svare på spørsmålet nedenfor. Svar på spørsmålet ved å klikke på et alternativ, og begrunn deretter svaret ditt.

Helene hevder at Sør-Korea har større skogareal enn noen av de andre landene på lista for de årene som vises.

Kan informasjonen i regnearket støtte påstanden hennes?

Ja
 Nei

Begrunn svaret ditt.

SKOGAREAL

Regnearket nedenfor viser andelen skogareal, i prosent av det totale landarealet, i hvert av de 15 landene i dette datasettet. Dataene vises for årene 2005, 2010 og 2015.

Land	2005	2010	2015
Algerie	0,64	0,81	0,82
Armenia	11,77	11,74	11,77
Colombia	54,26	52,85	52,73
Hellas	29,11	30,28	31,45
India	22,77	23,47	23,77
Kasakhstan	1,24	1,23	1,23
Libanon	13,34	13,38	13,42
Panama	64,33	63,21	62,11
Peru	59,01	58,45	57,79
Portugal	36,52	35,89	35,25
Senegal	45,05	44,01	42,97
Sør-Korea	64,42	64,08	63,69
Thailand	31,51	31,81	32,1
Tyskland	32,66	32,73	32,76
USA	33,26	33,7	33,85

Regn ut

Kolonne Operasjon Kolonne Kjør

Gjennomsnitt Kolonne Kjør Nullstill

Figur 3. Oppgave 4 i oppgaveenheten «Skogareal» fra PISA 2022

Selv om Sør-Korea var landet med størst verdier i tabellen for hvert av de tre årene, viste disse verdiene til prosentandel skogareal i hvert land. Denne informasjonen kunne derfor ikke bli brukt til å si noe om den faktiske mengden skogareal i hvert land. Riktig svar er derfor «Nei», med en begrunnelse som antyder at regnearket viser prosent skogareal av landets totale areal, og ikke størrelsen på skogarealet. Dette krever kunnskap om prosent og at prosent i denne sammenhengen gir en relativ sammenlikning, en del av en helhet, som avhenger av størrelsen på landets areal. Oppgaven krever ikke at elevene bruker regnearket til å gjøre utregninger, selv om elevene har mulighet til det. Typiske elevsvar som ble vurdert som gyldige er «For informasjonen viser hvor stor del av landet som er skog ikke hvor stort det er» og «nei fordi tabellen viser hvor mye av det totale land arealet som er skog i prosent og ikke areal».

Tabell 1. Informasjon om antall elevsvar for hver av de tre PISA-oppgavene

Oppgave	Antall elevsvar totalt	Oppgavens mestringsnivå	Elevenes gjennomsnittresultat i matematikk (SE)	Gjennomsnittlig antall ord i elevenes svar*
Trekantet mønster	795 (703 bokmål og 92 nynorsk)	5	451 poeng (4,30)	16
Poeng	959 (857 bokmål og 102 nynorsk)	6	471 poeng (3,62)	19
Skogareal	695 (616 bokmål og 79 nynorsk)	6	498 poeng (4,13)	16

*Her er ikke de blanke elevsvarene tatt med.

Tabell 1 viser antall elevsvar for hver av oppgavene, oppgavens mestringsnivå og gjennomsnittresultater i matematikk for elevene som fikk tildelt oppgaven. Oppgavens mestringsnivå gir en indikasjon på hvor vanskelig oppgaven har vært for elevene. I PISA er alle oppgavene plassert på et mestringsnivå, fra nivå 1 til 6, hvor 6 er det høyeste nivået. De tre oppgavene i vår studie er på mestringsnivå 5 og 6 (tabell 1), som vil si at dette var oppgaver som var blant de vanskeligste oppgavene i undersøkelsen og som hovedsakelig elever som presterer høyt på prøven får til. Også de aller fleste andre PISA-oppgavene hvor elevene skal begrunne svaret sitt er plassert på de to øverste mestringsnivåene (OECD, 2023b). Elevenes gjennomsnittresultat i matematikk har vi beregnet ut fra de ti plausible verdiene som representerer elevenes resultat i matematikk for de elevene som har fått tildelt oppgaven. For mer informasjon om plausible verdier, se OECD (2023d). I PISA 2022 var gjennomsnittresultatet i matematikk

for norske elever 468 poeng med et standardavvik på 93 poeng (Jensen et al., 2023).

Prøven hadde et adaptivt design, som vil si at elever som presterte godt på prøven fikk tildelt vanskeligere oppgaver underveis, mens elever som presterte svakere fikk tildelt enklere oppgaver (OECD, 2023a). Oppgavene ble derfor ikke helt tilfeldig fordelt blant elevene. Ut fra tabell 1 kan vi se at elevene som fikk utdelt «Trekantet mønster» i gjennomsnitt presterte litt svakere enn gjennomsnittet for norske elever på 468 poeng. Gjennomsnittsprestasjonene for elevene som fikk tildelt «Poeng» var på samme nivå som gjennomsnittet for norske elever, mens elevene som fikk tildelt «Skogareal» presterte i gjennomsnitt høyere enn det norske gjennomsnittet.

I svarfeltet hvor elevene skulle skrive inn sine begrunnelser hadde elevene mulighet til å skrive inn så mye tekst de ønsket, men størrelsen på feltet gjorde at det var cirka femti ord som var synlige (uten scrolling). Elevenes elevsvar var i gjennomsnitt 16–19 ord for de tre oppgavene (tabell 1). Det var ikke mulig for elevene å bruke tegninger, figurer eller andre typer matematiske representasjoner i oppgavesvaret. Dette skiller disse PISA-oppgavene og -besvarelsene fra oppgaver og besvarelser i en del andre studier som har undersøkt elevers skriftlige argumenter, hvor elevene har brukt illustrasjoner (for eksempel Banes, 2017; Kosko & Zimmerman, 2017).

Kodingen av elevenes skriftlige besvarelser

Hensikten med kodingen var å identifisere grupper av besvarelser med liknende karakteristikk. Gruppene ble utviklet underveis basert på flere runder med gjennomgang og koding av elevsvar, og kan dermed sees på som en induktiv prosess med et utviklende design (Ary et al., 2019). I arbeidet med å utvikle gruppene var vi opptatt av at alle relevante aspekter ved konstruktet skulle være representert i gruppene (White & Marsh, 2006). I vårt tilfelle handlet dette om at karakteristikkene vi så etter var knyttet til viktige kvaliteter ved et godt argument. Kvaliteten vi la vekt på knyttet seg til om argumentene var logiske og plausible, og om relevant matematikk ved oppgaven lå til grunn i elevens svar (matematisk forankring) (Lithner, 2008). Tidlig i gjennomgangen av besvarelsene var det tydelig at det var stor variasjon i hvordan elevene formulerte seg skriftlig. Et premiss for at elevene skal kunne legge fram et skriftlig argument som framstår som gyldig og med en matematisk forankring, er

at eleven formulerer seg på en tilstrekkelig god måte. Den skriftlige kvaliteten på besvarelsen ble derfor også vurdert til å være en viktig kvalitet ved elevenes argument. Dette innebar ikke å lete etter grammatiske feil eller å tolke uklart eller upresist språk i verste mening, men å vurdere hvorvidt formuleringene i besvarelsen var tvetydige eller såpass uklare at det gjorde det vanskelig å forstå argumentet.

I den første runden med koding gikk forfatterne gjennom et utvalg elevbesvarelser på oppgaven «Trekantet mønster». Basert på denne første gjennomgangen endte vi opp med ni foreløpige grupper. Vi gikk deretter gjennom et nytt utvalg elevsvar (til den samme oppgaven) som ble kodet opp mot disse ni gruppene. Dette avdekket likhetstrekk og overlapp mellom noen av gruppene, som gjorde at vi slo sammen noen av dem. I denne fasen laget vi også tydeligere beskrivelser av gruppene basert på kvaliteter og egenskaper ved elevsvarene. Et viktig mål her var å lage beskrivelsene av gruppene mest mulig uavhengige av oppgaven elevene hadde svart på («Trekantet mønster»), slik at de samme gruppene kunne bli brukt til å kode elevsvarene for de to andre oppgavene. Etter dette kodet vi 200 nye elevsvar på den samme oppgaven med de nye gruppene. Dette førte til at ytterligere to grupper ble slått sammen, og det ble også gjort endringer i beskrivelsene av gruppene. Dette resulterte i seks grupper.

I det neste steget kodet forfatterne 50 elevsvar fra «Trekantet mønster», hver for seg, med de seks gruppene. Samsvaret i kodingen ble beregnet til 0,777 for Cohens kappa (vektet) i SPSS (enighet på 37 av 50 elevsvar), noe som kan tolkes som betydelig enighet (Landis & Koch, 1977) og at kodingen var tilstrekkelig reliabel. Grunnet uenigheter i kodingen ble det likevel gjort noen justeringer i beskrivelsene av gruppene for å gjøre skillene mellom gruppene tydeligere. Til slutt prøvde vi ut gruppene ved å kode elevsvar på de to andre oppgavene, «Poeng» og «Skogareal», for å undersøke om gruppene fungerte for å skille mellom de samme kvalitetene i elevenes besvarelser også på disse oppgavene. Basert på kodingen av et utvalg elevsvar på hver av disse oppgavene, tydet det på at gruppene også fungerte for elevsvarene til disse oppgavene.

Til slutt kodet vi alle elevsvarene på hver av de tre oppgavene ut fra beskrivelsene av de seks gruppene, hvor hvert elevsvar ble plassert i den gruppen vi mente passet best. På grunn av det store antallet elevsvar, delte vi elevsvarene mellom oss og kodet hver for oss. I de tilfellene vi var usikre på hvilken gruppe elevsvaret best passet inn i, ble elevsvaret

vurdert av begge forfatterne og hvor vi ble enige om grupperingen. Etter at alle elevsvarene var gruppert, brukte vi statistiske analyser for å undersøke hvordan elevenes besvarelser fordelte seg i de ulike gruppene. For å undersøke om det var noen sammenheng mellom elevenes prestasjoner på PISA og kvalitetene på deres skriftlige argument beregnet vi i tillegg gjennomsnittlig matematikkresultat for elevene med besvarelser i de ulike gruppene.

Seks grupper av skriftlige besvarelser

Nedenfor har vi beskrevet de seks gruppene av elevbesvarelser vi kom fram til i kodingen. Videre gir vi først en beskrivelse av de seks gruppene, og deretter viser vi fordelingen av elevsvar for hver av oppgavene med eksempler på elevsvar innenfor hver gruppe.

Gyldig argument

Dette er besvarelser som inneholder et argument som viser at elevene har gjenkjent og forstått den relevante matematikken som kreves i oppgaven. Dette handler ofte om at argumentet har en tydelig matematisk forankring som viser til de indre matematiske egenskapene i oppgaven eller i påstanden som elevene skal vurdere. I oppgaven «Trekantet mønster» kan dette for eksempel være at det er flere røde enn blå trekanter i hver rad som legges til. Elevene har gitt en argumentasjon som er gyldig, og begrunnelsen er skrevet på en språklig forståelig måte slik at elevenes tankegang er lett å forstå. Dette betyr ikke nødvendigvis at språket er feilfritt – det kan inneholde både grammatiske feil og feil i setningsoppbygging, men det er godt nok til at det er tydelig for leseren hva eleven mener.

Tilsynelatende gyldig argument, men tvetydig språk

Denne gruppen handler om besvarelser som inneholder et argument som tyder på at elevene har forstått matematikken som kreves, og hvor argumentet viser til de relevante matematiske egenskapene, men hvor språket er utydelig eller upresist slik at det blir noe usikkert for leseren akkurat hva som menes. Dette kan handle om begrepsbruk eller formuleringer som gjør at besvarelsen kan forstås på ulike måter. Et eksempel på dette er elever som skriver at det alltid vil være én mer rød enn blå trekant, men hvor det

ikke presiseres at dette er på hver rad. Også Evens og Houssart (2004) fant at mange elevers skriftlige argumenter var preget av upresist språk.

Et viktig poeng er at også de andre gruppene kan inneholde elevsvar med uklart språk, men denne gruppen kjennetegnes ved at det kun er språklig utydelighet som gjør at besvarelsen ikke er vurdert til å være et gyldig argument. For eksempel vil det være besvarelser med uklar språklig formulering også i gruppen «Argument basert på feil eller misforståelse av oppgaven», men disse argumentene ville vært ugyldige selv om de var formulert godt språklig.

Utilstrekkelig argument

Dette er elevsvar som består av et argument som kan være en del av et gyldig argument, med en matematisk forankring, men som ikke er tilstrekkelig for å være «fullgodt». Dette kan handle om at den matematiske forankringen ikke viser til de indre matematiske egenskapene. Disse besvarelsene er ikke feil i seg selv, slik som er tilfellet for besvarelsene i gruppa «Argument basert på feil eller misforståelse av oppgaven», men de mangler «noe» for at de skal være gyldige. I oppgaven «Trekantet mønster» kan dette for eksempel være elevsvar som viser til at det i hver rad legges til en rød og en blå ekstra trekant. Dette er riktig hvis man sammenlikner med antall trekanter i forrige rad, men dette argumentet i seg selv er ikke nok til at dette er et gyldig argument. Denne gruppen skiller seg fra «Tilsynelatende godt argument, men tvetydig språk» med at det ikke er et utydelig eller upresist språk som gjør at argumentet ikke er vurdert til å være gyldig.

Argument basert på feil eller misforståelse av oppgaven

Denne gruppen består av besvarelser med et argument som er ugyldig. Argumentet kan være ugyldig som følge av en matematisk feil, som for eksempel feil utregninger eller manglende begrepsforståelse, eller en påstand som ikke stemmer. I «Trekantet mønster» kan dette for eksempel være fordi elever sier at Adil tar feil fordi det alltid er to flere røde trekanter enn blå, eller fordi de mener at det er mer enn 50 prosent blå nå og at det alltid vil være det. Denne typen ugyldig argument kan noen ganger se ut til å være forankret i overflatiske matematiske egenskaper ved oppgaven,

for eksempel at elevene kun tar hensyn til antallet røde og blå trekanter i de fire radene som er vist i oppgaven, og ikke vurderer hvordan mønsteret endrer seg med flere rader.

Det ugyldige argumentet kan også komme av at eleven har misforstått noe i oppgaven eller oppgaveteksten. Dette kan noen ganger gjøre at besvarelsen handler om noe annet enn det oppgaven spør om. Oppgaven «Poeng» hadde mange besvarelser med denne typen ugyldig argument, som for eksempel ved at elevene så ut til å tro at spørsmålet handlet om hvorvidt laget faktisk vant alle kampene sine (og ikke om laget aldri vant en kamp med nøyaktig 19 poeng, som oppgaven spør om).

Gjentagelse av tekst eller informasjon fra oppgaven

Denne gruppen omfatter besvarelser som gjenbruker tekst eller informasjon fra oppgaven, uten at elevene gjør en vurdering av informasjonen eller legger til noe nytt. Dette kan for eksempel innebære at besvarelsen er en gjentakelse eller omskriving av påstanden som de skal vurdere. I «Trekantet mønster» kan dette være besvarelser som argumenterer for hvorfor påstanden er feil med at «det alltid vil være flere røde trekanter enn blå trekanter».

Annet

Denne gruppen består av besvarelser som tyder på at elevene ikke har forsøkt å gi et relevant svar på oppgaven. Dette omfatter blant annet typisk «useriøse» svar og svar som kan karakteriseres som «tøys» (som for eksempel «Fordi Adil er dum som et brød»), eller svar som ikke sees som reelle forsøk på å svare riktig på oppgaven (for eksempel «fordi sånn er det»).

Karakteristikk ved elevenes argument på de tre oppgavene

«Trekantet mønster»

Tabell 2 viser resultatet fra grupperingen av de 795 elevsvarene for oppgaven «Trekantet mønster». Av disse var det 231 «blanke» elevsvar, det vil si besvarelser hvor elevene ikke hadde skrevet inn noen bokstaver eller tegn.

Tabell 2. Fordelingen av elevsvar på de seks gruppene av besvarelser for oppgaven «Trekantet mønster». Gjennomsnittlig resultat er basert på de 10 plausible verdiene fra PISA 2022 og standardfeil (s.e.) er gitt i parentes

Gruppe	Antall elevsvar (prosentandel)	Gjennomsnittlig resultat i matematikk (s.e.)
Gyldig argument	156 (19,6 %)	528 poeng (7,36)
Tilsynelatende gyldig argument, men tvetydig språk	35 (4,4 %)	502 poeng (15,31)
Utilstrekkelig argument	80 (10,0 %)	485 poeng (9,87)
Argument basert på feil eller misforståelse av oppgaven	73 (9,1 %)	480 poeng (10,59)
Gjentagelse av tekst eller informasjon fra oppgaven	122 (15,3 %)	461 poeng (7,57)
Annet	98 (12,5 %)	388 poeng (9,66)
«Blanke»	231 (29,1 %)	389 poeng (5,46)
Totalt	795	

Omtrent 20 prosent av besvarelsene ble vurdert som «gyldige argumenter». Dette er besvarelser som legger fram et overbevisende og gyldig argument, hvor språket er såpass tydelig at det ikke er noen tvil om at den matematiske forankringen er korrekt. I denne oppgaven vil korrekt matematisk forankring reflektere at elevene har gjenkjent mønsteret. Besvarelsene i denne gruppen består hovedsakelig av argumenter som forklarer hvorfor det alltid er flest røde trekanter, og derfor alltid til være mindre enn 50 prosent blå. Eksempler på slike elevsvar er «på hver nye rad som kommer, er det alltid en mer rød enn blå. Derfor vil det alltid være under 50% blå trekanter i pyramiden» og «fordi for hver rad så er det en mer rød enn blå og derfor er det alltid mer enn 50% rød». De fleste besvarelsene i denne gruppen har ikke tatt med at det alltid vil være mindre enn 50 prosent blå, men siden dette er gitt i påstanden som elevene skal vurdere og argumentere for, vurderte vi at dette ikke er nødvendig å gjenta for at argumentet skal være gyldig i denne konteksten. Eksempler på den vanligste typen elevsvar i denne gruppen er: «fordi det alltid er flere røde enn blåe trekanter i hver rad» og «Fordi når den øker vil det alltid øke med flere rød enn blå trekanter».

Besvarelsene i gruppen «Tilsynelatende gyldig argument, men tvetydig språk» skiller seg fra de gyldige argumentene ved at de har et utydelig eller upresist språk som gjør at det er uklart hva eleven mener, eller at besvarelsene kan forstås på ulike måter. Dette legger opp til at leseren må gjøre en tolkning eller gjetning av hva eleven mener, noe som kan gjøre argumentet

mindre overbevisende. Vi finner her besvarelser som er bygd opp på mange forskjellige måter. En variant som går igjen er elever som ikke presiserer at det er flere røde enn blå trekantene *på hver rad*, som for eksempel skriver at «det er alltid en rød mer en blå». Selv om dette er eksempel på en besvarelse hvor eleven trolig har gjenkjent mønsteret, har vi vurdert at det er viktig å presisere på «hver rad» for at argumentet skal være gyldig, fordi dette er en vesentlig del av den matematiske forankringen som nettopp gjør argumentet gyldig. Andre eksempler på elevsvar i denne gruppen, hvor språket gjør det vanskelig å forstå argumentet, er «Utvidelsen av de blå trekantene vil alltid være en trekant mindre fordi enn de røde fordi de røde er ytterst» og «Det vil alltid være mindre blå enn røde fordi den røde er den nederte delen av linja og er alltid en mer/like mange som blå på forje linje. For at blå skal bli mer nn 50% må kan man ikke ta en hel linje.»

Svarene i «Utilstrekkelige argument» handler ofte om en mindre presis beskrivelse av mønsteret, for eksempel at det er røde trekantene på utsiden og blå på innsiden («fordi rød er ytterst», «det er alltid færre blå siden de er inni trekanten»), eller en mindre presis beskrivelse av at det er flere røde enn blå trekantene på hver rad («det blir alltid lagt til mere røde trekantene enn blå»); «Forholdet mellom antall nye blå og røde trekantene er likt hele veiene»; «fordi rød er ytterst»; «Fordi for hver blå er det 2 røde på siden».

Gruppen «Argument basert på feil eller misforståelse av oppgaven» utgjør 9 prosent av besvarelsene. Disse svarene omhandler hovedsakelig besvarelser som kan tyde på at elevene ikke gjenkjenner mønsteret og fordelingen med blå og røde trekantene («det vil alltid være 2 mere rød el blå på vær rad» og «fordi når han legger på femte rad kommer det til å være 50% blå og 50% rød») og besvarelser som kan tyde på manglende forståelse av prosent («det er 100 % rød og 60 % blå» og «Det er alltid 6 fler røde trekantene»). I denne oppgaven er det kun noen få besvarelser som tyder på at eleven har misforstått oppgaveteksten eller spørsmålet.

Gruppen med nest flest elevsvar er «Gjentagelse av tekst eller informasjon fra oppgaven». Dette er besvarelser som gjentar informasjon fra oppgaveteksten, uten å komme med noe argument for hvorfor påstanden er sann eller usann. Det er to typer svar som går igjen her. Én type svar gjentar påstanden, uten å gi noen argumentasjon for hvorfor, som for eksempel «Uansett hvor mange rader man lager så vil det alltid være mer røde trekantene». Den andre typen elevsvar viser til figuren som er vist i oppgaven, uten å gjøre noen videre generalisering av mønsteret, som for eksempel «Nei, fordi 60% av trekantene er blå når det er 4 rader».

Det er forholdsvis mange elevsvar i gruppen «Annet» (12,5 prosent). Typisk for denne gruppen er elevsvar som ikke ser ut til å være seriøse svar på oppgaven, som for eksempel «adil har alltid rett» og «fordi slik er det bare». Gjennomsnittresultatene for elever med besvarelser i denne gruppen tyder på at dette er en svært utfordrende oppgave for denne elevgruppen, noe som kan være bakgrunnen for noen av de useriøse svarene.

«Poeng»

Tabell 3 viser resultatet fra grupperingen av de 959 elevsvarene for oppgaven «Poeng», hvorav 299 av elevsvarene var «blanke». På denne oppgaven var det 14 prosent av elevsvarene som ble gruppert under «Gyldig argument». Dette var besvarelser som ga et gyldig argument for hvorfor laget kan ha vunnet med 19 poeng i gjennomsnitt, uten å ha vunnet en kamp med 19 poeng. Elevsvarene i denne gruppen handler typisk om at de påpeker at gjennomsnittet ikke trenger å være ett av tallene i datamengden som er brukt til å regne ut gjennomsnittet, for eksempel «gjennomsnittet at tallene trenger ikke og ha 19 i seg for og få resultatet 19», og/eller at elevene viser dette med et eksempel («ja, fordi hvis de fikk en seriemargin på 20 på 4 kamper og på de andre 4 fikk de 18 hadde gjennomsnittet vært 19. Så ja det er mulig» og «Det er gjennomsnitt, så det kunne for eksempel vært 2 kamper, en på 20 og en på 18. Da er fortsatt gjennomsnittet 19».

Tabell 3. Fordelingen av elevsvar på de seks gruppene av besvarelser for oppgaven «Poeng». Gjennomsnittlig resultat er basert på de 10 plausible verdiene fra PISA 2022 og standardfeil (s.e.) er gitt i parentes

Gruppe	Antall elevsvar (prosentandel)	Gjennomsnittlig resultat i matematikk (s.e.)
Gyldig argument	137 (14,3 %)	554 poeng (6,4)
Tilsynelatende gyldig argument, men tvetydig språk	31 (3,2 %)	528 poeng (16,2)
Utilstrekkelig argument	90 (9,4 %)	500 poeng (9,7)
Argument basert på feil eller misforståelse av oppgaven	251 (26,2 %)	488 poeng (6,1)
Gjentagelse av tekst eller informasjon fra oppgaven	32 (3,3 %)	466 poeng (16,1)
Annet	119 (12,4 %)	422 poeng (8,5)
«Blanke»	299 (31,2 %)	426 poeng (4,9)
Totalt	959 (100 %)	

En av utfordringene med å kode elevsvarene for denne oppgaven, handlet om svar med argumenter som viste til at det kun er snakk om et «gjennomsnitt». Eksempler på dette er «fordi det bare er gjennomsnitt», «Fordi det sto gjennomsnittet» og «fordi gjennomsnittet var 19». Dette ble ikke vurdert som gyldige argumenter, fordi vi ikke vurderte det som et overbevisende argument for hvorfor påstanden var riktig, selv om elevene har pekt på den sentrale matematiske egenskapen i denne oppgaven. Besvarelsene som kun pekte på «gjennomsnitt», slik som eksemplene over, ble kodet som «utilstrekkelig argument», fordi det ble vurdert til å være en del av et gyldig argument, men som manglet en ytterligere forklaring på hva det er med beregningen av gjennomsnitt som gjør at seiersmarginen kan være 19 poeng i gjennomsnittet uten at noen av kampene endte med 19 poeng seiersmargin. Selv om disse elevsvarene gjentok oppgavetekst, vurderte vi at disse formuleringene tydet på at elevene brukte nøkkelinformasjon fra oppgaveteksten til å gi et argument. Elevsvarene i gruppen «Gjentagelse av tekst» gir ikke inntrykk av å bevisst vise til nøkkelinformasjon, men inneholder mer ordrett gjenbruk av oppgavetekst og informasjon som ikke er relevant som argument for eller i mot påstanden. Eksempler på dette er «Fordi det seier at sigersmarginen er på gjennomsnittelig 19 poeng» og «Fordi i teksten «Poeng» står det at basketballaget vant alle kampene. Og seiersmargin er en differanse mellom hva vinnerlaget scoret og hva taperlaget scoret i en kamp. Der stod det jo at 19 poeng var det de hadde i gjennomsnitt».

Også for denne oppgaven fant vi noen elevsvar hvor uklarheter i den språklige formuleringen gjorde at argumentet ikke ble vurdert som gyldig. Eksempler på dette er «Hvis det var likemange mål over 19 som under 19 kan gjennomsnittet bli regnet til 19» og «Fordi tallet på gjennomsnittet må ikke være med i regnestykket for å få det resultatet».

I denne oppgaven er det relativt mange elevsvar i gruppen «Argument basert på feil eller misforståelse av oppgaven», og det er noen typer misforståelser som ser ut til å gå igjen hos elevene. For eksempel ser noen elever ut til å ha tolket spørsmålet til å handle om hvorvidt laget faktisk vant alle kampene sine. Eksempler på dette er elevsvarene «Nei fordi dersom de aldri vant en kamp kan ikke seiersmarginen være positiv» og «nei, fordi det står i avisa at de vant alle kampene denne sesongen som betyr de tapte ikke en eneste». En annen type misforståelse kan se ut til å ha vært at elevene ikke har tatt hensyn til den første delen av setningen, men har svart på spørsmålet «Er det mulig at laget faktisk [aldri] vant en kamp med 19 poeng?». Eksempler på slike elevsvar er «det kan hende at det andre laget

scoret absolutt ingen mål i det hele tatt» og «Nei det er mulig at de har vunnet med 19 poeng fordi taperlaget kan ha fått 0 poeng». Dette tyder på at oppgaveteksten har vært vanskelig å forstå for elevene. I denne gruppen finner vi også argumenter som ser ut til å være bygget på manglende forståelse av begrepet gjennomsnitt.

«Skogareal»

På oppgaven «Skogareal» var det 273 «blanke» svar (tabell 4), en noe høyere andel enn for de to andre. At andelen «blanke» er høyere, kan skyldes at oppgaven har høyere vanskelighetsgrad, eller at det er den siste av en lengre oppgaveenhet, slik at elevene er mer slitne når de kommer til denne oppgaven.

Tabell 4. Fordelingen av elevsvar på de seks gruppene av besvarelser for oppgaven «Skogareal». Gjennomsnittlig resultat er basert på de 10 plausible verdiene fra PISA 2022 og standardfeil (s.e.) er gitt i parentes

Gruppe	Antall elevsvar (prosentandel)	Gjennomsnittlig resultat i matematikk (s.e.)
Gyldig argument	51 (7,3 %)	605,2 (11,1)
Tilsynelatende gyldig argument, men tvetydig språk	8 (1,2 %)	565,1 (19,7)
Utilstrekkelig argument	6 (0,9 %)	574,0 (32,2)
Argument basert på feil eller misforståelse av oppgaven	305 (43,9 %)	525,4 (4,3)
Gjentakelse av tekst eller informasjon fra oppgaven	5 (0,7 %)	525,8 (29,3)
Annet	47 (6,8 %)	437,4 (15,3)
«Blanke»	273 (39,3 %)	455,5 (6,4)
Totalt	695 (100 %)	

Tabell 4 viser også at elevsvarene for «Skogareal» hovedsaklig fordeler seg i to grupper: de som ga et gyldig argument og de som ga et argument basert på feil (i tillegg til useriøse svar i gruppen «Annet»). Denne oppgaven skilte seg også ut ved at den var forholdsvis enkel å kode, siden de aller fleste argumentene var enten tydelig riktig eller tydelig feil. Kun 7 prosent av besvarelsene ble vurdert til å ha et «Gyldig argument». I denne oppgaven var argumentet gyldig hvis det har vist til at det som er oppgitt i regnearket kun er en prosent eller andel av landets totale areal, og ikke landets «absolutte» areal. Eksempler på dette er «For informasjonen viser hvor stor del av landet som er skog ikke hvor stort det er» og «Regnearket viser bare prosent av

landarealet men vi ser ikke hvor stort landareal landene har». Noen elever brukte også kunnskap om landenes størrelser i argumentasjonen, noe som også ble vurdert som gyldig. For eksempel «Sør Korea har kanskje mest prosent skogsareal, men Sør-Korea er et lite land så det har ikke like mye skog som feks USA» og «Mange av landene er større enn Sør-Korea, som gjør at 33% i USA kan vera større enn dei nærare 65 i sør-korea». Besvarelser som kun viser til at regnearket viser prosentandel, uten å antyde at påstanden handler om faktisk areal, er vurdert som «Utilstrekkelig argument». Eksempel på et slikt elevsvar er «nei, fordi det går etter prosent av andelen skog av landareal». Eksempler på besvarelser med uklart språk er «Det står skogsareal i forhold til totalareal som betyr at de ikke har størst men størst i forhold til størelse» og «MEN HUN MÅ FØRST HA AREALET AV ALLE LANDENE I LISTE ELLER SÅ HJELPER DET IKKE». Disse besvarelsene gir inntrykk av at elevene har skjønt «poenget», men det utydelige språket gjør argumentet mindre overbevisende.

Argumentene basert på feil eller misforståelse, er seks ganger så mange som de med gyldig argument. Dette er hovedsakelig besvarelser hvor elevene har svart «Ja» på at informasjonen i regnearket støtter påstanden, med et argument som viser til at Sør-Korea har størst tall i regnearket. Typiske eksempler på dette er «Ja påstanden stemmer siden det står på arket» og «ut ifra kolonnene ser man at sør korea har større skog område enn de andre». For mange av disse svarene er det uklart om eleven ikke har fått med seg informasjonen i oppgaveteksten om at regnearket viser prosentandel skogsareal, eller om elevene mangler kunnskap om andel og prosent. Det er noen få elever som har gjentatt oppgaveteksten, for eksempel «på regnearket ser man hvor mye skogsareal er i landet».

Tabell 5 gir en oversikt over fordelingen av elevsvar på de ulike gruppene for de tre oppgavene.

Tabell 5. En samlet oversikt over prosentandelen av fordelingen av elevsvar på de ulike gruppene for alle de tre oppgavene

Gruppe	«Trekantet		
	«mønster»	«Poeng»	«Skogsareal»
Gyldig argument	19,6 %	14,3 %	7,3 %
Tilsynelatende gyldig argument, men tvetydig språk	4,4 %	3,2 %	1,2 %
Utilstrekkelig argument	10,0 %	9,4 %	0,9 %
Argument basert på feil eller misforståelse av oppgaven	9,1 %	26,2 %	43,9 %
Gjentagelse av tekst eller informasjon fra oppgaven	15,3 %	3,3 %	0,7 %
Annet	12,5 %	12,4 %	6,8 %
«Blanke»	29,1 %	31,2 %	39,3 %

Diskusjon

Matematisk resonnering blir sett på som en viktig del av matematisk kompetanse, både innenfor forskningslitteraturen (Niss & Højgaard, 2019) og i matematikkfaget i norsk skole (Kunnskapsdepartementet, 2019). En del av resonnering er å kunne vurdere en matematisk påstand og legge fram et skriftlig argument som støtter eller motstrider denne. Resultatene fra denne studien tyder på at det er utfordrende for mange norske 15-åringer å legge fram et gyldig skriftlig argument, og at det kan være flere ulike årsaker til dette.

Ut fra vår vurdering av elevsvarene, er det forholdsvis få elever som legger fram et gyldig argument; det vil si et argument som er plausibelt og har en matematisk forankring og et tydelig og presist språk. Dette gjelder på tvers av de tre oppgavene. Resultatene viser også at det er ulike feil og mangler i elevenes argumenter, men også at disse henger sammen med elevenes matematiske kompetanse og at dette også gjelder på tvers av de tre oppgavene. Vi finner at det er de lavest presterende elevene som i størst grad gir useriøse svar eller lar være å svare på disse tre oppgavene. Vi vet ikke om disse svarene er basert på at de ikke har den matematiske forståelsen eller kunnskapen som oppgaven krever, at de ikke vet hva som er forventet av dem når de skal begrunne svaret sitt, eller om de ikke har vært motiverte for å gi et «ordentlig» svar. En mulig forklaring er at elevene som presterer lavt i matematikk også ofte har svakere lesekompetanse, og derfor kan ha hatt utfordringer med å lese og forstå oppgaven. Dette gjelder spesielt oppgaven «Poeng», hvor oppgaveteksten er spesielt krevende å lese.

Wiliam (2007) påpeker at det er avgjørende at elevene forstår hva som er forventet av dem når de svarer på oppgaver. For at elevene skal lære seg å argumentere, er det viktig at elevene vet hva et godt eller gyldig argument er. Den store andelen elevsvar som gir et utilstrekkelig argument eller som gjentar oppgaveteksten (særlig på «Trekantet mønster»), kan muligens skyldes at elevene mangler kunnskap om hva som er forventet av dem, og hva som kjennetegner et godt argument. Et eksempel på dette er besvarelser som «Uansett hvor mange rader man lager så vil det alltid være mer røde trekanter», som kan framstå som overbevisende, men som ikke bidrar med noen argumentasjon ut over informasjonen som er gitt i den opprinnelige påstanden og oppgaveteksten. Å gi en begrunnelse ved å gjenta informasjon fra oppgaven ser ikke ut til å være et særnorsk fenomen. I sin studie av 11-åringer i England, fant også Evans og Houssart (2004) at en relativt

stor andel elever forklarte svarene sine ved å gjenta utsagn som var gitt i oppgaven. Samtidig vil det i noen tilfeller være slik at det å gjenta deler av oppgaveteksten kan være en del av et gyldig argument, som for eksempel i oppgaven «Poeng». Dette betyr at det ikke finnes noen enkel «oppskrift» på hvordan et godt argument skal utformes, men at det avhenger av blant annet oppgaven elevene løser.

For en liten andel av svarene var det uklarheter i formuleringen som trolig gjorde at argumentet ikke ble vurdert som gyldig. For disse besvarelsene kan det framstå som at elevene har tilstrekkelige matematiske kunnskaper og har gjort et riktig resonnement, og at elevens utfordring handler om å formulere seg skriftlig. For en matematikklærer kan det oppleves urettferdig å ikke skulle vurdere argumentet som gyldig dersom det er elevens (manglende) skriftlige ferdigheter som er årsaken. Hvis elevene skal lære seg hvordan de skal legge fram overbevisende og gyldige argumenter, er det derimot viktig at de er klar over at et klart og presist språk er en viktig del av et matematisk argument, og at elevene får tilbakemeldinger som støtter dem i å skrive klare og presise argumenter.

I PISA-oppgavene i denne studien er det ikke gitt noe informasjon til elevene om *hvem* de skrev en begrunnelse for eller til. Banes (2017) fant at å gi elevene informasjon om dette i oppgaver kan være motiverende og støttende for elever når de skal gi skriftlige argumenter. Når det viser seg at disse PISA-oppgavene er såpass vanskelige for elevene, med en forholdsvis høy andel ubesvarte og useriøse elevsvar, kan det tenkes at å omformulere oppgaven slik at elevene får beskjed om at begrunnelsen skal gis til en (fiktiv) medelev kunne motivert flere elever til å skrive et argument. Et annet grep som kan gjøres for å legge til rette for at flere elever legger fram gode argumenter, er å lage oppgaver hvor det gis mer informasjon i oppgaveteksten om hva som er forventet av elevene i besvarelsen.

Resultatene viser også at fordelingen av de ulike gruppene elevsvar, med ulike typer feil og mangler, varierer på tvers av de tre oppgavene. Dette tyder på at utformingen av oppgaven har mye å si for hvilke feil eller mangler vi finner i elevenes argumentasjon, noe som er i tråd med funnene til Banes (2017). Ikke overraskende tyder resultatene på at en uklar og krevende oppgavetekst, som i oppgaven «Poeng», gjør at mange misforstår oppgaven og hva den spør om. Samtidig tyder også resultatene på at hvilken type feil eller mangler vi finner i argumentasjonen, og hvorvidt elevene misforstår oppgaveteksten eller ikke, henger sammen med elevenes matematiske kompetanse, og at dette gjelder på tvers av oppgavene. I oppgaven

«Skogareal» finner vi en stor andel av elevbesvarelsene i gruppen som bygger argumentet på en feil som kan knyttes til den matematiske forankringen i svaret, og hvor elevene har vurdert overflatiske egenskaper og ikke indre matematiske egenskaper ved oppgaven (Lithner, 2008). I denne oppgaven er dette knyttet til at tabellen oppgir skogareal som prosentandel av landets totale areal, og ikke landets faktiske skogareal. Ut fra besvarelsene er det vanskelig å vite om dette skyldes manglende forståelse av konseptet prosent, eller at elevene ikke har fått med seg denne informasjonen i oppgaveteksten.

Konklusjon

Resultatene fra denne studien gir et innblikk i norske elevers skriftlige argumenter i matematikk og ulike karakteristikk ved hvordan elevene argumenterer. Resultatene kan tyde på at det er relativt få elever som mestrer å legge fram gyldige argumenter. Mange av elevbesvarelsene på de tre oppgavene i denne studien er preget av manglende matematisk kunnskap eller forankring, upresist og tvetydig språk, og/eller argumenter som er utilstrekkelige og dermed ugyldige. I studien til Evens og Houssart (2004) viste resultatene at elevene forstod mer enn de skriftlige svarene ga uttrykk for. I vår studie fant vi at mange av elevene som ga utilstrekkelige argumenter, argumenter basert på feil og besvarelser med uklart språk, presterte betydelig over gjennomsnittet på PISA-prøven. Dette kan tyde på at det kan være utfordrende også for relativt høytpresterende elever å skrive gyldige argumenter i matematikk. Dette kan tyde på at *alle* elever har behov for mer kunnskap om hva som kjennetegner et gyldig argument. For å fremme elevenes forståelse av hva som er forventet av dem, kan det for eksempel være verdifullt å la elevene lese andre elevers argumenter og diskutere hvorfor eller hvorfor ikke argumentene er gyldige (Williams, 2007). Det er viktig å legge til rette for at elevene utvikler sin evne til å resonnerer og argumentere, slik at de får mulighet til å utvikle en helhetlig matematisk kompetanse.

Forfatterbiografier

Marte K. Senneset er doktorgradsstipendiat ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning (ILS) ved Universitetet i Oslo, hvor hennes doktorgradsarbeid omhandler matematisk resonnering. Hun har master i matematikkdiridaktikk og underviser på lektorprogrammet ved ILS.

Andreas Pettersen er forsker ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo. Han har en doktorgrad i matematikkdidaktikk og har jobbet med PISA-undersøkelsen siden 2017. Pettersen har utgitt flere artikler om matematikkdidaktikk og vært redaktør for boka *Equity, Equality and Diversity in the Nordic Model of Education* (utgitt på Springer i 2020).

Referanser

- Ary, D., Jacobs, L. C., Irvine, C. K. S. & Walker, D. A. (2019). *Introduction to research in education* (10. utg.). Wadsworth Cengage Learning.
- Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Red.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (s. 27–44). National Council of Teachers of Mathematics.
- Banes, L. C. (2017). «*Explain your answer*»: *Mathematical writing in linguistically diverse classrooms*. University of California, Davis.
- Bleiler, S. K., Thompson, D. R. & Krajčevski, M. (2013). Providing written feedback on students' mathematical arguments: Proof validations of prospective secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17, 105–127. <https://doi.org/10.1007/s10857-013-9248-1>
- Evens, H. & Houssart, J. (2004). Categorizing pupils' written answers to a mathematics test question: «I know but I can't explain». *Educational Research*, 46(3), 269–282. <https://doi.org/10.1080/0013188042000277331>
- Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396–428. <https://doi.org/10.2307/749651>
- Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1–16.
- Jensen, F., Pettersen, A., Frønes, T. S., Eriksen, A., Løvgren, M. & Narvhus, E. K. (2023). *PISA 2022: Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing*. Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/noasp.205>
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Red.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.
- Kosko, K. W. & Zimmerman, B. S. (2017). Emergence of argument in children's mathematical writing. *Journal of Early Childhood Literacy*, 19(1), 82–106. <https://doi.org/10.1177/1468798417712065>
- Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn* (MAT01-05). Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/mat01-05>
- Landis, J. R. & Koch, G. G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics*, 159–174.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255–276. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2>
- Nippold, M. A. & Ward-Lonergan, J. M. (2010). Argumentative writing in pre-adolescents: The role of verbal reasoning. *Child Language Teaching and Therapy*, 26(3), 238–250.
- Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9–28.
- Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring – Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriet.

- OECD. (2023a). *PISA 2022 Assessment and analytical framework*. <https://doi.org/10.1787/dfc0bf9c-en>
- OECD. (2023b). Annex A: Item pool classification. I *PISA 2022 technical report*. Organisation for Economic Co-operation and Development.
- OECD. (2023c). *PISA 2022 results (Volume I): The state of learning and equity in education*. PISA, OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- OECD. (2023d). Scaling PISA data. I *PISA 2022 technical report*. Organisation for Economic Co-operation and Development.
- Rø, K. & Arnesen, K. K. (2020). The opaque nature of generic examples: The structure of student teachers' arguments in multiplicative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 58, Artikel 100755. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100755>
- Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, 26(3), 9–15. <https://doi.org/10.5951/AT.26.3.0009>
- Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge University Press.
- White, M. D. & Marsh, E. E. (2006). Content analysis: A flexible methodology. *Library Trends*, 55(1), 22–45.
- Wiliam, D. (2007). Keeping learning on track. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 1053–1098). Information Age.

KAPITTEL 6

Matematikkundervisning i norske og nordiske klasserom – klasseledelse, støttende undervisning og faglige utfordringer

Trude Nilsen Universitetet i Oslo

Andreas Pettersen Universitetet i Oslo

Sammenheng: Undervisningskvaliteten er viktig for elevers prestasjoner i matematikk, men det er uklart hvilke aspekter ved undervisningskvaliteten som er viktig for elever i Norge. I PISA 2022 ble det undersøkt tre aspekter ved undervisningskvaliteten i matematikk: klasseledelse, støttende undervisning og faglige utfordringer. I dette kapitlet undersøker vi hva som karakteriserer undervisningskvaliteten i matematikk basert på disse tre dimensjonene, og hvordan disse henger sammen med matematikkprestasjoner på 10. trinn i Norge og de andre nordiske landene. I tillegg undersøker vi forskjellen på undervisningskvaliteten på skoler med elever med gjennomsnittlig høy og lav sosioøkonomisk status (SØS) i Norge. Analysene ble gjort på to nivåer (elev- og skolenivå), og resultatene viste at alle de tre dimensjonene av undervisningskvalitet hadde positiv sammenheng med matematikkprestasjoner. Det var en klar tendens til at på skoler med høy andel elever med høy SØS, rapporterte elevene om bedre undervisningskvalitet enn på skoler med lav SØS. Sammenliknet med gjennomsnittet for OECD-landene og de andre nordiske landene, rapporterte norske elever om relativt høy grad av *faglige utfordringer* (undervisning som utfordrer elevene kognitivt, for eksempel ved resonnering og problemløsning), men svakere grad av *klasseledelse* (arbeidsro og effektiv bruk av tid til læring) og *støttende undervisning* (faglig og emosjonell støtte). Funnene blir tolket og diskutert mot tidligere forskning, og begrensninger, videre forskning og implikasjoner blir beskrevet.

Nøkkelord: undervisningskvalitet, prestasjoner i matematikk, Norge og Norden, PISA

Sitering: Nilsen, T., Pettersen, A. (2024). Matematikkundervisning i norske og nordiske klasserom – klasseledelse, støttende undervisning og faglige utfordringer. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (Kap. 6, s. 139–165). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch6>

Lisens: CC-BY 4.0

Abstract: Teaching quality is crucial for student mathematics achievement, but the specific aspects of teaching quality that matter for 10th graders in Norway remain unclear. In PISA 2022, three aspects of mathematics teaching quality were examined: classroom management, supportive teaching, and cognitive activation. This chapter investigates the characteristics of mathematics teaching quality based on these three dimensions and how they relate to 10th-grade mathematics achievement in Norway and the other Nordic countries. Additionally, the study explores the difference in teaching quality between schools with students of average, high and low socioeconomic status (SES) in Norway.

Analyses were conducted at two levels (student and school levels), and the results showed that all three dimensions of instructional quality had positive correlations with mathematics achievement in Norway. There was a clear tendency for students in schools with a high proportion of high-SES students to report better instructional quality than those in low-SES schools. Compared to the average for OECD countries and the other Nordic countries, Norwegian students reported a relatively high level of academic challenge (instruction that challenges students cognitively, such as through reasoning and problem-solving) but a weaker level of classroom management (order and effective use of learning time) and supportive teaching (academic and emotional support). The findings are interpreted and discussed in light of previous research, and limitations, further research, and implications are described.

Keywords: instructional quality, mathematics achievement, Norway and Nordic countries, PISA

Studier har vist at matematikkundervisningen som skjer i klasserommet, har stor betydning både for elevenes matematikkprestasjoner og deres motivasjon for å lære matematikk (Fauth et al., 2014; Klieme et al., 2009; Nilsen et al., 2018; Praetorius et al., 2018; Seidel & Shavelson, 2007). I tillegg har studier vist at god matematikkundervisning også kan bidra til å redusere gapet i matematikkprestasjoner mellom elevgrupper (Nilsen, Scherer et al., 2020; Rjosk et al., 2014). Undervisning er imidlertid et svært sammensatt fenomen som involverer et samspill mellom lærere, elever og innhold (Cohen et al., 2003). Dette gjør undervisning til et komplisert fenomen å forske på, og det gjør det krevende å finne ut hva som kjennetegner undervisning av høy kvalitet. I forskningslitteraturen finnes det ulike metoder, med ulike styrker og svakheter, for å forske på undervisning. Mens kvalitative studier ofte har til hensikt å forstå og beskrive hva god undervisning er, vil kvantitative studier typisk forsøke å måle viktige dimensjoner ved undervisningen, som for eksempel klasseledelse, og undersøke sammenhenger mellom disse dimensjonene og elevenes læring (Klieme & Nilsen, 2022).

Det har vært mye forskning på kvaliteten på undervisningen i Tyskland og USA (Nilsen & Gustafsson, 2016). I Norden har det meste av forskningen vært utført ved bruk av kvalitative data (Teig et al., 2024). For eksempel har LISA-studien undersøkt undervisningskvalitet ved å samle inn videodata av klasseromsobservasjoner fra 49 skoler i Norge (Klette et al., 2017). Gjennom analyser av denne typen videodata er det mulig å få mer direkte innsikt i mange ulike sider av kompleksiteten i undervisningssituasjoner, for eksempel når og hvordan en gruppe lærere gir ulike typer tilbakemeldinger til elevene sine i matematikktimene (Stovner et al., 2021). Det er derimot ikke mulig å generalisere funnene og si noe om for eksempel undervisningen eller matematikklærere i Norge generelt, siden disse kvalitative dataene ikke er samlet inn gjennom representative utvalg.

Ifølge den norske læreplanen skal alle elever gis likeverdige muligheter til læring (Kunnskapsdepartementet, 2017). Det finnes imidlertid studier som tyder på at dette ikke er tilfelle. For eksempel viser resultater fra PISA at elevenes hjemmebakgrunn har sterk sammenheng med deres faglige prestasjoner, og forskjellen i matematikkprestasjoner for elever med høy og lav sosioøkonomisk status (SØS) har økt fra 2012 til 2022 (Jensen et al., 2023). I den forbindelse er det et viktig spørsmål om det er forskjeller i undervisningskvaliteten på skoler i Norge som har en elevsammensetning der mange av elevene kommer fra hjem med mange ressurser (høy SØS),

sammenliknet med skoler der mange av elevene kommer fra hjem med færre ressurser (lav SØS). En slik systematisk forskjell mellom skoler vil bryte med ideen om at alle barn skal ha like muligheter, og vil i tillegg kunne bidra til å øke forskjellene mellom elevgrupper. Selv om en del forskning med representative data har undersøkt undervisningskvaliteten i Norge og i Norden (se for eksempel Nilsen, Scherer, et al., 2020; Nilsen & Gustafsson, 2024; Olsen, 2013; Senden, Teig, & Nilsen, 2023), har ingen av disse studiene undersøkt om det er systematiske forskjeller i undervisningskvalitetet i matematikk i Norge på skoler med ulik sammensetning ut fra elevers hjemmebakgrunn.

Med representative utvalg og sammenliknende studier er det mulig å sammenlikne trekk ved undervisningskvaliteten på tvers av land. Det vil da være mest fruktbart å sammenlikne med land som ligner Norge når det gjelder kultur, språk og utdanning, for eksempel de nordiske landene. Land med svært forskjellig kultur fra Norge, slik som asiatiske land, kan ha en helt forskjellig skolekultur, kontekst og ideologi, som vil medføre at mål på undervisningskvalitet ikke er sammenliknbare (Senden, Teig, & Nilsen, 2023; van de Vijver, 2018). De nordiske landene samarbeider dessuten om utdanning for å lære av hverandre, for eksempel via Nordisk ministerråd. Likevel er det ingen som har sammenliknet undervisningskvaliteten og sammenhengen med prestasjoner i matematikk på norske skoler med andre nordiske land. Vårt overordnede mål er derfor å adressere denne mangelen på forskning, samt behovet for å undersøke undervisningskvalitet på skoler med høy versus lav SØS, og sammenlikne Norge med resten av Norden når det gjelder karakteristika ved skolers undervisningskvalitetet og hvilke aspekter som har sammenheng med matematikkprestasjoner. Videre er vårt mål å undersøke hva som kjennetegner forskjeller i undervisningskvaliteten ved norske skoler med høy og lav SØS.

Hva er undervisningskvalitet?

Det er viktig å skille mellom begrepene *undervisningspraksis* og *undervisningskvalitet*. Mens læreres undervisningspraksis kan forstås som alt lærere gjør i yrket sitt både i og utenfor klasserommet, som for eksempel planlegging av undervisning og vurdering av elevenes læring, er undervisningskvalitet knyttet til det som skjer i klasserommet (Charalambous et al., 2021). I dette kapitlet benytter vi «De tre grunnleggende dimensjonene» som teoretisk rammeverk for undervisningskvalitet (Praetorius et al., 2018).

I dette rammeverket er undervisningskvalitet beskrevet gjennom følgende tre dimensjoner:

1. **Klasseledelse.** Dette handler om å holde ro og orden i klassen, at elevene følger reglene og at tiden blir brukt effektivt.
2. **Støttende undervisning.** Dette handler om at læreren støtter elevene faglig ved for eksempel å gi klar og forståelig undervisning eller oppsummere etter timen. Det handler også om emosjonell støtte, som å se hver enkelt elev.
3. **Faglig utfordring.** Dette er undervisning som utfordrer elevene kognitivt. Det handler for eksempel om problemløsning, om å utfordre elevene til å resonnerer, bruke kunnskap i en ny kontekst, forklare framgangsmåter og argumentere for svarene sine.

Den første dimensjonen (klasseledelse) er generell og gjelder på tvers av fag, mens de to andre dimensjonene er tettere knyttet til undervisning i matematikkfaget. Rammeverket vi benytter, ble utviklet for matematikk, men kan benyttes i andre fag dersom disse to aspektene (støttende undervisning og faglig utfordring) tilpasses faget (Senden et al., 2022). For eksempel vil undervisning som inkluderer utforskende arbeidsmetoder og forskjellige representasjoner for samme fenomen, utgjøre viktige deler av dimensjonen faglig utfordring i naturfag (Teig et al., 2018).

Dette rammeverk blir ofte brukt i den europeiske forskningslitteraturen og er grundig prøvd ut i ulike klasserom og av ulike forskere for å sikre at det dekker viktige deler av undervisningen (Praetorius et al., 2018). Det er også dette rammeverket som benyttes som grunnlag for utviklingen av spørsmålene i spørreskjemaet knyttet til undervisning i PISA (OECD, 2023a) og Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) (Mullis & Martin, 2017). Det ble opprinnelig utviklet av Klieme og kollegaer (2009), og har mye til felles med andre rammeverk som blir benyttet i forskning (Senden et al., 2022). Selv om disse tre dimensjonene er viktige for undervisningen, finnes det også andre viktige sider ved lærerens undervisning som ikke er en del av rammeverket. Dette gjelder for eksempel vurdering og strukturering av undervisningen (Praetorius et al., 2018). Rammeverket «De tre grunnleggende dimensjonene» gir derfor ikke et fullstendig bilde av kvaliteten ved undervisningen, men viser til sentrale aspekter utviklet og validert gjennom mange empiriske studier.

Hvordan måle undervisningskvalitet?

Det å måle undervisningskvalitet er svært komplekst. Undervisningen foregår i et samspill mellom lærere, elever og det faglige innholdet som skal undervises (Cohen et al., 2003), og konteksten i et klasserom kan være med på å påvirke elevenes læring (Fauth et al., 2020). Forskning på undervisning og undervisningskvalitet er derfor opptatt av ulike fenomener, og det blir brukt ulike metoder, med ulike styrker og svakheter. For eksempel kan observasjon i klasserommet gi rik informasjon som kan gi detaljerte beskrivelser og fange opp viktige nyanser i undervisningen (Klette, 2023). Samtidig er det ressurskrevende å samle inn denne typen data. Dette gjør at utvalgene ofte er små, noe som begrenser mulighetene til å generalisere resultatene til for eksempel andre elever, steder eller kulturer, og dermed også hvilke slutninger som kan trekkes (Blömeke et al., 2022). En annen ulempe er at observasjoner (for eksempel ved videostudier) må tolkes av forskere og evalueres ved hjelp av et rammeverk. Et slikt rammeverk beskriver hva som for eksempel kjennetegner god klasseledelse. Ofte tolker forskere det som skjer i klasserommet ulikt (White & Klette, 2023).

En annen tilnærming til å måle undervisningskvalitet er gjennom kvantitative spørreundersøkelser til elever eller lærere. Fordelen med denne type data er at det krever mindre ressurser, noe som gjør det mulig å samle inn data fra store og representative utvalg. Samtidig har også kvantitative spørreundersøkelser flere begrensninger og svakheter. For eksempel kan denne typen undersøkelser gi et mer overfladisk mål på undervisningen, ved at det er begrenset hvor detaljert informasjon elever (og lærere) klarer å skille mellom (Senden et al., 2022). Ved bruk av lærerspørreskjemaer vil svarene være basert på læreres selv-rapporterte undervisning, og ofte vil lærere svare det de tror er forventet av dem (Nilsen et al., 2020). For elevspørreskjemaer vil svarene gi informasjon om elevenes *opplevelse* av undervisningskvalitet. Ved å aggregere (samle) elevenes svar til klassenivå eller skolenivå vil det gi et slags gjennomsnittlig mål på hvordan elever i en klasse eller på en skole opplever undervisningen. Dette vil redusere noe av det subjektive preget ved elevenes vurdering, og kunne gi et mer objektivt mål på undervisningskvalitet (Marsh et al., 2012). På klassenivå vil dette gi et mål på undervisningskvaliteten til læreren, eller lærerne, for hver enkelt klasse. Analyser på klassenivå krever at elevene som deltar på undersøkelsen, er trukket ut med hele klasser, slik som i TIMSS-undersøkelsen (Klieme & Nilsen, 2022). Ved å aggregere elevenes svar til skolenivå, vil

dette gi et mål på den gjennomsnittlige undervisningskvaliteten ved skolen. Dette gir ikke strengt tatt et mål på undervisningskvaliteten for hver enkelt lærer, men en samlet undervisningskvalitet for de aktuelle lærerne ved skolen. Denne typen analyser krever at elevene er trukket ut på skolenivå. Det er denne typen uttrekk som er gjort i PISA-undersøkelsen.

Når det kommer til spørreundersøkelser er det også viktig å være bevisst på at besvarelser på spørsmål om undervisning kan være påvirket av andre faktorer enn selve undervisningen, som kan gjøre det vanskelig å tolke resultatene. Noen studier har vist at elever som kommer fra hjem med høy SØS eller har høye prestasjoner, svarer mer positivt på spørsmål om skolen og lærerne enn elever med lav SØS (Atlay et al., 2019). Hvorvidt dette skyldes at elever med høy SØS og høye prestasjoner generelt har en mer positiv holdning, eller om de faktisk får en annen type undervisning enn elever med lav SØS, er vanskelig å si. Det kan også være vanskelig å tolke resultater på skole- eller klassenivå. Noen studier har vist at skoler med høy SØS har lavere undervisningskvalitet enn skoler med lav SØS (se for eksempel Senden et al., under utgivelse). Men den positive sammenhengen mellom undervisningskvalitet og SØS på skolenivå kan skyldes at det er vanskeligere å undervise på skoler med lav SØS (Fauth et al., 2020), at skoler med høy SØS har en høyere andel kvalifiserte lærere (Bonesrønning et al, 2005), eller at elevene på skoler med høy SØS har et annet svarmønster enn elever på skoler med lav SØS (Atlay et al., 2019). Disse ulike forklaringene er viktige å ta hensyn til når man skal tolke resultatene fra studier som undersøker denne sammenhengen.

Tidligere forskning

Hva vet vi fra tidligere PISA-undersøkelser om undervisningskvaliteten i Norge?

Norske elevers opplevelse av matematikkundervisningen ble undersøkt i PISA 2003 og 2012. Resultatene fra PISA 2003 viste at norske elever rapporterte om svakere klasseledelse enn elever fra de andre nordiske landene, og også svakere enn elever fra de andre OECD-landene som deltok i undersøkelsen (Kjærnsli et al., 2004). Norske elever rapporterte også om lavere grad av «støttende lærer» enn elever i de andre nordiske landene (begrepet «støttende lærer» er brukt i tidligere PISA-rapporter og viser til det samme konseptet som «støttende undervisning» i denne

studien). Da undervisningen i matematikk igjen ble undersøkt i PISA 2012, rapporterte norske elever om betydelig bedre klasseledelse enn i 2003, på samme nivå som elever i Danmark og Island og bedre enn finske og svenske elever (Kjærnsli & Olsen, 2013). For «støttende lærer» rapporterte norske elever om minst grad av dette blant de nordiske landene i 2012. I PISA 2012 ble også dimensjonen «kognitiv aktivering» (det vi i dette kapittelet referer til som «faglig utfordring») undersøkt, og resultatene viste at svenske, norske og islandske elever rapporterte at lærerne relativt sjelden bidrar til å stimulere og utfordre elevene faglig. I tillegg ble «strukturende aktiviteter» undersøkt, som er tematisk knyttet til «kognitiv aktivering». «Strukturerende aktiviteter» handler blant annet om å sette klare læringsmål og oppsummere tidligere undervisningstimer for elevene (Kjærnsli & Olsen, 2013). I PISA 2012 rapporterte danske og norske elever at slike aktiviteter foregår relativt sjeldnere i matematikkundervisningen enn elever i de andre nordiske landene.

Hva vet vi om sammenhengen mellom undervisningskvalitet og prestasjoner?

Det er gjennomført flere studier som viser en sammenheng mellom elevers prestasjoner og de tre dimensjonene av undervisningskvalitet i rammeverket «De tre grunnleggende dimensjonene». Av disse dimensjonene er det *klasseledelse* som vanligvis har sterkest sammenheng med prestasjoner (Praetorius et al., 2018; Senden, Nilsen & Teig, 2023; van Tartwijk & Hammerness, 2011). *Støttende undervisning* har ofte sterkere sammenheng med elevers motivasjon enn med prestasjoner (Fauth et al., 2014; Praetorius et al., 2018). *Faglig utfordring* er vanskeligst å måle og kan være forskjellig fra fag til fag. Noen studier har funnet en sammenheng mellom faglig utfordring og prestasjoner (Baumert et al., 2010), spesielt på ungdomskolen (Senden, Nilsen & Teig, 2023).

Har alle elever lik tilgang på god undervisning?

Som tidligere nevnt er samspillet mellom lærere og elever en viktig del av undervisningen. Undervisningskvalitet avhenger derfor både av læreren og elevene, og undervisningskvaliteten kan både påvirke og bli påvirket av elevene. Sammensetningen av elevene i en klasse kan derfor ha stor betydning for undervisningen (Fauth et al., 2020). For eksempel kan det

være utfordrende å undervise en klasse der mange elever har svake språkferdigheter, eller har utenomfaglige utfordringer som får konsekvenser i klasseromssituasjonen (Vik et al., 2022). Likevel vil en lærer med god kompetanse innen for eksempel klasseledelse kunne lede en slik utfordrende klasse bedre enn en som ikke har denne kompetansen (Fauth et al., 2020).

Noen studier har funnet at det er en urettferdig fordeling av lærere på tvers av skoler, for eksempel at skoler med høye prestasjoner og lav andel minoritetsspråklige ofte har den høyeste andelen kvalifiserte lærerne (Bonesrønning et al., 2005). Dette ble bekreftet i en nyere studie med bruk av data fra TIMSS 2019 på 5. trinn i Norden (Senden et al., under utgivelse). Andre studier har også funnet at undervisningskvalitet kan redusere forskjellene i prestasjoner mellom elever (Nilsen, Scherer et al., 2020) og på den måten kompensere for forskjellene i prestasjoner mellom elever fra hjem med høy og lav SØS.

Vår studie

For å bidra med kunnskap om matematikkundervisningen på norske skoler vil vi undersøke følgende forskningsspørsmål:

1. Hva karakteriserer undervisningskvaliteten i matematikk i Norge i forhold til de andre nordiske landene?
2. Hva karakteriserer undervisningskvaliteten i matematikk på skoler med høy SØS i forhold til skoler med lav SØS i Norge?
3. Hva er sammenhengen mellom undervisningskvalitet og prestasjoner i matematikk i Norge i forhold til de andre nordiske landene?

I studien undersøker vi de tre dimensjonene klasseledelse, støttende undervisning og faglige utfordringer som karakteristikk ved undervisningen. Studien bygger på analyser av 15-åringers svar på spørsmål om matematikkundervisningen og deres prestasjoner i matematikk fra PISA 2022.

Metode

Analysene i dette kapittelet er gjort med den frigitte datafila fra PISA 2022. Tabell 1 viser antall elever og skoler for hvert av de nordiske landene.

Tabell 1. Oversikt over antall elever og skoler i de nordiske landene i datafila som er brukt i kapittelet

	Antall elever	Antall skoler	Gjennomsnittlig antall elever per skole i utvalget
Norge	6611	265	24,9
Danmark	6200	347	17,9
Finland	10 239	241	42,5
Island	3360	134	25,1
Sverige	6072	262	23,2

Variabler brukt i analysene

Elevspørreskjemaet i PISA 2022 inneholdt flere spørsmål knyttet til elevenes bakgrunn og elevenes holdninger og oppfatninger av skolen, matematikkfaget og undervisningen (for mer informasjon om PISA-undersøkelsen, se kapittel 1 av Pettersen og Jensen (2024), i denne boka). Spørsmålene om matematikkundervisningen i PISA 2022 er knyttet til de tre dimensjonene i rammeverket «De tre grunnleggende dimensjonene». I datafilene fra undersøkelsen er det beregnet samlevariabler¹ med mål for hver av dimensjonene. Samlevariabelen er satt sammen av flere utsagn elevene skulle ta stilling til. Målet for hver av samlevariablene er standardisert basert på resultatene for OECD-landene, hvor 0 på skalaen er satt til OECD-gjennomsnittet, og 1 tilsvarer ett standardavvik (OECD, 2023b). Det betyr at et mål på 0,5 vil si et halvt standardavvik over gjennomsnittet blant OECD-landene, mens -1 betyr ett standardavvik under OECD-gjennomsnittet. For samlevariablene *klasseledelse* og *støttende undervisning* er skalaen standardisert ut fra resultatene for OECD-landene i PISA 2012, mens skalaen for *faglig utfordring* er standardisert ut fra PISA 2022-resultatene (OECD, 2023b). Nedenfor følger en kort beskrivelse av samlevariablene knyttet til matematikkundervisningen som er brukt i dette kapittelet, med noen eksempler på utsagn fra spørreskjemaet. Alle utsagnene til de ulike samlevariablene er gitt i vedlegg A.

Klasseledelse er en del av undervisningskvalitet som måles likt i alle fag. Elevene blir spurt om å ta stilling til ulike utsagn og rangere hvor ofte dette skjer, som for eksempel: «Elevene hører ikke etter hva læreren sier» eller «Det er bråk og uro». Samlevariabelen har den engelske

¹ En samlevariabel består av flere variabler som til sammen måler et underliggende begrep, som for eksempel klasseledelse eller motivasjon.

betegnelsen *disciplinary climate* i PISA og har blitt oversatt til «arbeidsro» i tidligere PISA-rapporter (Kjærnsli & Olsen, 2013), men heter klasseledelse (*classroom management*) i rammeverket vi benytter. Samlevariabelen bestod av syv utsagn, hvor hver elev fikk tilfeldig tildelt fem av utsagnene som de skulle ta stilling til. I PISA 2022 var målet for indre konsistens (Cronbachs alfa) 0,86 (OECD, 2023b).

Støttende undervisning er også en del av undervisningskvalitet som måles likt i alle fag. Elevene blir spurt om å ta stilling til fire utsagn og rangere hvor ofte dette skjer, som for eksempel: «Læreren viser interesse for den enkelte elevs læring» eller «Læreren fortsetter å forklare inntil elevene forstår». Målet for indre konsistens på samlevariabelen *støttende undervisning* var 0,92 i PISA 2022 (OECD, 2023b).

Faglig utfordring er en fagspesifikk dimensjon av undervisningskvalitet, og vår samlevariabel handler om aktiviteter som fremmer resonnering. Dette omfatter blant annet hvilken type matematikkoppgaver elevene får, og hvilke spørsmål læreren stiller i matematikktimene. Eksempler på utsagn er: «Læreren ber oss om å forklare tankegangen vår når vi løser en matematikkoppgave» eller «Læreren ber oss om å argumentere for det svaret vi har gitt på en matematikkoppgave». Samlevariabelen bestod av ni utsagn, hvor hver elev fikk tilfeldig tildelt fem utsagn som de skulle ta stilling til. For denne samlevariabelen var den indre konsistensen på 0,83 (OECD, 2023b).

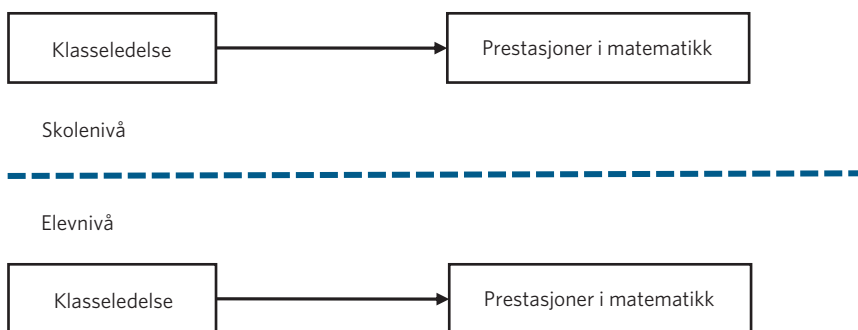
Variabelen prestasjoner i matematikk er basert på elevenes resultater i PISA 2022. I PISA 2022 er elevenes matematikkprestasjoner beregnet ved å bruke ti plausible verdier. I analysene i dette kapitlet har vi brukt den første plausible variabelen (PVIMATH). I en studie av Aparicio et al. (2021) fant de at det å bruke én plausibel variabel gir svært like resultater som det å bruke ti variabler (for mer informasjon om plausible verdier i PISA, se kapittel 1 av Pettersen og Jensen (2024), i denne boka).

I PISA måles elevenes sosioøkonomiske status (SØS) gjennom en samlevariabel bestående av spørsmål knyttet til ressurser i hjemmet og foreldrenes utdanningsnivå og yrkesstatus. Skolenes SØS ble beregnet ut fra gjennomsnittlige (aggregerte) mål for elevenes SØS. Høy-SØS-skoler ble definert som de 25 prosent av skolene hvor elevene hadde høyest gjennomsnittlig SØS, og lav-SØS-skoler ble definert som de 25 prosent av skolene hvor elevene hadde lavest gjennomsnittlig SØS.

Analysemetode

For å undersøke sammenhengene mellom undervisningskvalitet og elevenes prestasjoner brukte vi to-nivå (elev- og skolenivå) regresjonsanalyse som også gir validitet og reliabilitet av samlevariabler og mål på hvor godt den teoretiske modellen passer til dataene. Analysene ble gjort på elev- og skolenivå samtidig, for å kontrollere for forskjellene i elevenes oppfatning av undervisningskvalitet. Vi benyttet programvaren Mplus (Muthén & Muthén, 1998–2017) til å gjennomføre analysene.

Vi undersøker hver av de tre dimensjonene for undervisningskvalitet, klasseledelse, støttende undervisning og faglig utfordring, for seg i sin egen modell. Figur 1 viser modellen for klasseledelse. Modellene for de andre to dimensjonene er tilsvarende. Siden det er en høy korrelasjon mellom de tre dimensjonene, er det nødvendig å lage en modell for hver av dimensjonene for å unngå at estimatene for regresjonskoeffisientene blir feil (Senden, Nilsen & Teig, 2023).



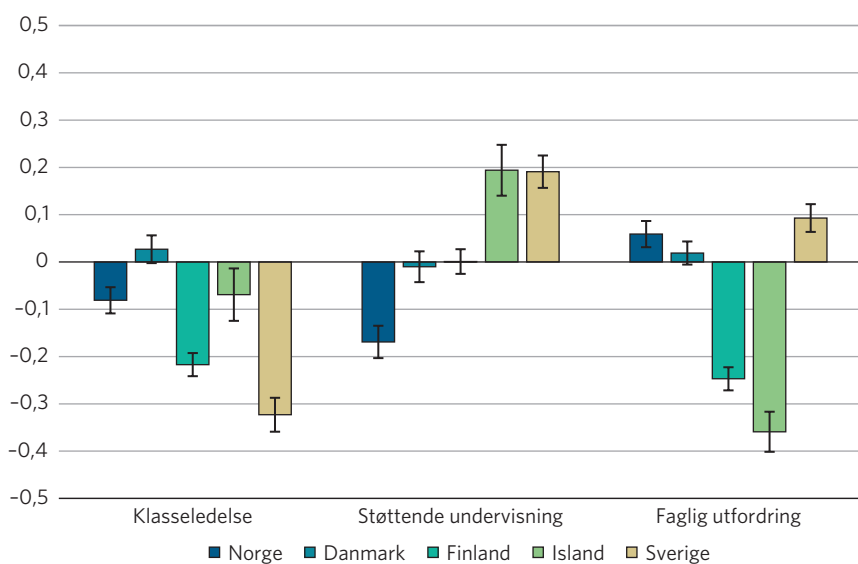
Figur 1. Regresjonsmodell som viser påvirkningen av klasseledelse på prestasjoner i matematikk på elev- og skolenivå

Videre benyttes flergruppemodeller for å undersøke forskjellen mellom de nordiske landene og forskjellen mellom høy- og lav-SØS-skoler i Norge. Denne metoden gjør at resultatene er sammenliknbare på tvers av grupper. For hver av de tre modellene (klasseledelse, støttende undervisning og faglig utfordring) estimerte vi både regresjonskoeffisienter på hvert nivå og gjennomsnittet av samlevariablene for alle de nordiske landene.

Resultater

Hva karakteriserer undervisningskvaliteten i matematikk i Norge i forhold til resten av Norden?

Figur 2 viser resultatet for de tre dimensjonene av undervisningskvalitet for Norge og de andre nordiske landene. Analysene er gjort på både elev- og skolenivå, men her viser vi gjennomsnittet for hver av de tre dimensjonene på skolenivå. Disse gjennomsnittsverdiene gir altså et samlet (aggregert) mål for elevers oppfatning av undervisningen på hver skole i hvert av de nordiske landene. Skalaen er standardisert slik at 0 tilsvarer gjennomsnittet blant OECD-landene i PISA 2012.



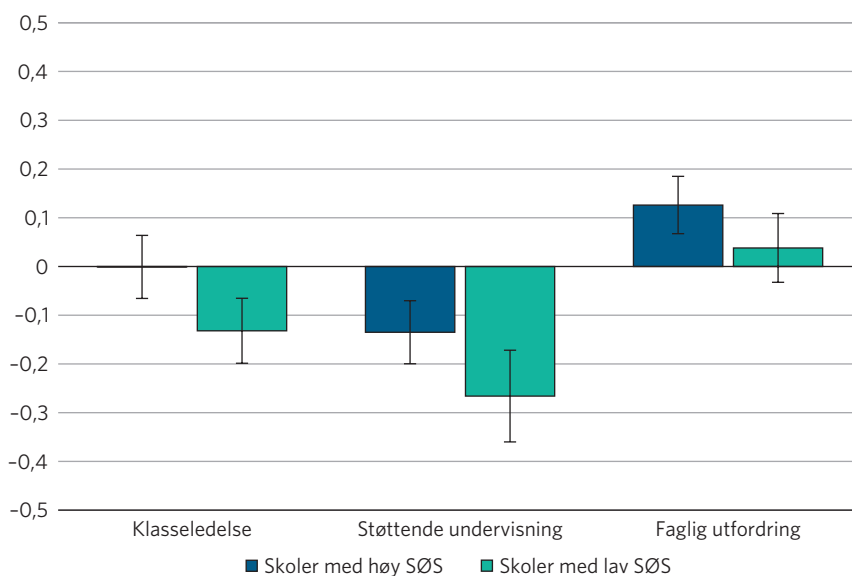
Figur 2. Gjennomsnittet for de tre dimensjonene av undervisningskvalitet i de nordiske landene. Analysene er gjennomført på skolenivå. Skalaen er standardisert ut fra resultatene for OECD-landene, hvor gjennomsnittet er satt til 0 og standardavviket til 1. 95 prosent konfidensintervall er markert med 1,96 ganger standardfeilen i hver retning

Resultatene viser at Danmark har høyest verdi for dimensjonen *klasseledelse* blant de nordiske landene, etterfulgt av Island og Norge (figur 2). Dette betyr at danske elever i størst grad rapporterer om ro og orden i klassen og at elevene hører etter hva læreren sier. Svenske og finske elever rapporterer om minst grad av ro og orden i forhold til elevene i de andre nordiske landene.

For dimensjonen *støttende undervisning* har Norge den laveste verdien blant de nordiske landene (figur 2). I Norden er det elevene i Island og Sverige som rapporterer om mest støtte fra læreren. Når det gjelder *faglig utfordring* rapporterer elevene i Sverige, Norge og Danmark om størst grad av faglige utfordringer, mens islandske elever rapporterer om minst faglige utfordringer.

Hva karakteriserer undervisningskvaliteten i matematikk på skoler med høy SØS i forhold til skoler med lav SØS i Norge?

Figur 3 viser gjennomsnittet av de tre dimensjonene av undervisningskvalitet på skoler med høy SØS og lav SØS i Norge. Analysene er også her gjort på elev- og skolenivå, og vi viser resultatene på skolenivå. Verdien 0 tilsvarer gjennomsnittet for OECD-landene, mens en forskjell på 1 tilsvarer en forskjell på ett standardavvik.



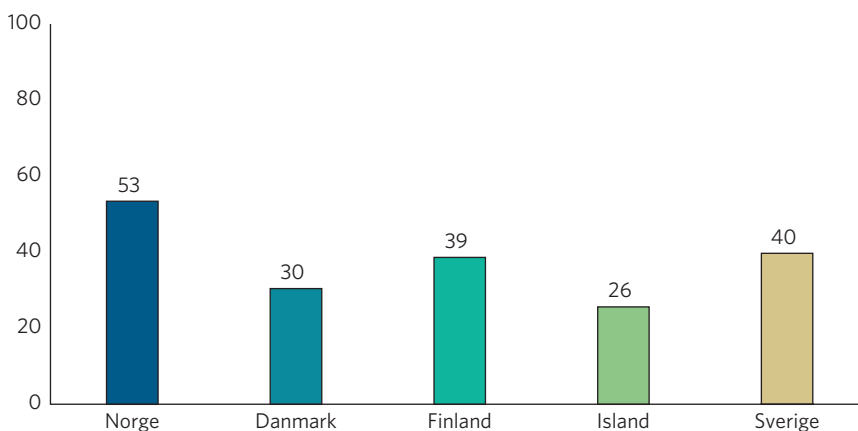
Figur 3. Gjennomsnittet av de tre dimensjonene av undervisningskvalitet i Norge på skolenivå for skoler med høy SØS og for skoler med lav SØS. Skalaen er standardisert ut fra resultatene for OECD-landene, hvor gjennomsnittet er satt til 0 og standardavviket til 1. 95 prosent konfidensintervall er markert med 1,96 ganger standardfeilen i hver retning

Resultatene viser at elever på de 25 prosent av skolene med høyest sosioøkonomisk status rapporterer om høyere grad av klasseledelse og støttende

undervisning enn elever på de 25 prosent av skolene med lavest sosioøkonomisk status. For dimensjonen faglige utfordringer er det ingen statistisk signifikant forskjell mellom høy- og lav-SØS-skoler.

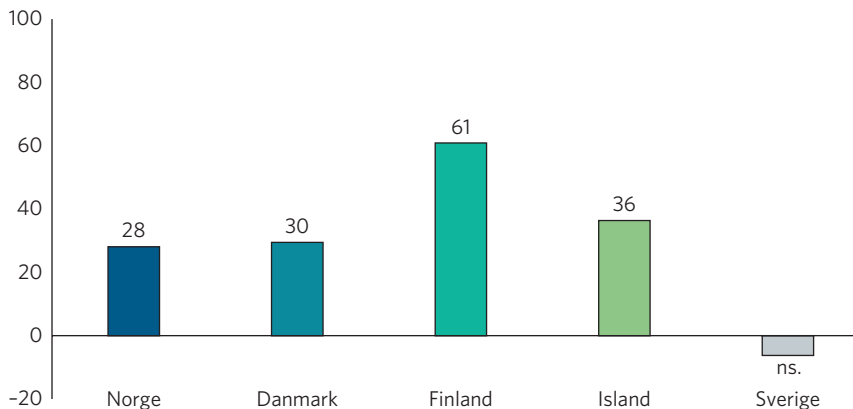
Hva er sammenhengen mellom undervisningskvalitet og prestasjoner i de nordiske landene?

Figur 4, 5 og 6 viser sammenhengen mellom de tre dimensjonene av undervisningskvalitet og matematikkprestasjoner (regresjonskoeffisientene) i de nordiske landene. Resultatene fra regresjonsanalysene er vist i vedlegg B, som viser resultatene på både elev- og skolenivå. Som tidligere nevnt setter vi søkelyset på skolenivå, og figur 4, 5 og 6 viser sammenhengene mellom skolenes aggregerte (samlede) undervisningskvalitet og skolenes prestasjoner (etter å ha kontrollert for forskjeller mellom elevers oppfatninger).



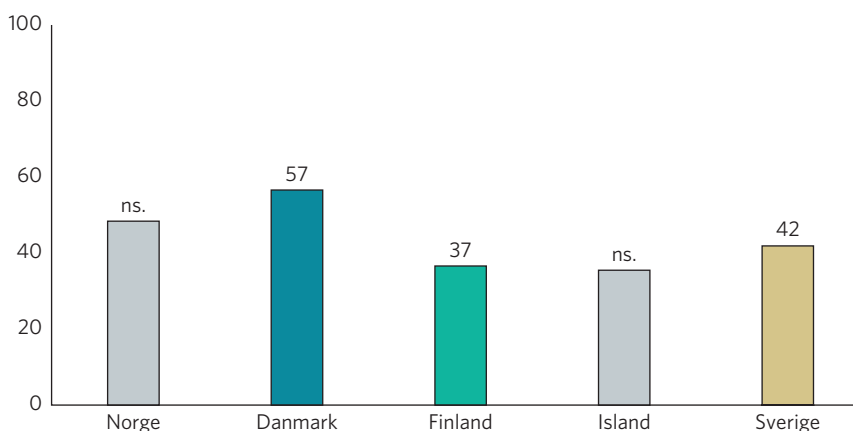
Figur 4. Sammenhengen mellom klasseledelse og prestasjoner på skolenivå (ustandardiserte regresjonskoeffisienter) for de nordiske landene

I figur 4 ser vi at det er en signifikant sammenheng mellom klasseledelse, på skolenivå, og matematikkprestasjoner i alle de nordiske landene, men at den er størst i Norge. Sammenhengen på 53 poeng for Norge, betyr at en økning på ett standardavvik på skolens klasseledelse henger sammen med 53 poeng økning i prestasjoner for elevene på denne skolen. Dette er en betydelig sammenheng. Den svakest sammenhengen finner vi i Danmark (30 poeng) og på Island (26 poeng).



Figur 5. Sammenhengen mellom støttende undervisning og prestasjoner på skolenivå (ustandardiserte regresjonskoeffisienter) for de nordiske landene. Grå søyle betyr at regresjonskoeffisienten ikke er statistisk signifikant (ns.)

Figur 5 viser sammenhengen mellom elevenes rapportering av støttende undervisning, på skolenivå, og prestasjoner i matematikk. Denne sammenhengen er langt sterkere i Finland enn i de andre nordiske landene, hvor ett standardavvik økning i støttende undervisning er forbundet med 61 poeng høyere prestasjoner i matematikk. Også i Norge, Danmark og på Island er det en sammenheng mellom støttende undervisning og matematikkprestasjoner, mens i Sverige er det ingen statistisk signifikant sammenheng.



Figur 6. Sammenhengen mellom faglig utfordring og prestasjoner på skolenivå (ustandardiserte regresjonskoeffisienter) for de nordiske landene. Grå søyle betyr at regresjonskoeffisienten ikke er statistisk signifikant (ns.)

Figur 6 viser sammenhengen mellom faglig utfordring og prestasjoner på skolenivå. Denne sammenhengen er sterkest i Danmark, hvor en økning på ett standardavvik er forbundet med 57 poeng høyere matematikkprestasjoner. Denne sammenhengen er ikke statistisk signifikant i Norge eller på Island.

Diskusjon

Klasseledelse er som sagt en samlev variabel som reflekterer om det er ro og orden i klassen, og hvorvidt elevene hører etter hva læreren sier. Vi fant at det er en sterkere sammenheng mellom klasseledelse og prestasjoner på norske skoler enn på skoler i andre nordiske land. Dette kan indikere at det har stor betydning for skolens samlede prestasjoner at lærere, i samspill med elevene, fremmer et positivt og produktivt læringsmiljø gjennom effektiv klasseledelse. Dette støttes av tidligere internasjonal forskning som har vist at klasseledelse er den dimensjonen av undervisningskvalitet som har størst betydning for prestasjoner (Praetorius et al., 2018). Også forskning i Norge med TIMSS-data (Senden, Nilsen & Teig, 2023) peker på viktigheten av god klasseledelse. Men hvor god klasseledelse er det på skolene i Norge? I et nordisk perspektiv rapporterer elevene om best klasseledelse i Danmark. Elevene i Norge og Island rapporterer om noe svakere klasseledelse enn elevene i Danmark, men høyere enn i Finland og Sverige. Videre viser resultatene at i Norge skårer skoler med høy SØS høyere på klasseledelse enn skoler med lav SØS.

Disse resultatene kan tolkes på flere måter. De kan tyde på at skoler i Norge, og spesielt skoler med lav SØS, har et forbedringspotensial i forhold til andre land når det gjelder klasseledelse, og at bedre klasseledelse kan bidra til bedre matematikkprestasjoner. Det kan også bety at elever på skoler med høy SØS (og dermed høyere prestasjoner) har mer positiv holdning til skole og dermed svarer mer positivt på spørsmål om klasseledelse. Samtidig viser både videobservasjoner og data fra TIMSS basert på elevspørreskjema at lærere har bedre klasseledelse på skoler med høy SØS enn skoler med lav SØS i Oslo (Senden et al., under utgivelse). Én forklaring på dette er at det kan være mer krevende å fremme effektiv klasseledelse på skoler hvor elevene har lavere SØS og lavere prestasjoner, da det oftere er elever med flere utfordringer på slike skoler (OECD, 2013). Samlet sett peker resultatene på at skoler med lav SØS kan ha nytte av mer ressurser til lærer (for eksempel flere lærere per klasserom), i tråd med rapporten *En barndom for livet* (Rege et al., 2023).

Som tidligere nevnt rapporterte norske elever om betydelig bedre klasseledelse i PISA 2012 enn i 2003, på samme nivå som elever i Danmark og Island og bedre enn finske og svenske elever (Kjærnsli et al., 2004; Kjærnsli & Olsen, 2013). Selv om målene fra 2022 og 2012 ikke er direkte sammenliknbare kan det se ut som om resultatene ikke har endret seg nevneverdig mellom 2012 og 2022 (bortsett fra at Danmark har høyere verdier enn Norge i 2022).

Støttende undervisning handler som sagt både om faglig støtte, for eksempel i form av klar og forståelig undervisning, og emosjonell støtte, som å vise interesse for hver enkelt elev. Her rapporterer norske elever om lavest støtte blant elever i de nordiske land. Også i PISA 2003 og i 2012 rapporterte de norske elevene om lavest støtte sammenliknet med de andre nordiske elevene. Også for denne dimensjonen av klasseledelse finner vi forskjeller mellom skoler med høy og lav SØS: Elever på skoler med lav SØS rapporterer om noe mindre grad av støtte enn elever på skoler med høy SØS. Støttende undervisning har en middels sterk påvirkning på prestasjoner i Norge, på linje med de andre nordiske landene (bortsett fra i Finland, hvor den har en sterk påvirkning på prestasjoner). Også analyser med TIMSS-data viser en middels sterk relasjon til matematikkprestasjoner på 9. trinn (Senden, Nilsen & Teig, 2023).

Samlet viser funnene at støttende undervisning er viktig for elevers læringsutbytte i matematikk, men at elevene rapporterer om forholdsvis lite støtte og at elever på lav-SØS-skoler rapporterte om mindre støtte enn elever på høy-SØS-skoler. Læreres kompetanse er viktig for å kunne støtte elevene både faglig og emosjonelt (Baumert et al., 2010; Teig & Nilsen, 2022). Her kreves med andre ord både faglig, fagdidaktisk og pedagogisk kunnskap. Det er dermed viktig at lærerutdanningen styrkes på begge disse feltene. Siden restriksjoner og tiltak i forbindelse med covid-19-pandemien har påvirket undervisningen for mange av elevene som deltok i PISA 2022, er det mulig at dette kan ha påvirket i hvilken grad elevene har opplevd støtte fra læreren. En rapport fra Rambøll (2022) hvor elever ble intervjuet om deres opplevelse av undervisningen på hjemmeskole, viser til elever som peker på at undervisningen i matematikkfaget var spesielt krevende på hjemmeskole. Videre rapporterte de at de opplevde at de fikk mindre støtte enn i vanlig klasseromsundervisning (Rambøll, 2022). Dette kan være en forklaring på at norske elever rapporterer om forholdsvis liten grad av støttende undervisning i PISA 2022.

Når det kommer til faglige utfordringer, rapporterte norske og svenske elever om høyest grad av dette i Norden. Dette betyr at norske elever

rapporterer om at de blir stimulert og utfordret i matematikk, for eksempel ved å forklare løsninger og tankegangen sin, argumentere for svar og løse oppgaver på ulike måter. Det var ikke statistisk signifikante forskjeller i elevenes rapportering om faglige utfordringer på skoler med høy og lav SØS. Disse resultatene tyder på at elever på høy- og lav-SØS-skoler blir stimulert og utfordret i like stor grad i matematikkundervisningen. Det er noe overraskende at sammenhengen med prestasjoner ikke var signifikant for denne samlevARIABLEN. Vi undersøkte hvorfor, ved å se nærmere på de ni utsagnene som OECD har tatt med i samlevARIABLEN (se vedlegg A). Her fant vi at det første utsagnet, «Læreren ber oss om å løse matematikkoppgaver uten å regne ut noe», hadde en negativ relasjon til prestasjoner i alle land (men ikke signifikant for alle land). Dersom vi fjernet dette utsagnet, ble påvirkningen av samlevARIABLEN faglig utfordring sterkere i alle land, og signifikant i Norge med en regresjonskoeffisient på 48,72 ($p = 0,007$). Dette er nesten en like sterk påvirkning som klasseledelse. Vi vet ikke hvorfor dette utsagnet ikke fungerer i Norden, men det kan være at elevene ikke har skjønnet hva dette utsagnet betyr.

Senden, Nilsen og Teig (2023) fant en forholdsvis sterk påvirkning av faglig utfordring på prestasjoner i matematikk på 9. trinn med data fra TIMSS 2019. Internasjonalt er funnene ikke alltid entydige, da det er et vanskelig begrep å måle (Praetorius et al., 2018). Det er spesielt vanskelig å måle relasjoner til prestasjoner med tverrsnittsdata, altså data målt på kun ett tidspunkt, fordi svake elever vil svare at de føler at det er større faglige utfordringer (Klieme & Nilsen, 2022). Her er det et stort behov for longitudinelle data, hvor elevene blir fulgt over tid, for å undersøke betydningen av faglig utfordring for elevers matematikkprestasjoner. Slike data ville gjort det mulig å undersøke om undervisningskvalitet bidrar til *endringer* i prestasjoner, ved at det da blir tatt hensyn til elevers tidligere prestasjoner.

Svakheter ved vår studie

Store, internasjonale undersøkelser som PISA og TIMSS er basert på data som kun måles på ett tidspunkt. De har et såkalt tverrsnittsdesign. Dette gjør at man ikke kan trekke kausale slutninger, altså fastslå at noe forårsaker noe annet. Det er et stort behov for longitudinelle undersøkelser med representative utvalg som følger elevene over tid. TIMSS har et slikt design for 2024, men Norge er ikke med.

En annen svakhet ved vår studie er at vi ikke har data på klassenivå. De elevene som svarer på spørreskjema i PISA, kan ha forskjellige lærere. Når vi aggregerer dataene til skolenivå, får vi et mer generelt mål for skolens undervisningskvalitet og ikke til de enkelte lærernes.

Vi har benyttet de samlevariablene for undervisningskvalitet som OECD har satt sammen, og som egentlig skal fungere for alle land. Imidlertid så vi at faglig utfordring ikke fungerte bra for de nordiske landene. Videre forskning vil kunne få mer robuste og valide mål ved å benytte strukturell ligningsmodellering, hvor man kan undersøke om alle utsagn måler det samme underliggende begrepet.

Konklusjon

I denne studien har vi undersøkt hva som karakteriserer undervisningskvalitet i Norge sammenliknet med andre nordiske land. Vi fant noe lavere verdier for klasseledelse på skoler i Norge enn i Danmark, men høyere enn i Finland og Sverige. Videre viste resultatene noe bedre klasseledelse på skoler med høy enn lav SØS. Denne forskjellen kan skyldes flere ting, for eksempel at lærerne på høy-SØS-skoler i større grad mestrer å holde ro og orden i matematikktimene, eller at elevene på høy-SØS-skoler er mer motiverte for og positive til matematikkfaget og skole generelt og dermed skaper mindre bråk og uro i undervisningen. Sannsynligvis gjenspeiler klasseledelse en kombinasjon av dette. Videre fant vi at Norge hadde lavest støttende undervisning i Norden, og at elever på skoler med lav SØS rapporterte om mindre støtte enn elever på skoler med høy SØS. Norske elever rapporterte om høyest grad av faglige utfordringer i Norden, og lå over OECD-gjennomsnittet.

Når det kom til sammenhengen mellom undervisningskvalitet og matematikprestasjoner, fant vi en sterk sammenheng mellom klasseledelse og prestasjoner i Norge, og den var sterkest i Norden. Det var en middels sterk sammenheng mellom støttende undervisning og prestasjoner, og denne sammenhengen var svakere enn i Finland, men høyere enn i Sverige. Når det gjaldt faglige utfordringer, var resultatene mer uklare. Mye tyder på at dette også har sammenheng med prestasjoner, men at det ene utsagnet i samlevariablen kan ha vært uklart for elevene. Konklusjonen er at alle tre dimensjonene av undervisningskvalitet er viktige for elevenes prestasjoner i matematikk.

Forskjellene mellom klasseledelse og støttende undervisning for skoler med høy og lav SØS kan tyde på at det er behov for mer ressurser på skoler med lav SØS. Forskjellene på matematikkprestasjoner mellom skoler øker, og disse forskjellene kan i større grad enn tidligere forklares av SØS (se kapittel 7 av Nilsen og Jensen, i denne boka). Videre er det mer heterogene klasser, noe som gjør det mer krevende å undervise (Nilsen & Gustafsson, 2024). Økt faglig, fagdidaktisk og pedagogisk kunnskap for lærere og lærerstudenter er viktig for å øke undervisningskvaliteten (Baumert et al., 2010). Derfor er det viktig å styrke lærerutdanningen og læreres etter- og videreutdanning.

Forfatterbiografier

Trude Nilsen er seniorforsker ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo. Hun er leder for Strand 1 ved senter for fremdragende forskning CREATE – Senter for forskning på likhet i utdanning, og for prosjektet TESO, støttet av Norges forskningsråd. Nilsen jobber med data fra de internasjonale undersøkelsene, og hennes forskningsinteresser inkluderer ulikheter i utdanningen, læreres kompetanse og undervisningskvalitet samt kausale metoder. Nilsen var redaktør av håndboken *International Handbook of Comparative Large-Scale Studies in Education* (utgitt på Springer i 2022), og har også utgitt et betydelig antall artikler i internasjonale tidsskrift i tillegg til bøker og rapporter.

Andreas Pettersen er forsker ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo. Han har en doktorgrad i matematikkdiraktikk og har jobbet med PISA-undersøkelsen siden 2017. Pettersen har utgitt flere artikler om matematikkdiraktikk og vært redaktør for boka *Equity, Equality and Diversity in the Nordic Model of Education* (utgitt på Springer i 2020).

Referanser

- Aparicio, J., Cordero, J. M. & Ortiz, L. (2021). Efficiency analysis with educational data: How to deal with plausible values from international large-scale assessments. *Mathematics*, 9(13), Artikkel 1579. <https://doi.org/10.3390/math9131579>
- Atlay, C., Tieben, N., Fauth, B. & Hillmert, S. (2019). The role of socioeconomic background and prior achievement for students' perception of teacher support. *British Journal of Sociology of Education*, 40(7), 970–991. <https://doi.org/10.1080/01425692.2019.1642737>

- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M. & Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), 133–180. <https://doi.org/10.3102/0002831209345157>
- Blömeke, S., Nilsen, T., Olsen, R. V. & Gustafsson, J.-E. (2022). Conceptual and methodological accomplishments of ILSAs, remaining criticism and limitations. I T. Nilsen, A. Stancel-Piřatak & J.-E. Gustafsson (Red.), *International handbook of comparative large-scale studies in education: Perspectives, methods and findings* (s. 1–54). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-88178-8_22
- Bonesrønning, H., Falch, T. & Strøm, B. (2005). Teacher sorting, teacher quality, and student composition. *European Economic Review*, 49(2), 457–483. [https://doi.org/10.1016/S0014-2921\(03\)00052-7](https://doi.org/10.1016/S0014-2921(03)00052-7)
- Charalambous, C. Y., Praetorius, A.-K., Sammons, P., Walkowiak, T., Jentsch, A. & Kyriakides, L. (2021). Working more collaboratively to better understand teaching and its quality: Challenges faced and possible solutions. *Studies in Educational Evaluation*, 71, 101092. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2021.101092>
- Cohen, D. K., Raudenbush, S. W. & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 25(2), 119–142. <https://doi.org/10.3102/01623737025002119>
- Fauth, B., Decristan, J., Rieser, S., Klieme, E. & Büttner, G. (2014). Student ratings of teaching quality in primary school: Dimensions and prediction of student outcomes. *Learning and Instruction*, 29, 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.07.001>
- Fauth, B., Wagner, W., Bertram, C., Göllner, R., Roloff, J., Lüdtke, O., Polikoff, M. S., Klusmann, U. & Trautwein, U. (2020). Don't blame the teacher? The need to account for classroom characteristics in evaluations of teaching quality. *Journal of Educational Psychology*, 112(6), Artikel 1284. <https://doi.org/10.1037/edu0000416>
- Jensen, F., Pettersen, A., Frønes, T. S., Eriksen, A., Løvgren, M. & Narvhus, E. K. (2023). *PISA 2022. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing*. Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/noasp.205>
- Kjærnsli, M., Lie, S., Olsen, R. V. & Turmo, A. (2004). *Rett spor eller ville veier? Norske elevers prestasjoner i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2003*. Universitetsforlaget.
- Kjærnsli, M. & Olsen, R. V. (2013). *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Universitetsforlaget.
- Klette, K. (2023). Classroom observation as a means of understanding teaching quality: Towards a shared language of teaching? *Journal of Curriculum Studies*, 55(1), 49–62. <https://doi.org/10.1080/00220272.2023.2172360>
- Klette, K., Blikstad-Balas, M., & Roe, A. (2017). Linking instruction and student achievement. A research design for a new generation of classroom studies. *Acta Didactica Norge*, 11(3). <https://doi.org/10.5617/adno.4729>
- Klieme, E. & Nilsen, T. (2022). Teaching quality and student outcomes in TIMSS and PISA. I T. Nilsen, A. Stancel-Piřatak, & J. E. Gustafsson (Red.), *International handbook of comparative large-scale studies in education: Perspectives, methods and findings*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-38298-8_37-1
- Klieme, E., Pauli, C. & Reusser, K. (2009). The pythagoras study: Investigating effects of teaching and learning in Swiss and German mathematics classrooms. I T. Janik & T. Seidel (Red.), *The power of video studies in investigating teaching and learning in the classroom* (s. 137–160). Waxmann.
- Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. <https://www.udir.no/lk20/overordnet-del>
- Marsh, H. W., Lüdtke, O., Nagengast, B., Trautwein, U., Morin, A. J., Abduljabbar, A. S. & Köller, O. (2012). Classroom climate and contextual effects: Conceptual and methodological

- issues in the evaluation of group-level effects. *Educational Psychologist*, 47(2), 106–124. <https://doi.org/10.1080/00461520.2012.670488>
- Mullis, I. V. S. & Martin, M. O. (2017). TIMSS 2019 assessment frameworks. <http://timssandpirls.bc.edu/timss2019/frameworks/>
- Muthén, L. K. & Muthén, B. O. (2017). *Mplus user's guide* (8. utg.). Muthén & Muthén.
- Nilsen, T. & Gustafsson, J.-E. (2016). *Teacher quality, instructional quality and student outcomes: Relationships across countries, cohorts and time*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement.
- Nilsen, T. & Gustafsson, J.-E. (2024). Changes in teacher practices related to changes in student achievement. I N. Teig, T. Nilsen & K. Y. Hansen (Red.), *Effective and equitable teacher practice in mathematics and science education: A Nordic perspective across time and groups of students* (s. 207–229). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-49580-9_7
- Nilsen, T., Scherer, R. & Blömeke, S. (2018). 3. The relation of science teachers' quality and instruction to student motivation and achievement in the 4th and 8th grade: A Nordic perspective. *Northern Lights on TIMSS and PISA 2018*, 61, 61–93. <https://doi.org/10.6027/fala7132-en>
- Nilsen, T., Scherer, R., Gustafsson, J.-E., Teig, N. & Kaarstein, H. (2020). Teachers' role in enhancing equity: A multilevel structural equation modeling with mediated moderation. I T. S. Frønes, A. Pettersen, J. Radisic & N. Buchholtz (Red.), *Equity, equality and diversity in the Nordic model of education* (s. 173–196). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61648-9_7
- Nilsen, T., Slot, P., Cigler, H. & Chen, M. (2020). *Measuring process quality in early childhood education and care through situational judgement questions: Findings from TALIS Starting Strong 2018 field trial*. OECD Education. <https://doi.org/10.1787/852602c5-en>
- OECD. (2013). *PISA 2012 results: Excellence through equity. Giving every student the chance to succeed: Volume II*. <https://doi.org/10.1787/9789264201132-en>
- OECD. (2023a). *PISA 2022 assessment and analytical framework*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en>
- OECD. (2023b). Scaling procedures and construct validation of context questionnaire data. I *PISA 2022 technical report* (s. 390–452). Organisation for Economic Co-operation and Development.
- Olsen, R. V. (2013). Undervisning i matematikk. I M. Kjærnsli & R. V. Olsen (Red.), *Fortsatt en vei å gå: Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012* (121–157). Universitetsforlaget.
- Pettersen, A. & Jensen, F. (2024). Innledning. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 9–19). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch1>
- Praetorius, A.-K., Klieme, E., Herbert, B. & Pinger, P. (2018). Generic dimensions of teaching quality: The German framework of three basic dimensions. *ZDM*, 50(3), 407–426.
- Rambøll. (2022). *Innsiktsinnsamling til situasjonsrapporten «Osloskolen i pandemi»*.
- Rege, M. D., Bøe, T., Drange, N., Fløtten, T., Glemmestad, H., Hugvik, K., Salvanes, K. G. & Zachrisson, H. D. (2023). *En barndom for livet: Økt tilhørighet, mestring og læring for barn i fattige familier*. <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/en-ny-barndom-for-livet/id3000835/>
- Rjosk, C., Richter, D., Hochweber, J., Lüdtke, O., Klieme, E. & Stanat, P. (2014). Socioeconomic and language minority classroom composition and individual reading achievement: The mediating role of instructional quality. *Learning and Instruction*, 32, 63–72. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.01.007>
- Seidel, T. & Shavelson, R. J. (2007). Teaching effectiveness research in the past decade: The role of theory and research design in disentangling meta-analysis results. *Review of Educational Research*, 77(4), 454–499. <https://doi.org/10.3102/0034654307310317>

- Senden, B., Nilsen, T. & Blömeke, S. (2022). Instructional quality: A review of conceptualizations, measurement approaches, and research findings. I M. Blikstad-Balas, K. Klette & M. Tengberg (Red.), *Ways of analyzing teaching quality: Potentials and pitfalls* (s. 140–172). Scandinavian University Press.
- Senden, B., Nilsen, T. & Teig, N. (2023). The validity of student ratings of teaching quality: Factorial structure, comparability, and the relation to achievement. *Studies in Educational Evaluation*, 78, Artikkel 101274. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2023.101274>
- Senden, B., Nilsen, T., Ye, W., Teig, N. & Jentsch, A. (under utgivelse). *Teaching quality in science for different classroom compositions*.
- Senden, B., Teig, N. & Nilsen, T. (2023). Studying the comparability of student perceptions of teaching quality across 38 countries. *International Journal of Educational Research Open*, 5, Artikkel 100309. <https://doi.org/10.1016/j.ijedro.2023.100309>
- Stovner, R. B., Klette, K. & Nortvedt, G. A. (2021). The instructional situations in which mathematics teachers provide substantive feedback. *Educational Studies in Mathematics*, 108(3), 533–551. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10065-w>
- Teig, N. & Nilsen, T. (2022). Profiles of instructional quality in primary and secondary education: Patterns, predictors, and relations to student achievement and motivation in science. *Studies in Educational Evaluation*, 74, Artikkel 101170. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2022.101170>
- Teig, N., Nilsen, T. & Hansen, K. Y. (Red.). (2024). *Effective and equitable teacher practice in mathematics and science education. A Nordic perspective across time and groups of students*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-49580-9>
- Teig, N., Scherer, R. & Nilsen, T. (2018). More isn't always better: The curvilinear relationship between inquiry-based teaching and student achievement in science. *Learning and Instruction*, 56, 20–29. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2018.02.006>
- TIMSS. (2011). *TIMSS 2011*. <http://timss.bc.edu/timss2011/index.html>
- van de Vijver, F. J. R. (2018). Towards an integrated framework of bias in noncognitive assessment in international large-scale studies: Challenges and prospects. *Educational Measurement: Issues and Practice*, 37(4), 49–56. <https://doi.org/10.1111/emip.12227>
- van Tartwijk, J. & Hammerness, K. (2011). The neglected role of classroom management in teacher education. *Teaching Education*, 22(2), 109–112. <https://doi.org/10.1080/10476210.2011.567836>
- Vik, F. N., Nilsen, T. & Øverby, N. C. (2022). Aspects of nutritional deficits and cognitive outcomes – triangulation across time and subject domains among students and teachers in TIMSS. *International Journal of Educational Development*, 89, Artikkel 102553. <https://doi.org/10.1016/j.ijedudev.2022.102553>
- White, M. & Klette, K. (2023). What's in a score? Problematising interpretations of observation scores. *Studies in Educational Evaluation*, 77, Artikkel 101238. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2023.101238>

Vedlegg

Vedlegg A. Samlevariabler og utsagn fra spørreskjemaet

Samlevariabel: ***Klasseledelse***

Spørsmål: *Hvor ofte skjer dette i matematikktimene?*

Svaralternativer: Alle timene – De fleste timene – Noen timer – Aldri eller nesten aldri

Utsagn:

- Elevene hører ikke etter hva læreren sier.
- Det er bråk og uro.
- Læreren må vente lenge før elevene roer seg.
- Elevene får ikke arbeidet ordentlig.
- Elevene begynner ikke å arbeide før lenge etter at timen har begynt.
- Elevene blir distraheret av å bruke digitale ressurser (f.eks. smarttelefoner, nettsteder, apper).
- Elevene blir distraheret av andre elever som bruker digitale ressurser (f.eks. smarttelefoner, nettsteder, apper).

Samlevariabel: ***Støttende undervisning***

Spørsmål: *Hvor ofte skjer dette i matematikktimene?*

Svaralternativer: Alle timene – De fleste timene – Noen timer – Aldri eller nesten aldri

Utsagn:

- Læreren viser interesse for den enkelte elevs læring.
- Læreren gir ekstra hjelp når elevene trenger det.
- Læreren hjelper elevene med å lære.
- Læreren fortsetter å forklare inntil elevene forstår.

Samlevariabel: **Faglig utfordring**

Spørsmål: *Tenk på dette skoleåret, hvor ofte gjør læreren dette i matematikktimene?*

Svaralternativer: Aldri eller nesten aldri – Mindre enn halvparten av timene – Omtrent halvparten av timene – Mer enn halvparten av timene – Hver time eller nesten hver time

Utsagn:

- Læreren ber oss om å løse matematikkoppgaver uten å regne ut noe.
- Læreren ber oss om å forklare hvordan vi har løst en matematikkoppgave.
- Læreren ber oss om å forklare hvilke antagelser vi gjør når vi løser en matematikkoppgave.
- Læreren ber oss om å forklare tankegangen vår når vi løser en matematikkoppgave.
- Læreren ber oss om å argumentere for det svaret vi har gitt på en matematikkoppgave.
- Læreren ber oss om å tenke over hvordan nye og gamle temaer i matematikk henger sammen.
- Læreren oppfordrer oss til tenke på hvordan matematikkoppgaver kan løses på andre måter enn det som blir vist i timen.
- Læreren sier at vi må fortsette å prøve, selv om vi synes en matematikkoppgave er vanskelig.
- Læreren ber oss om å lære regler utenat og bruke dem til å løse matematikkoppgaver.

Vedlegg B. Regresjonskoeffisienter og forklart varians mellom undervisningskvalitet og prestasjoner

2022		Norge	Danmark	Finland	Island	Sverige
Klasseledelse	elevnivå	3,5* (0,0)	4,8* (0,1)	NS (NS)	8,5* (0,1)	NS (NS)
	skolenivå	53,4* (0,4)	30,4* (0,3)	38,6* (0,3)	25,6* (0,3)	39,7* (0,3)
R ² , prosent forklart varians		NS 16,1 %	NS NS	NS NS	0,7 % NS	NS 12,2 %
Støttende undervisning	elevnivå	12,0* (0,1)*	11,1* (0,1)*	10,1* (0,1)*	13,6* (0,2)*	11,9* (0,1)*
	skolenivå	28,1* (0,2)*	29,5* (0,3)*	60,9* (0,4)*	36,4* (0,4)*	NS (NS)
R ² , prosent forklart varians		2,1 % 5,2 %	1,8 % 7,9 %	1,4 % 17,1 %	2,7 % 14,6 %	2,0 % NS
Faglig utfordring	elevnivå	8,0* (0,1)*	7,7* (0,1)*	NS NS	4,2* (0,1)*	7,4* (0,1)*
	skolenivå	48,4* (0,3)	56,6* (0,3)*	36,6* (0,2)*	35,5* (0,2)	41,9* (0,2)*
R ² , prosent forklart varians		0,8 % NS	0,7 % 10,6 %	NS 5,0 %	0,2 % 4,8 %	0,7 % 4,4 %

Merk: Estimaten i parentes er standardiserte regresjonskoeffisienter. NS betyr ikke signifikant ($p > 0,05$). Signifikante funn indikeres med * ($p < 0,05$). For R², prosent forklart varians, viser den øverste linjen estimerer på elevnivå og den nederste skolenivå.

KAPITTEL 7

Like muligheter til matematisk kompetanse?

Trude Nilsen Universitetet i Oslo

Fredrik Jensen Universitetet i Oslo

Sammendrag: Dette kapittelet utforsker endringer i likeverd i skolen i Norge og andre nordiske land fra 2018 (før pandemien) til 2022 («etter» pandemien), med fokus på sosioøkonomisk status (SØS) og innvandrerbakgrunn som faktorer som påvirker skoleprestasjoner i matematikk. Regresjonsanalyser på elev- og skolenivå benyttes for å analysere sammenhengen mellom disse faktorene og prestasjoner i matematikk basert på data fra PISA 2018 og 2022. Med søkelys på skolenivå, viser resultatene at Norge skiller seg ut fra de andre landene ved at SØS forklarer nesten dobbelt så mye av forskjellene i matematikkprestasjoner mellom skoler i 2022 som i 2018. Også innvandrerbakgrunn forklarer en større andel av forskjellen mellom skoler i 2022 enn i 2018 i Norge og i Finland. I Danmark og Sverige har innvandrerbakgrunn sterkest sammenheng med skoleprestasjoner i begge sykluser av PISA, mens Island har den svakeste sammenhengen. I PISA 2022 er Sverige det nordiske landet som har sterkest sammenheng mellom SØS og skoleprestasjoner. Funnene peker på en nedgang i likeverd i Norge og økte ulikheter mellom skolene. Resultatene blir tolket og diskutert i lys av tidligere forskning, og implikasjoner blir beskrevet.

Nøkkelord: likeverd, ulikheter mellom skoler, sosioøkonomisk status, innvandrerbakgrunn, forklart varians

Abstract: This chapter explores changes in educational equity in Norway and other Nordic countries from 2018 (pre-pandemic) to 2022 (“post”-pandemic), focusing on socioeconomic status (SES) and immigrant background as factors influencing mathematics achievement. Regression analyses at student and school levels are used to analyze the relationship between these factors and mathematics performance based on data from PISA 2018 and 2022.

With a focus on the school level, the results show that Norway stands out from the other countries in that SES explains almost twice as much of the variation in mathematics achievement between schools in 2022 compared to 2018. Immigrant background also explains a larger share of the difference between schools in 2022 than in 2018 in Norway and Finland. In Denmark and Sweden, immigrant background has the strongest relationship with school performance in both PISA cycles, while Iceland has the weakest. In PISA 2022, Sweden is the Nordic country with the strongest relationship between SES and school performance. The findings indicate a decline in equity in Norway and increased differences between schools. The results are interpreted and discussed in light of previous research, and implications are described.

Keywords: educational equity, differences between schools, socioeconomic status, immigrant status, explained variance

I Norge skal alle elever ha like muligheter til å lykkes på skolen, uavhengig av sosioøkonomisk status (SØS), etnisitet, geografisk bosted, kjønn og andre demografiske faktorer. Men etterdønninger av pandemien, dyrtid, kriger og energikrise gjør at vi lever i en mer usikker verden hvor det er duket for økte sosiale og demografiske ulikheter. Elever med lav SØS og med innvandrerbakgrunn, er spesielt utsatte, ifølge rapporten *En barn-dom for livet* (Rege et al., 2023). For å redusere ulikheter er det behov for kunnskap om likeverd i skolen. Det er viktig å vite om likeverd har endret seg i Norge og i et nordisk perspektiv. Videre er det viktig å sammenlikne likeverd før og etter pandemien for å kunne se dette i sammenheng med tidligere trender.

Hovedtrenden fra PISA 2018 til 2022 viste en tilbakegang i prestasjoner for alle de nordiske landene. Norge hadde størst tilbakegang i matematikk, og tilbakegangen var større enn i de andre nordiske landene (bortsett fra Island). OECD-gjennomsnittet gikk også ned, så mye kan tyde på at pandemien spilte en stor rolle for nedgangen i de fleste land. Videre har forskjellen i prestasjoner til elever med høy og lav SØS økt siden 2012 (Jensen et al., 2023). Flere studier har vist at ulikheter mellom elever økte som følge av nedstengningen av skolene (se for eksempel Kennedy & Strietholt, 2023). I Norge har det derimot vært få studier som har sammenliknet likeverd før og etter pandemien med representative utvalg. For å få et bilde av likeverd i utdanningen er det altså viktig å undersøke trender over tid, men også sammenlikninger med andre land vil bidra til et helhetlig bilde av likeverd i Norge. Det er mest fruktbart å sammenlikne Norge med andre nordiske land, siden de har liknende utdanningssystem, kultur og språk.

Det finnes studier som har sammenliknet likeverd før og etter pandemien i Norge og de andre nordiske landene (Jensen et al., 2023). Disse studiene forklarer ofte forskjellene mellom elever, altså på individnivå (Jensen et al., 2023). Det er imidlertid vanskelig for politikere og skoleeiere å gjennomføre tiltak på elevnivå for å endre ulikheter mellom enkeltelever. Det er mer effektivt å sette inn tiltak på systemnivå, og derfor er det viktig også å undersøke ulikheter mellom skoler. Totalt vil både elevenes bakgrunn og skolens bidrag ha betydning for elevers prestasjoner (Van Ewijk & Slegers, 2010). Men dersom betydningen av elevenes bakgrunn holdes konstant,¹

1 Å holde elevenes bakgrunn konstant, betyr at man kontrollerer for påvirkningen av elevers SØS på deres prestasjoner. Konseptuelt betyr dette at man legger inn en betingelse om at påvirkning av SØS på elevers prestasjoner er lik for alle elever.

kan man undersøke skolens unike bidrag til likeverd. Ideelt sett burde det ikke være forskjeller mellom skoler når det gjelder likeverd. Slike forskjeller gjør at ikke alle elever har like muligheter for å lykkes.

Formålet med dette kapittelet er derfor å undersøke hvordan ulikheter mellom skoler har endret seg i Norge og resten av Norden fra 2018 (før pandemien) til 2022 (etter pandemien). Mer spesifikt skal vi analysere i hvilken grad SØS og innvandrerbakgrunn påvirker prestasjoner i matematikk. Analysene blir gjort på både elev- og skolenivå, men vi fokuserer på skolenivå i dette kapittelet. Dette gir en viktig indikasjon på endring i likeverd, men kan ikke slå fast hvorvidt det er pandemien og/eller andre faktorer som er årsaken til endringene. I tillegg er det mange andre aspekter ved likeverd som ikke blir belyst. For eksempel er påvirkningen av SØS på prestasjoner forskjellig i forskjellige fag (OECD, 2023a), og dette kapittelet inkluderer kun matematikk. Videre er det langt flere faktorer som kan ha sammenheng med likeverd enn SØS og innvandrerbakgrunn, som for eksempel geografisk bosted eller helse.

I dette kapittelet presenteres først en teoretisk bakgrunn hvor vi først kort beskriver hva vi mener med likeverd og hvordan dette kan måles, og deretter presenterer tidligere forskning på hvordan SØS og innvandrerbakgrunn påvirker prestasjoner. Deretter presenteres forskningsspørsmål. Metod delen beskriver utvalget, variabler som blir brukt og analysene. Her forklares også begreper som blir brukt i resultatdelen, som for eksempel varians. I resultatdelen beskrives resultatene kort, mens de blir tolket og satt inn i en kontekst i diskusjonsdelen. Her diskuteres også resultatene i lys av tidligere forskning og svakheter ved studien. Avslutningsvis gir vi en kort konklusjon, inkludert implikasjoner av studien.

Teori og bakgrunn

Hva er likeverd, og hvordan kan det måles?

Likeverd i skolen handler om at alle elever skal ha like muligheter til å lære uavhengig av faktorer som hjemmebakgrunn, foreldrenes utdannelse og økonomi, elevers kjønn, mentale helse og geografisk bosted (Rege et al., 2023; Strietholt & Strello, 2022). Et likeverdige skolesystem vil legge til rette for at elever med ulik bakgrunn har de samme mulighetene til å lykkes på skolen. Det finnes ulike perspektiver, ideologier og måter å måle likeverd på som kan gi forskjellige bilder av graden av likeverd i et land (Mittal et al., 2020).

De tre mest vanlige perspektivene på likeverd henger sammen med forskjellige ideologier (Strietholt & Strello, 2022):

1. Egalitær ideologi: Forskjellen mellom elevers læringsutbytte skal være så liten som mulig. Et vanlig mål på dette er forskjeller eller spredning (varians) mellom prestasjonene til elever og skoler.
2. Ideologien om at alle har rett til basisferdigheter. Et vanlig mål på dette er grunnleggende ferdigheter. I PISA måles dette ved mestringsnivåer (se Jensen & Nilsen (2024), kapittel 8 i denne boka).
3. Ideologien om at forskjeller i elevers læringsutbytte godtas, så lenge det ikke skyldes forskjeller i hjemmebakgrunn eller andre faktorer. Et vanlig mål på dette er for eksempel betydningen av SØS (eller kjønn, geografisk bosted og så videre) for prestasjoner.

Når det gjelder den tredje av disse, kan analyser gjøres på elev- og/eller skolenivå. Vi bruker eksempelet med SØS for å illustrere. Dersom påvirkningen av SØS på prestasjoner undersøkes på elevnivå, sier dette noe om hvor stor betydning SØS har for *hver enkelt elev*. Man kan også undersøke gjennomsnittet av elevers prestasjoner og SØS for hver skole. På skolenivå sier resultatene noe om hvor stor betydning skolenes gjennomsnittlige SØS har for skolenes gjennomsnittlige prestasjoner. På skolenivå undersøker man altså i hvor stor grad skolenes SØS kan forklare hvorfor noen skoler presterer bedre enn andre skoler.

Skolenivå kan være spesielt interessant å undersøke fordi det kan si noe om hvor store forskjeller det er mellom skoler på grunn av for eksempel SØS og prestasjoner. For eksempel har forskjellene mellom skoler i Sverige økt etter at de innførte fritt skolevalg hvor foreldrene kan velge hvilken skole barna skal gå på (Hansen & Gustafsson, 2016). Det er uheldig fra et likeverdsperspektiv, fordi det påvirker elevenes prestasjoner (Van Ewijk & Slegers, 2010), og elevene har ikke lenger like muligheter for å lykkes.

Skolene har muligheter til å påvirke likeverd. For eksempel har tidligere forskning vist at læreres kompetanse og et godt læringsmiljø kan redusere betydningen av SØS for elevenes prestasjoner (Gustafsson et al., 2018; Liu et al., 2015; Nilsen et al., 2020). Skolene kan dermed redusere ulikheter mellom elever. Men skolene kan også bidra til å øke ulikheter mellom elever, for eksempel ved at de mest kvalifiserte og kompetente lærerne underviser på skoler med høy SØS (Bonesrønning et al., 2005; Glassow et al., 2023;

Rjosk et al., 2014). Selv om det er mulig å legge til rette for at hver enkelt elev har like muligheter til å lykkes, er det lettere for skoler og politikere å redusere forskjeller mellom skoler, altså på systemnivå. (Slike tiltak vil selvsagt også da ha betydning for enkeltelever.) Dette er også grunnen til at vi i dette kapitlet setter søkelys på likeverd på skolenivå.

Tidligere forskning på sammenhengen mellom SØS, innvandrerbakgrunn og prestasjoner

Flere studier peker på en nedadgående trend for likeverd i Norge (Nilsen et al., 2018; OECD, 2023a; Sandsør et al., 2023). Matematikk var sist et hovedområde i PISA 2012, og her fant OECD (2013) at SØS forklarte 47 prosent av forskjellen i matematikkprestasjoner mellom skoler på 10. trinn. Tre år senere ble den internasjonale storskalaundersøkelsen TIMSS 2015 gjennomført, og Mittal et al. (2020) fant at SØS forklarte 66 prosent av forskjellen i matematikkprestasjoner mellom skoler på 8. trinn.

Den norske rapporten fra PISA 2022 viste at forskjellene i prestasjoner grunnet SØS har økt siden 2012 på *elevnivå* (Jensen et al., 2023). Foreløpig har ikke data fra PISA 2022 blitt brukt til å undersøke endringer over tid på *skolenivå* i Norge.

Når det gjelder innvandrerbakgrunn, har antall elever som deltok i PISA 2022, og som oppgir at begge foreldrene er født i et annet land, økt siden PISA 2012 (Jensen et al., 2023). Dette stemmer overens med Statistisk sentralbyrå, som rapporterer at 19 prosent av barna i grunnskolealder hadde innvandrerbakgrunn (eleven er selv innvandrere eller født i Norge av to innvandrerforeldre) i 2022, og at dette har økt med 8 prosent siden 2011 (Utdanningsdirektoratet, 2022). Vi vet at en høy andel av elevene med innvandrerbakgrunn har lav SØS (Rege et al., 2023) og presterer lavere enn majoritetselever (Jensen et al., 2023). Det er viktig å hjelpe denne gruppen, da de er ekstra sårbare. Dersom de skal ha like muligheter innen utdanning som majoritetselever, bør de ha samme tilgang til gode skoler som majoritetselever. Det bør med andre ord ikke være store prestasjonsforskjeller mellom skoler med høy eller lav andel elever med innvandrerbakgrunn, fordi dette påvirker enkeltelevers prestasjoner (Van Ewijk & Slegers, 2010). Elever som presterer bra, påvirker sine klassekameraters prestasjoner positivt, og motsatt (dette kalles *peer effect*) (Sacerdote, 2011; Van Ewijk & Slegers, 2010).

Forskningsspørsmål

For å undersøke i hvilken grad norsk skole gir elever med ulik bakgrunn like muligheter til å lære matematikk, og hvordan dette har endret seg fra 2018 til 2022, stiller vi følgende forskningsspørsmål: Hva karakteriserer likeverd i Norge i forhold til andre nordiske land, og hvordan har dette endret seg fra 2018 (før pandemien) til 2022 («etter» pandemien) når det gjelder

- andel varians forklart av SØS på skolenivå?
- påvirkningen av SØS på matematikkprestasjoner på skolenivå?
- andel varians forklart av innvandrerbakgrunn på skolenivå?
- påvirkningen av innvandrerbakgrunn på prestasjoner på skolenivå?

Metode

Til analysene i dette kapittelet bruker vi datafilene fra de nordiske landene i PISA 2022 og PISA 2018. Mens matematikk var hovedområde i PISA 2022, var det lesing som var hovedområde i PISA 2018. Dette innebærer at det var med flere oppgaver i matematikkprøven i 2022 enn det var i 2018. Elevenes kompetanse måles bredere, og prøveresultatet kan estimeres noe mer nøyaktig for det fagområdet som er hovedområde. Måleusikkerheten gjenspeiles imidlertid i standardfeilen, og forskjellen mellom at matematikk var hovedområde i 2022 og ikke var det i 2018, har ikke noen praktisk betydning for tolkningen av resultatene i dette kapittelet. Tabell 1 viser antall elever (som har fått estimert et resultat i matematikk) i datafilene for de nordiske landene. I introduksjonskapittelet er det mer detaljert informasjon om gjennomføringen av PISA 2022 i Norge.

Tabell 1. Antall elever som har fått estimert et resultat i matematikk i de nordiske landene

	PISA 2018	PISA 2022
Danmark	7 657	6 200
Finland	5 649	10 239
Island	3 296	3 360
Norge	5 813	6 611
Sverige	5 504	6 072

Variabler

Det er tre ulike delindekser som til sammen utgjør samlevARIABLEN for sosioøkonomisk status (SØS): foreldres utdanningsnivå, foreldres yrke og eiendeler i hjemmet. Alle spørsmålene som går inn i denne samlevARIABLEN, er basert på elevenes besvarelser på spørreskjemaet som de tar rett etter PISA-prøven. SamlevARIABLEN ble standardisert til et gjennomsnitt på 0 og standardavvik på 1 for OECD-landene i PISA 2022. Det finnes mer detaljert informasjon om målet for sosioøkonomisk status i den tekniske rapporten fra undersøkelsen (OECD, 2023b).

Vi har brukt definisjonene fra Statistisk sentralbyrå (2019) for å beskrive variabelen for innvandrerbakgrunn. Denne variabelen deler elevene inn i tre grupper basert på elevenes svar på et spørsmål om hvilket land de selv og foreldrene er født i. «Innvandrere» er elever som har svart at de selv og foreldrene er født i et annet land enn Norge (kodet til 2). «Norskfødte elever med innvandrerforeldre» er elever som har svart at de selv er født i Norge, men begge foreldrene er født i et annet land (kodet til 1). «Elever med innvandrerbakgrunn» er en samlebetegnelse for disse to gruppene. Alle de andre elevene går inn i gruppen vi kaller «Øvrige elever», det vil si elever som har minst én forelder som er født i Norge (disse er kodet 0).

Analysemetode

Regresjonsanalyse

For å svare på forskningsspørsmålene gjør vi regresjonsanalyser ved å benytte programmet Mplus (Muthén & Muthén, 1998–2017). I regresjonsanalyser undersøkes sammenhengen mellom to variabler, for eksempel mellom SØS og prestasjoner. Regresjonsanalyser går ut fra at det er en retning på sammenhengen, for eksempel at SØS påvirker prestasjoner og ikke motsatt. Vi indikerer dette ved å bruke ordet *påvirkning* av SØS på prestasjoner, istedenfor *sammenhengen* mellom SØS og prestasjoner. Det betyr ikke at det nødvendigvis er en kausal sammenheng. Når man gjør regresjonsanalyser, får man en regresjonskoeffisient, og den sier noe om styrken på sammenhengen mellom de to variablene. Dersom regresjonskoeffisienten er 33, betyr det at en økning på 1 i SØS tilsvarer en økning på 33 i prestasjoner. Internasjonalt ble standardavviket i PISA satt til 100, og gjennomsnittet av prestasjoner til 500 den første gangen et fagområde er hovedområde. Det betyr at 68 prosent av elevene presterer mellom 400 og 600 poeng. For å illustrere hvor mye 33 poeng er, så er det omtrent

like stort som nedgangen i matematikkprestasjoner for Norge fra 2018 til 2022, og dette er den største nedgangen for Norge siden PISA startet i 2000. Det tilsvarer også omtrent forskjellen i prestasjoner på TIMSS fra 8. til 9. trinn i Norge, altså omtrent ett års skolegang (Olsen & Bjørnsson, 2018). Internasjonalt har OECD beregnet at 20 poeng tilsvarer omtrent ett skoleår for 15-åringer (Avvisati & Givord, 2021). I våre analyser undersøker vi påvirkningen av SØS og innvandrerbakgrunn på prestasjoner.

Analysene gjøres på elev- og skolenivå

I dette kapitlet gjøres regresjonsanalysene både på elev- og skolenivå samtidig. Analyser på elevnivå innebærer å undersøke om forskjeller mellom elevers prestasjoner innen hver skole kan forklares av SØS. Her er altså fokuset på betydningen av SØS for hver enkeltelev. Analyser på skolenivå innebærer å undersøke om forskjeller mellom skolers prestasjoner kan forklares av SØS. Her rettes søkelyset på forskjeller mellom skoler (ikke enkeltelever). I dette kapitlet er skolenivå hovedanliggendet. Når vi likevel gjør analysene på elev- og skolenivå samtidig, betyr det at resultatene på skolenivå blir kontrollert for elevnivå. Å kontrollere for noe betyr å holde det konstant. Grovt forenklet kan vi si at vi undersøker hvor stor betydning SØS har for forskjeller i prestasjoner mellom skoler, forutsatt at SØS har like mye å si for prestasjonene til hver enkelt elev.

Flergruppeanalyse

I våre analyser benyttes såkalte flergruppeanalyser, som betyr at resultatene blir beregnet for flere grupper samtidig. I dette tilfellet er gruppene land. Slik flergruppeanalyse gjør det mulig å sammenlikne resultater på tvers av de nordiske landene (Hox & Roberts, 2011).

Varians

Varians er en type spredningsmål som forteller noe om hvor stor spredning eller variasjon det er i et datamateriale. Varians er den gjennomsnittlige kvadratavstanden fra gjennomsnittet.

Vi beregner både regresjonskoeffisient og forklart varians

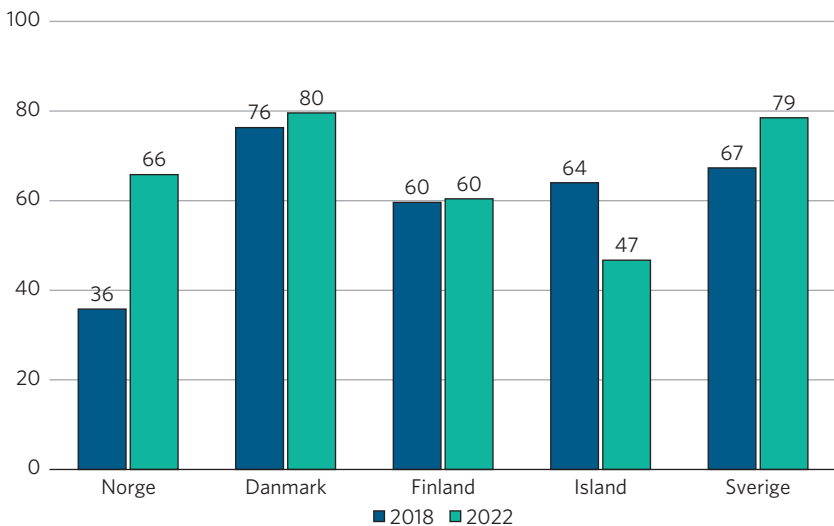
Ved hjelp av Mplus beregner vi både regresjonskoeffisienter og hvor mange prosent av variansen mellom prestasjoner som blir forklart av SØS.

Regresjonskoeffisienten måler styrken på sammenhengen mellom for eksempel SØS og prestasjoner. Den sier noe om hvor stor betydning SØS har for prestasjoner. Ved en lineær sammenheng mellom SØS og prestasjoner er regresjonskoeffisienten stigningstallet til grafen, som er et mål på hvor bratt kurven er.

Prosentandel forklart varians sier noe om hvor mye av forskjellen mellom høyt- og lavtpresterende skoler (eller spredningen i prestasjoner) som skyldes SØS. Hvis denne andelen er stor, indikerer det at skoler med høy SØS har bedre prestasjoner enn skoler med lav SØS. Dette er igjen er en indikasjon på at ikke alle elever har like muligheter til å lykkes.

Resultater

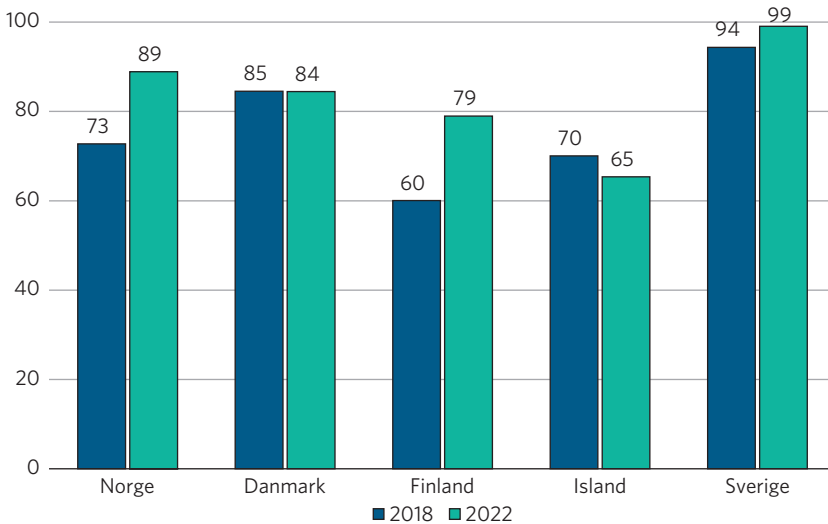
SØS og prestasjoner



Figur 1. Prosentandel varians av matematikkprestasjoner forklart av SØS på skolenivå

Figur 1 viser hvor mange prosent av variansen i prestasjoner mellom skoler som kan forklares av SØS i 2018 og i 2022 (se vedlegg 1 for mer detaljer, inkludert resultater på elevnivå). Jo høyere dette tallet er, jo større andel av variansen i prestasjoner skyldes SØS. Vi har som sagt kontrollert for dette på elevnivå. Figuren viser at SØS forklarer en større andel av variansen i prestasjoner mellom skoler i 2022 enn i 2018 i Norge og Sverige. Dette betyr altså at forskjeller mellom skolers prestasjoner i større grad skyldes SØS i

2022 enn i 2018. I Finland, Danmark og Island er ikke forskjellene mellom 2018 og 2022 signifikante. Norge skiller seg ut fra de andre landene ved at økningen i varians forklart av SØS er større enn for de andre nordiske landene. I 2018 forklarte SØS omtrent 36 prosent av forskjellene mellom skoler, mens i 2022 forklarte SØS nesten 66 prosent av forskjellene mellom skoler. Dette er nesten en dobling. Figuren viser også at Island skiller seg ut fra de andre nordiske landene i PISA 2022, ved at en mindre andel av variansen i prestasjoner mellom skolene skyldes SØS.



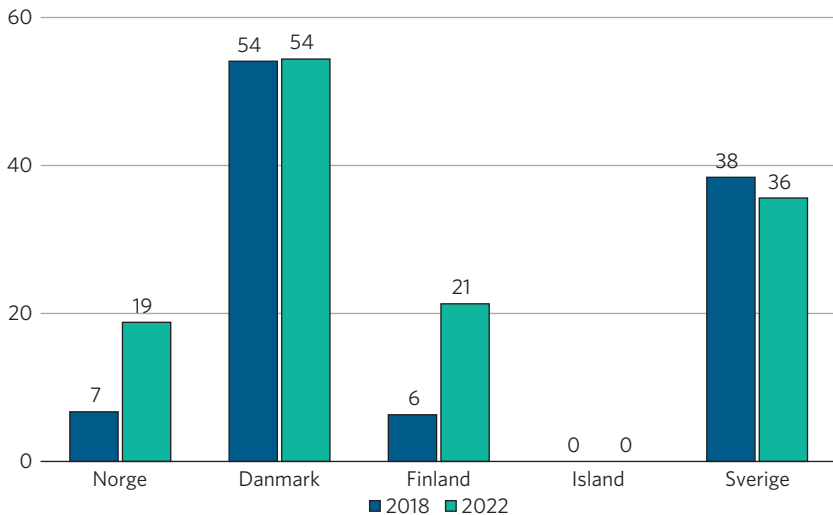
Figur 2. Påvirkningen av SØS på matematikkprestasjoner på skolenivå (regresjonskoeffisient)

Figur 2 viser resultatene av regresjonsanalysene for påvirkningen av SØS på prestasjoner på skolenivå etter å ha kontrollert for elevnivå. Regresjonskoeffisientene som vises i figuren, reflekterer styrken på sammenhengen. For eksempel er regresjonskoeffisienten (ustandardisert) i Norge i 2018 på 73. Det betyr at en økning på 1 i SØS-skalaen tilsvarer en økning på 73 poeng i prestasjoner. (Som nevnt i metod delen er SØS standardisert til et gjennomsnitt på 0 og standardavvik på 1.) Dette er en sterk sammenheng. Ellers er det en del likheter i mønsteret med figur 1 som viste forklart varians (blant annet fordi disse to er relaterte statistisk sett). Likevel, kun Finland har en signifikant forskjell mellom 2018 og 2022. Regresjonskoeffisienten økte fra omtrent 60 til 79. Dette indikerer at i 2022 hadde SØS en større betydning for finske skolers prestasjoner enn i 2018.

Sverige har den sterkeste påvirkningen av SØS på skoleprestasjoner i både 2018 og 2022.

Innvandrerbakgrunn og prestasjoner i matematikk

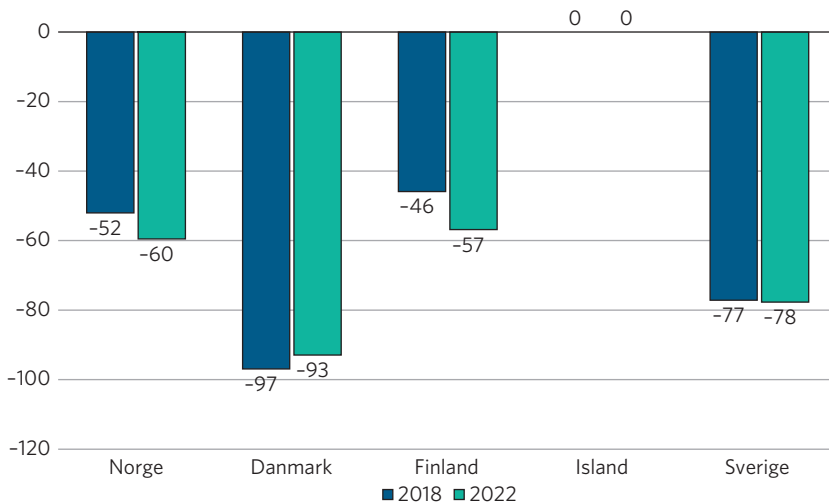
Figur 3 viser hvor mange prosent av variansen i prestasjoner mellom skoler som kan forklares av innvandrerbakgrunn i 2018 og i 2022, etter å ha kontrollert for SØS. Figuren viser at innvandrerbakgrunn forklarer en større andel av variansen i prestasjoner mellom skoler i 2022 enn i 2018 i Norge og Finland. I Norge økte den fra omtrent 7 prosent til 19 prosent, og i Finland fra 6 prosent til 21 prosent. Forskjellene fra 2018 til 2022 er med andre ord store for Norge og Finland. For de andre landene var ikke forskjellene mellom 2018 og 2022 signifikante. Ellers viser resultatene at spesielt Danmark, og dernest Sverige, skiller seg fra de andre nordiske landene ved at forskjellene mellom skolenes prestasjoner i langt større grad kan forklares ved innvandrerbakgrunn. Resultatene var ikke signifikante for Island, som betyr at variansen mellom skoler på Island ikke kan forklares av andel elever med innvandrerbakgrunn ved skolene.



Figur 3. Prosentandel varians i matematikkprestasjoner forklart av innvandrerbakgrunn på skolenivå etter å ha kontrollert for SØS

Figur 4 viser påvirkningen av innvandrerbakgrunn på prestasjoner på skolenivå etter å ha kontrollert for SØS. Regresjonskoeffisientene er negative fordi innvandrerbakgrunn har sammenheng med *lavere* prestasjoner.

Mønstrene fra figur 3 samsvarer med figur 4, men resultatene fra regresjonsanalysen viser at ingen av forskjellene mellom 2018 og 2022 er signifikante for noen av landene. Påvirkningen av innvandrerbakgrunn på prestasjoner i 2022 i Norge var omtrent -60 , som viser at en økning med 1 i variabelen for innvandrerbakgrunn tilsvarer 60 poeng lavere prestasjoner. Dette er en middels sterk sammenheng. I Island var ikke regresjonskoeffisientene for 2018 eller 2022 signifikante. Tilsvarende som for forklart varians er påvirkningen sterkest i Danmark, og dernest i Sverige, og den er sterkere for disse to landene enn for de andre nordiske landene i begge sykluser av PISA. Dette betyr at innvandrerbakgrunn har mer å si for skolenes prestasjoner i Danmark og Sverige enn i de andre nordiske landene.



Figur 4. Påvirkning av innvandrerbakgrunn på prestasjoner på skolenivå (regresjonskoeffisient) etter å ha kontrollert for SØS

Diskusjon

Det finnes flere måter å undersøke i hvilken grad skolen gir elever like muligheter til å lykkes. I dette kapitlet har vi undersøkt hvilken betydning elevenes bakgrunn har for deres matematikkprestasjoner. Vi starter med å tolke resultatene for Norge og se dem i sammenheng med tidligere studier, før vi ser resultatene i et nordisk perspektiv.

Likeverd i Norge. Når det gjelder Norge, fant vi at en større andel av varians i prestasjoner mellom skoler skyldes SØS i 2022 enn i 2018. Derimot var det ingen signifikant endring fra 2018 til 2022 når det gjelder påvirkningen

av SØS på skoleprestasjoner. Sett i sammenheng betyr disse to resultatene at *forskjellene* i prestasjoner mellom skolene i større grad skyldtes SØS i 2022 enn i 2018, men at betydningen av SØS for skolenes prestasjoner er den samme. Rent praktisk indikerer dette at de sosiale ulikhetene mellom skolene øker.

Hvis vi ser disse resultatene i sammenheng med resultatene for innvandringsbakgrunn i Norge, følger de samme mønster. *Forskjellene* i prestasjoner mellom skolene skyldtes i større grad innvandrerbakgrunn i 2022 enn i 2018, men betydningen av innvandrerbakgrunn for skolenes prestasjoner er den samme.

For Norge er dette sterke indikasjoner på at likeverd har hatt en negativ utvikling fra 2018 til 2022, altså fra før pandemien til etter pandemien. Det er større forskjeller mellom skoler i 2022, og disse kan i større grad forklares av SØS og innvandrerbakgrunn. Det at ulikheter har økt i løpet av pandemien, støttes av tidligere forskning (Kennedy & Strietholt, 2023; OECD, 2013; Sandsør et al., 2023) og er ikke overaskende. Vår studie bidrar til denne kunnskapen ved å vise at ulikhetene ikke bare berører elever, men at det har blitt økte forskjeller mellom skoler når det gjelder SØS, prestasjoner og innvandrerbakgrunn. I tillegg viser vår studie at den negative trenden med stadig økte ulikheter før pandemien (Sandsør et al., 2023) har blitt forsterket under pandemien. Det vår studie ikke viser, er hvordan disse ulikhetene er geografisk skjevt fordelt i Norge. Mer forskning kreves for å undersøke hvorvidt likeverd for eksempel har økt kraftigere i Oslo enn i resten av landet.

Likeverd i Norden. I våre forskningsspørsmål ønsket vi både å sammenlikne likeverd og endringer i likeverd i Norge med de andre nordiske landene. Når det gjelder betydningen av SØS for prestasjoner, er denne sterkest i Sverige, og dernest i Norge, men den har økt mest i Finland. Når det gjelder i hvor stor grad SØS kan forklare forskjeller i prestasjoner mellom skoler, er denne størst i Danmark og Sverige, men Norge har størst økning fra 2018 til 2022. Denne økningen har ført til at Norge nå nærmer seg de ulikhetene mellom skoler som vi ser i Danmark og Sverige. I den norske rapporten for PISA 2022 (Jensen et al., 2023) presenteres OECDs estimater. Disse viser hvor mange prosent av variansen i prestasjoner som kan forklares av SØS. Her skiller det ikke mellom varians mellom skoler og varians mellom elever, så tallene viser hvor stor andel av variansen mellom både elever og skoler som kan forklares av SØS. Her viser tallene at i Sverige kan en høyere andel av variansen forklares av SØS, etterfulgt av

Finland, Danmark, Norge og til slutt Island. Våre resultater fra skolenivå viser derimot at Danmark har minst likeverd, dernest følger Sverige, Norge, Finland og Island.

Danmark skiller seg ut som det landet hvor ulikheter mellom skoler i størst grad kan forklares av innvandrerbakgrunn. I Sverige har også innvandrerbakgrunn stor betydning for ulikheter mellom skoler. I Norge og Finland har innvandrerbakgrunn langt mindre betydning for prestasjoner, og på Island har det ingen signifikant påvirkning på prestasjoner. Det er likevel foruroligende at betydningen av innvandrerbakgrunn i Norge og Finland har hatt så stor økning fra 2018 til 2022. Elever med innvandrerbakgrunn har lavere SØS og dårligere språkkunnskaper (Rege et al., 2023), og skolestengning kan muligens ha rammet disse hardere. Hvorvidt skolestengning kan ha ført til større ulikheter mellom skoler i Finland og Norge (men ikke Sverige og Danmark), har vi ikke data til å undersøke. Her er det behov for mer forskning med andre data.

Konklusjon

Det er tydelig at både SØS og innvandrerbakgrunn spiller en betydelig rolle i variansen mellom skoler i Norge. Økningen i betydningen av SØS og innvandrerbakgrunn fra 2018 til 2022 peker mot økte ulikheter mellom skoler, noe som indikerer en negativ utvikling av likeverd i løpet av denne perioden.

Sammenlikningen med andre nordiske land viser at Norge har blitt likere Danmark og Sverige når det gjelder ulikhetene mellom skoler. Dette understreker behovet for å adressere og motvirke de strukturelle utfordringene som bidrar til denne utviklingen. Økningen i betydningen av innvandrerbakgrunn i Norge og Finland er spesielt bekymringsfull, og det antyder behovet for målrettede tiltak for å sikre like muligheter og rettferdighet i utdanningen for alle elever, uavhengig av bakgrunn.

Det er viktig å understreke at vi ikke vet om disse funnene utelukkende kan tilskrives pandemien, men mye tyder på at den kan ha spilt en stor rolle. Videre forskning vil være nødvendig for å forstå de underliggende årsakene til de observerte endringene i ulikhetene mellom skoler og for å utvikle effektive strategier for å fremme likeverd og inkludering i utdanningssystemet. I dette kapittelet har vi sett flere resultater som peker på større ulikheter mellom skoler og elever under pandemien. Det er derfor behov for tiltak som bidrar til å utjevne ulikhetene.

Forfatterbiografier

Trude Nilsen er seniorforsker ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo. Hun er leder for Strand 1 ved senter for fremdragende forskning CREATE – Senter for forskning på likhet i utdanning, og for prosjektet TESO, støttet av Norges forskningsråd. Nilsen jobber med data fra de internasjonale undersøkelsene, og hennes forskningsinteresser inkluderer ulikheter i utdanningen, læreres kompetanse og undervisningskvalitet samt kausale metoder. Nilsen var redaktør av håndboken *International Handbook of Comparative Large-Scale Studies in Education* (utgitt på Springer i 2022), og har også utgitt et betydelig antall artikler i internasjonale tidsskrift i tillegg til bøker og rapporter.

Fredrik Jensen har en forskerstilling ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo. Han har jobbet med PISA-undersøkelsen siden 2013, og vært prosjektleder fra PISA 2018. Hans forskningsinteresser inkluderer elevers kompetanse i og holdninger til naturfag og matematikk. Jensen var medredaktør for boka *Like muligheter til god leseforståelse? 20 år med lesing i PISA* (utgitt på Universitetsforlaget i 2020).

Referanser

- Avvisati, F. & Givord, P. (2021). The learning gain over one school year among 15-year-olds: An analysis of PISA data for Austria and Scotland (United Kingdom). *Labour Economics*, (84). <https://doi.org/10.1016/j.labeco.2023.102365>
- Bonesrønning, H., Falch, T. & Strøm, B. (2005). Teacher sorting, teacher quality, and student composition. *European Economic Review*, 49(2), 457–483. [https://doi.org/10.1016/S0014-2921\(03\)00052-7](https://doi.org/10.1016/S0014-2921(03)00052-7)
- Glassow, L. N., Hansen, K. Y. & Gustafsson, J.-E. (2023). Does socioeconomic sorting of teacher qualifications exacerbate mathematics achievement inequity? Panel data estimates from 20 years of TIMSS. *Studies in Educational Evaluation*, 77, Artikkel 101255. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2023.101255>
- Gustafsson, J. E., Nilsen, T. & Hansen, K. Y. (2018). School characteristics moderating the relation between student socio-economic status and mathematics achievement in grade 8. Evidence from 50 countries in TIMSS 2011. *Studies in Educational Evaluation*, 57, 16–30. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2016.09.004>
- Hansen, K. Y. & Gustafsson, J.-E. (2016). Causes of educational segregation in Sweden – school choice or residential segregation. *Educational Research and Evaluation*, 22(1–2), 23–44. <https://doi.org/10.1080/13803611.2016.1178589>
- Hox, J. & Roberts, J. K. (2011). *Handbook of advanced multilevel analysis*. Psychology Press.
- Jensen, F., Pettersen, A., Frønes, T. S., Eriksen, A., Løvgren, M. & Narvhus, E. K. (2023). *PISA 2022. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing*. Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/noasp.205>
- Jensen, F. & Nilsen, T. (2024). Lavtpresterende elever i matematikk. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 187–211). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch8>

- Kennedy, A. I. & Strietholt, R. (2023). School closure policies and student reading achievement: Evidence across countries. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 35(4), 475–501. <https://doi.org/10.1007/s11092-023-09415-4>
- Liu, H., Van Damme, J., Gielen, S. & Van Den Noortgate, W. (2015). School processes mediate school compositional effects: model specification and estimation. *British Educational Research Journal*, 41(3), 423–447. <https://doi.org/10.1002/berj.3147>
- Mittal, O., Nilsen, T. & Björnsson, J. K. (2020). Measuring equity across the Nordic education systems – conceptual and methodological choices as implications for educational policies. I T. S. Frønes, A. Pettersen, J. Radišić & N. Buchholtz (Red.), *Equity, equality and diversity in the Nordic model of education* (s. 43–71). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61648-9_3
- Muthén, L. K. & Muthén, B. O. (1998-2017). *Mplus user's guide* (8. utg.). Muthén & Muthén.
- Nilsen, T., Björnsson, J. K. & Olsen, R. V. (2018). 7. Hvordan har likeverd i norsk skole endret seg de siste 20 årene? I J. K. Björnsson & R. V. Olsen (Red.), *Tjue år med TIMSS og PISA i Norge* (s. 150–172). Universitetsforlaget. <https://doi.org/10.18261/9788215030067-2018-08>
- Nilsen, T., Scherer, R., Gustafsson, J.-E., Teig, N. & Kaarstein, H. (2020). Teachers' role in enhancing equity: A multilevel structural equation modeling with mediated moderation. I T. S. Frønes, A. Pettersen, J. Radišić & N. Buchholtz (Red.), *Equity, equality and diversity in the Nordic model of education* (s. 173–196). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61648-9_7
- OECD. (2013). *PISA 2012 results: Volume II. Excellence through equity: Giving every student the chance to succeed*. Organisation for Economic Co-operation and Development.
- OECD. (2023a). *PISA 2022 results: Volume I. The state of learning and equity in education*. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- OECD. (2023b). Scaling procedures and construct validation of context questionnaire data. I *PISA 2022 technical report* (s. 390–452). Organisation for Economic Co-operation and Development.
- Olsen, R. V. & Björnsson, J. K. (2018). Fødselsmåned og skoleprestasjoner. I J. K. Björnsson & R. V. Olsen (Red.), *Tjue år med TIMSS og PISA i Norge: Trender og nye analyser* (s. 76–93). Universitetsforlaget. <https://doi.org/10.18261/9788215030067-2018-05>
- Rege, M., Bøe, T., Drange, N. E., Fløtten, T., Glemmestad, H. S., Hugvik, K., Salvanes, K. G. & Zachrisson, H. D. (2023). *En barndom for livet: Økt tilhørighet, mestring og læring for barn i fattige familier*. Barne- og familiedepartementet. <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/en-ny-barndom-for-livet/id3000835/>
- Rjosok, C., Richter, D., Hochweber, J., Lüdtke, O., Klieme, E. & Stanat, P. (2014). Socioeconomic and language minority classroom composition and individual reading achievement: The mediating role of instructional quality. *Learning and Instruction*, 32, 63–72. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.01.007>
- Sacerdote, B. (2011). Peer effects in education: How might they work, how big are they and how much do we know thus far? I E. A. Hanushek, S. Machin & L. Woessmann (Red.), *Handbook of the economics of education* (s. 249–277). Elsevier.
- Sandsør, A. M. J., Zachrisson, H. D., Karoly, L. A. & Dearing, E. (2023). The widening achievement gap between rich and poor in a Nordic country. *Educational Researcher*, 52(4), 195–205. <https://doi.org/10.3102/0013189X221142596>
- Statistisk sentralbyrå. (2019). *Slik definerer SSB innvandrere*. <https://www.ssb.no/befolkning/innvandrere/artikler/slik-definerer-ssb-innvandrere>
- Strietholt, R. & Strello, A. (2022). Socioeconomic inequality in achievement: Conceptual foundations and empirical measurement. I T. Nilsen, A. Stancel-Piątak & J. E. Gustafsson (Red.), *International handbook of comparative large-scale studies in education: Perspectives, methods and findings* (s. 201–220). Springer.
- Utdanningsdirektoratet. (2022). *Utdanningsspeilet 2022*. <https://www.udir.no/tall-og-forskning/publikasjoner/utdanningsspeilet/utdanningspeilet-2022>
- Van Ewijk, R. & Sleegers, P. (2010). The effect of peer socioeconomic status on student achievement: A meta-analysis. *Educational Research Review*, 5(2), 134–150. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2010.02.001>

Vedlegg 1

Påvirkningen av SØS og innvandrerbakgrunn på prestasjoner i 2022 og forklart varians.

2022	Norge	Danmark	Finland	Island	Sverige
Påvirkning av SØS på prestasjoner, elevnivå	29,0 (0,3)	29,5 (0,3)	36,9 (0,3)	31,4 (0,3)	33,3 (0,3)
Påvirkning av SØS på prestasjoner, skolenivå	88,9 (0,8)	84,5 (0,9)	79,0 (0,7)	65,4 (0,6)	99,1 (0,9)
R ² , prosent forklart varians, elevnivå	6,7 %	8,4 %	11,7 %	7,6 %	9,0 %
R ² , prosent forklart varians, skolenivå	65,8 %	79,6 %	60,4 %	46,7 %	78,5 %
Påvirkning av innvandrerbakgrunn på prestasjoner, elevnivå	-17,3 (-0,1)	-27,5 (-0,2)	-39,3 (-0,3)	-21,9 (-0,1)	-32,4 (-0,2)
Påvirkning av innvandrerbakgrunn på prestasjoner, skolenivå	-60,7 (-0,4)	-93,9 (-0,7)	-56,4 (-0,4)	-21,6 (-0,1)	-78,7 (-0,6)
R ² , prosent forklart varians, elevnivå	1,1 %	3,8 %	7,3 %	1,1 %	5,1 %
R ² , prosent forklart varians, skolenivå	17,1 %	48,0 %	19,2 %	0,8 %	32,7 %

Merk: Alle resultater er signifikante ($p < 0,05$). Standardiserte regresjonskoeffisienter er i parentes. Analysene av innvandrerbakgrunn i dette vedlegget er ikke kontrollert for SØS.

Vedlegg 2

Påvirkningen av SØS og minoritet på prestasjoner i 2018 og forklart varians.

2018	Norge	Danmark	Finland	Island	Sverige
Påvirkning av SØS på prestasjoner, elevnivå	30,0 (0,3)	26,0 (0,3)	32,5 (0,3)	27,4 (0,2)	26,8 (0,3)
Påvirkning av SØS på prestasjoner, skolenivå	72,8 (0,6)	84,5 (0,9)	60,1 (0,8)	70,0 (0,8)	94,4 (0,8)
R ² , prosent forklart varians	7,4 % 35,8 %	6,5 % 76,3 %	9,1 % 59,6 %	5,9 % 64,0 %	7,2 % 67,3 %
Påvirkning av innvandrerbakgrunn på prestasjoner, elevnivå	-23,7 (-0,1)	-33,4 (-0,2)	-39,4 (-0,2)	-33,7 (-0,1)	-35,3 (-0,2)
Påvirkning av innvandrerbakgrunn på prestasjoner, skolenivå	-46,3 (-0,2)	-99,5 (-0,7)	-37,2 (-0,2)	-34,3 (-0,1)	-78,7 (-0,6)
R ² , prosent forklart varians, elev	1,9 %	3,7 %	3,3 %	2,1 %	5,7 %
R ² , prosent forklart varians, skole	4,7 %	52,7 %	IS	IS	37,1 %

Merk: Alle resultater er signifikante ($p < 0,05$), unntatt de som er merket IS (ikke signifikant). Standardiserte regresjonskoeffisienter er i parentes. Analysene av innvandrerbakgrunn i dette vedlegget er ikke kontrollert for SØS.

KAPITTEL 8

Lavtpresterende elever i matematikk

Fredrik Jensen Universitetet i Oslo

Trude Nilsen Universitetet i Oslo

Sammendrag: Andelen lavtpresterende elever i PISA-undersøkelsen økte betydelig fra 2018 til 2022. I dette kapittelet ser vi nærmere på hva som kjennetegner de lavtpresterende elevene. Dette gjør vi ved å sammenlikne resultater for lavtpresterende elever, det vil si de som presterer under nivå 2 i matematikk, med resultater for elever som presterer på nivå 2 og over. I gruppen med lavtpresterende elever er det en litt større andel gutter enn jenter, og det er en større andel elever med innvandrerbakgrunn. Gruppen har også lavere gjennomsnittlig sosioøkonomisk status. Lavtpresterende elever rapporterer om lavere utholdenhet og mestringsforventning, og om mer matematikkangst. Det er små forskjeller i resultatene knyttet til læringsmiljø. De lavtpresterende elevene svarer at de opplever et litt dårligere læringsmiljø enn elever som presterer på nivå 2 og over.

Nøkkelord: likeverd, lavtpresterende elever, læringsmiljø, demografiske faktorer

Abstract: The share of low performing students in PISA increased significantly from 2018 to 2022. In this chapter, we take a closer look at what characterises the low performing students. We do this by comparing results for students that perform below level 2 in mathematics with results for students that perform at level 2 or above. Compared to the students who perform at level 2 or above, there is a slightly larger proportion of boys than girls among the students performing below level 2. The low performers also have a lower average socioeconomic status and a larger share of students with immigrant backgrounds. Low performing students report lower average persistence and self-efficacy levels, and a higher level of math anxiety. There are small differences between these two student groups on the school climate results. The low performing students report that they have a slightly worse experience of the school climate compared to students who perform at level 2 or above.

Keywords: equity, low performing students, school climate, demographic variables

Et av hovedresultatene fra PISA 2022 var at andelen lavtpresterende elever i matematikk økte betydelig fra forrige gjennomføring av PISA i 2018. Dette resultatet er ikke unikt for norske elever. Andelen lavtpresterende elever økte også i mange andre land (OECD, 2023a). Lavtpresterende viser i denne sammenheng til elever som presterte under nivå 2 på PISA-prøven. Prestasjonsskalaen er delt inn i seks mestringsnivåer, der nivå 2 blir beskrevet som en nedre grense for den kompetansen elevene bør ha for å være godt nok forberedt til videre utdanning og arbeidsliv (Jensen et al., 2023; OECD, 2023a). I PISA 2018 presterte 19 prosent av de norske elevene under nivå 2 i matematikk, mens denne andelen har økt til 31 prosent i 2022.

Vi beskriver de lavtpresterende elevene nærmere i dette kapittelet ved å se på bakgrunnsfaktorer (kjønn, sosioøkonomisk status og innvandrerbakgrunn), elevenes holdninger og hvordan de oppfatter læringsmiljøet ved sin skole.

I Norge er det et mål at «barn og unge skal ha lik rett til utdanning, uavhengig av bosted, kjønn, sosial og kulturell bakgrunn og eventuelle spesielle behov.» (NOU 2019: 12, 2019, s. 44). Hvor mange som har med seg god nok kompetanse fra grunnopplæringen, er én av flere indikatorer som sier noe om i hvilken grad elever har likeverdige muligheter videre i utdanning og arbeidsliv. Strietholt og Strello (2022) beskriver ulike perspektiver på likeverd. Et av disse perspektivene handler om at alle elever har rett til basisferdigheter. I PISA-undersøkelsen er andel elever som presterer på nivå 2 eller høyere en indikator på dette. Dette, sammen med andel elever som går på skole, går inn under begrepet «inkluderende utdanning» i den internasjonale rapporten fra PISA-undersøkelsen (OECD, 2023a, s. 109). I den forrige realfagsstrategien var et av målene at «andelen barn og unge på lavt nivå i matematikk skal reduseres» (Kunnskapsdepartementet, 2015, s. 25).

Basert på data fra PISA 2012 ble det laget en egen rapport om lavtpresterende elever (OECD, 2016). I 2012 var andelen lavtpresterende elever i matematikk i Norge 22 prosent. Det var lik andel lavtpresterende gutter og jenter. Men det var flere lavtpresterende elever i gruppen med innvandrerbakgrunn sammenliknet med øvrige elever. Det var også flere lavtpresterende i gruppen med lav sosioøkonomisk status enn det var i elevgruppen med høy sosioøkonomisk status. I den samme rapporten

kunne vi også lese at sammenliknet med elever som presterer på nivå 2 og over, rapporterte de lavtpresterende elevene om lavere utholdenhet, lavere mestringsforventning i matematikk og litt lavere grad av tilhørighet til skolen.

Hva kjennetegner lavtpresterende elevers matematiske kompetanse?

Tabell 1 viser andelen norske elever som presterer på hvert mestringsnivå. Vi ser også poenggrensen for de ulike mestringsnivåene. I vedlegget til denne boka finnes en detaljert beskrivelse av den matematiske kompetansen elever på ulike nivåer demonstrerer. Her velger vi å se nærmere på skillet mellom nivå 1a og nivå 2, det vil si grensen mellom lavtpresterende elever og andre elever.

Tabell 1. Poenggrenser og andel norske elever som presterer på de ulike mestringsnivåene i matematikk

Mestringsnivå	Poeng	Prosentandel elever i Norge
6	Over 669	1 %
5	669–607	5 %
4	607–545	15 %
3	545–482	23 %
2	482–420	24 %
1a	420–358	19 %
1b	358–295	10 %
1c og under	Under 295	3 %

Hvert av mestringsnivåene er også beskrevet i den internasjonale rapporten (OECD, 2023a, s. 89). Det er glidende overganger mellom de ulike nivåene, og det er ikke alltid de samme kompetansene som beskrives på hvert nivå. Progresjonen i matematisk kompetanse mellom de ulike nivåene er derfor ikke alltid tydelig. For å undersøke hva som skiller nivå 1a og nivå 2 fra hverandre, har vi plassert beskrivelsene av disse to nivåene i ulike ruter i tabell 2. Beskrivelsene vi har plassert på de samme radene, er av samme type kompetanse. Én beskrivelse av nivå 1a og én beskrivelse av nivå 2 er plassert på egne rader, fordi vi ikke fant tilsvarende kompetanse på begge nivåene.

Vi finner følgende forskjeller mellom de to mestringsnivåene:

- På nivå 1a er framgangsmåte for hvordan oppgaven skal løses, i stor grad gitt eller opplagt. Til sammenlikning må elevene på nivå 2 selv kunne lage enkle strategier for hvordan de skal løse problemet.
- På nivå 1a er nødvendig informasjon presentert i enkle formater, og elevene kan jobbe med inntil to kilder samtidig. På nivå 2 kan elevene jobbe med flere kilder samtidig, og informasjonen er gitt i litt mer komplekse formater enn på nivå 1a.
- På nivå 1a kan elevene bruke grunnleggende algoritmer, formler eller framgangsmåter, mens på nivå 2 må de vise en grunnleggende forståelse av funksjoner, noe som er litt mer avansert.
- På nivå 1a involverer oppgavene elevene skal løse, som oftest hele tall, mens på nivå 2 kan elevene løse oppgaver som involverer enkle forholdstall (som dermed er desimaltall).

Tabell 2. Beskrivelsen av nivåene nedenfor er hentet fra vedlegget til denne boka, som er en oversatt versjon av nivåbeskrivelsene i den internasjonale rapporten (OECD, 2023a, s. 89)

Mestringsnivå 1a (358–420 poeng) Elever på dette mestringsnivået kan typisk ...	Mestringsnivå 2 (420–482 poeng) Elever på dette mestringsnivået kan typisk ...
svare på spørsmål knyttet til enkle kontekster der all nødvendig informasjon er gitt og spørsmålene er tydelig formulert	
jobbe med to kilder samtidig for å trekke ut relevant informasjon, når informasjonen er gitt i enkle formater	hente ut relevant informasjon fra en eller flere kilder som bruker litt komplekse representasjoner, for eksempel tabeller med to variabler, diagrammer eller todimensjonale representasjoner av tredimensjonale objekter
utføre enkle, rutinemessige prosedyrer etter direkte instruksjoner	gjenkjenne situasjoner der de må lage og bruke enkle strategier for å løse problemer, for eksempel gjøre enkle simuleringer som involverer én variabel
utføre handlinger som er åpenbare eller krever minimal kobling av informasjon, hvor handlingene er tydelig beskrevet i oppgaveteksten	
bruke grunnleggende algoritmer, formler, framgangsmåter eller regler for å løse problemer som oftest involverer hele tall	vise en grunnleggende forståelse av funksjoner og kan løse problemer som involverer enkle forholdstall
	gjøre bokstavelige tolkninger av resultater

Nedenfor viser vi et eksempel på en oppgave som er plassert på nivå 1a og en oppgave som er plassert på nivå 2. I oppgaven som er plassert på nivå 1a (figur 1), ser vi at all nødvendig informasjon er gitt, spørsmålet er

tydelig stilt, og framgangsmåten, nemlig prosentregning, er gitt. En rask måte å løse denne oppgaven på, er å legge merke til at det er færre blå enn røde trekanter, og at det derfor må være svaralternativet som er lavere enn 50 prosent som er riktig. En annen måte å løse oppgaven på er ved å telle antall blå trekanter og antall trekanter totalt. Ved å dele antall blå trekanter på antallet totalt og gange med 100 kommer man fram til 37,5 prosent som er det riktige svaret. Oppgaven har en vanskegrad på 411 poeng (OECD, 2023a, s. 90). Man forventer dermed at elever som har et resultat på 411 poeng eller høyere på PISA-prøven i matematikk, har minst 62 prosent sannsynlighet for å svare riktig på denne oppgaven (OECD, 2023a, s. 235).

Figur 2 viser den neste oppgaven, som er litt vanskeligere og plassert på nivå 2. I motsetning til i oppgave 1, er ikke all informasjonen gitt i denne oppgaven. Elevene må gjenkjenne og utvide mønsteret som er gitt, før de kan løse oppgaven. Den femte raden vil ha fire blå og fem røde trekanter. Til sammen gir dette 10 blå trekanter som må deles på 25 trekanter totalt og ganges med 100. Dermed er 40 prosent det riktige svaret på denne oppgaven, som har en vanskegrad på 448 poeng. Disse eksemplene viser hvordan kompetanse på de to mestringsnivåene kan skilles fra hverandre.

The image shows a screenshot of a PISA 2022 math problem interface. The interface is divided into two main panels. The left panel contains the question text and multiple-choice options. The right panel shows a diagram of a triangle pattern on a grid, with two pens (one blue, one red) next to it.

Left Panel: Question Text

Trekantet mønster
Spørsmål 1 / 3

Les "Trekantet mønster" til høyre. Svar på spørsmålet ved å klikke på et av alternativene.

Hvor mange prosent av trekantene i de første fire radene i Adils mønster er blå?

- 37,5 %
- 50,0 %
- 60,0 %
- 62,5 %

Right Panel: Diagram

TREKANTET MØNSTER

Adil tegnet det følgende mønsteret med røde og blå trekanter.

De første fire radene i mønsteret er vist nedenfor.

The diagram shows a triangle pattern on a grid. The first four rows are labeled "1. rad", "2. rad", "3. rad", and "4. rad". The pattern consists of red and blue triangles. The first row has 1 red triangle. The second row has 2 red triangles. The third row has 3 red triangles. The fourth row has 4 red triangles. The total number of red triangles in the first four rows is 10. The total number of triangles in the first four rows is 10 (red) + 6 (blue) = 16. The percentage of red triangles is $\frac{10}{16} \times 100 = 62,5\%$.

Figur 1. Spørsmål 1 i oppgaveenheten «Trekantet mønster». Spørsmålet er plassert på mestringsnivå 1a

PISA 2022

Trekantet mønster
Spørsmål 2 / 3

Les "Trekantet mønster" til høyre. Svar på spørsmålet ved å klikke på et av alternativene.

Hvis Adil utvider mønsteret med en femte rad, hvor mange prosent av trekantene i alle de fem radene vil være blå?

40,0%
 50,0 %
 60,0 %
 66,7%

TREKANTET MØNSTER

Adil tegnet det følgende mønsteret med røde og blå trekanter.

De første fire radene i mønsteret er vist nedenfor.

Figur 2. Spørsmål 2 i oppgaveenheten «Trekantet mønster». Spørsmålet er plassert på mestringsnivå 2

Kontekstuelle faktorer

Elevers prestasjoner påvirkes av en rekke faktorer, for eksempel sosioøkonomisk status (SØS), av elevers egen motivasjon, av læreres kompetanse og undervisning (Nilsen & Pettersen, 2024, kapittel 6 i denne boka), av læringsmiljø og av flere andre skolefaktorer (Creemers & Kyriakides, 2008).

For å undersøke hva som karakteriserer lavtpresterende elever, bør kontekstuelle faktorer som har betydning for prestasjoner, inkluderes. Det finnes et høyt antall slike faktorer. Vi benytter derfor Creemers og Kyriakides' (2008) teoretiske modell som viser hvilke faktorer som har størst betydning for elevers læringsutbytte. Modellen tar for seg alle nivåer av skolen, fra elevnivå til skolenivå og kommune-, fylke- og land-nivå. Modellen heter «den dynamiske modellen» (The Dynamic Model), noe som understreker at skolesystemet endrer seg over tid. Både modellen og meta-analyser understreker at følgende faktorer er særskilt viktige for elevers læringsutbytte:

Demografiske faktorer. Ifølge tidligere forskning har demografiske faktorer, som SØS og minoritetsbakgrunn, stor betydning for elevers

prestasjoner (Mittal et al., 2020; OECD, 2023a; Rege et al., 2023; Sirin, 2005). Også kjønn kan ha betydning for prestasjoner (Rosén et al., 2022). I Norge har flere studier pekt på at enkelte sammensetninger av disse faktorene kan ha spesielt stor betydning, hvor minoritetsspråklige gutter med lav SØS har størst utfordringer på skolen (NOU 2019: 3).

Holdninger. I tillegg til demografiske faktorer er elevers motivasjon og holdninger blant de faktorene som har størst betydning for elevers matematikprestasjoner (Eccles & Wigfield, 2002; Eklöf, 2022), også i Norge (Jensen & Nortvedt, 2013; Kaarstein & Nilsen, 2016). Mestringsforventning (også referert til som selvtillit) har også stor betydning for elevers prestasjoner (Eccles & Wigfield, 2002; Marsh et al., 2015). Motivasjon inkluderer som regel både indre og ytre motivasjon, i tillegg til mestringsforventning (Eccles & Wigfield, 2002). Indre motivasjon er knyttet til glede og interesse for faget, mens ytre eller instrumentell motivasjon som regel er knyttet til nytte av faget (Ryan & Deci, 2000). Begrepet holdninger favner bredere og inkluderer blant annet også elevers utholdenhet og angst for matematikk, noe som også påvirker elevers prestasjoner (Jensen & Nortvedt, 2013).

Læringsmiljø. En systematisk gjennomgang av alle funn fra studier som har benyttet data fra PISA, TIMSS og PIRLS viste at læringsmiljø også har stor betydning for elevers prestasjoner (Nilsen & Teig, 2022). To store internasjonale systematiske litteraturgjennomganger definerer et godt læringsmiljø slik: (1) stor grad av sikkerhet og trygghet og lite mobbing, (2) gode relasjoner (for eksempel mellom lærere og elever) og følelse av tilhørighet, (3) prioritet av et godt akademisk miljø (for eksempel etterutdanning til lærere) og (4) tilstrekkelige ressurser på skolen (for eksempel bibliotek) (Thapa et al., 2013; Wang & Degol, 2015). Av disse faktorene kan det se ut til at et trygt skolemiljø, gode relasjoner, følelse av tilhørighet, et godt akademisk miljø og fravær av mobbing har størst betydning i de vestlige landene (Nilsen & Teig, 2022). Et godt akademisk miljø handler i stor grad om læreres kompetanse og undervisning, og dette blir behandlet av Nilsen og Pettersen (2024, kapittel 6 i denne boka).

Pandemien er også en viktig kontekst for resultatene fra PISA 2022. Vi antar at pandemien har hatt betydning for tilbakegangen i prestasjoner, men vi kan ikke si noe sikkert om hvor mye av endringene som skyldes pandemi, og hvor mye som eventuelt har andre årsaker (Jensen et al., 2023). I tillegg til at gruppen med lavtpresterende elever er større enn i tidligere undersøkelser, kan det også tenkes at de andre resultatene i dette kapittelet er påvirket av at undersøkelsen ble gjennomført rett etter pandemien.

Forskningsspørsmål

Hva kjennetegner lavtpresterende elever i matematikk i Norge når det gjelder

- bakgrunnsvariablene kjønn, sosioøkonomisk status og innvandrerbakgrunn?
- holdninger?
- oppfatning av læringsmiljøet?

Metode

I dette kapitlet bruker vi data fra de 6 611 norske elevene som deltok på prøven i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2022.

Variabler

Med unntak av elevenes faglige prestasjon i matematikk, er alle variablene som ligger til grunn for analysene i dette kapitlet, basert på elevenes svar på spørreskjemaet. Informasjon om hvordan skalaen for elevenes prestasjoner i matematikk er laget, finnes i den tekniske rapporten for PISA 2022 (OECD, 2023b). Variablene som er basert på spørreskjemaet til elevene er også beskrevet i den tekniske rapporten (OECD, 2023c), men vi beskriver dem også her.

Sosioøkonomisk status (SØS) er en samlevariabel som er basert på elevenes svar på spørsmål om foreldrenes utdanningsnivå og yrke samt spørsmål om eiendeler i hjemmet (for eksempel antall bøker). Variabelen ble standardisert til et gjennomsnitt på 0 og standardavvik på 1 for OECD-landene som deltok i PISA 2022.

Elevene deles inn i grupper med innvandrerbakgrunn eller øvrige elever basert på om de har svart at minst én av foreldrene er født i Norge (øvrige elever), begge foreldrene er født i et annet land, men eleven er født i Norge (norskfødte med innvandrerforeldre) eller begge foreldre og eleven selv er født i et annet land (innvandrere). Begrepene er i tråd med definisjonen til Statistisk sentralbyrå (2019).

Vi har med tre samlevariabler knyttet til holdninger: matematikkangst, mestringsforventning og utholdenhet. Videre har vi med seks samlevariabler om læringsmiljø (arbeidsro, utrygt skolemiljø, trygt skolemiljø, mobbing, relasjon mellom lærer og elev samt tilhørighet). Samlevariablene som

var med for første gang i PISA 2022, er standardisert til et gjennomsnitt på 0 og standardavvik på 1 for OECD-landene. Variablene som har vært med tidligere ble standardisert på samme måte, og gjennomsnittet for OECD kan dermed ha endret seg til PISA 2022. Spørsmålene og utsagnene som ligger til grunn for de ulike samlevariablene for holdninger og læringsmiljø beskrives i resultatdelen.

Tabell 3 viser prosentandelen elever som ikke fikk beregnet verdier på samlevariablene på grunn av manglende svar i spørreskjemaet. Vi ser at denne prosentandelen er større for de lavtpresterende elevene enn for elevene som presterte på nivå 2 og over. Det er grunn til å ta dette med i tolkningen av resultatene for de lavtpresterende elevene, spesielt for samlevariablene «Matematikkangst», «Mestringsforventning», «Utholdenhet» og «Arbeidsro», der det er mellom 22 og 30 prosent av disse elevene vi ikke har data for.

Tabell 3. Prosentandel elever som ikke fikk beregnet verdi på samlevariabler på grunn av manglende svar i spørreskjemaet

	Prosentandel manglende data	
	Under nivå 2	Nivå 2 og over
Matematikkangst	30	12
Mestringsforventning	29	11
Utholdenhet	24	7
Arbeidsro	22	7
Utrygt skolemiljø	13	5
Trygt skolemiljø	11	5
Mobbing	14	5
Relasjon mellom lærer og elev	12	5
Tilhørighet til skolen	13	5

Analysemetode

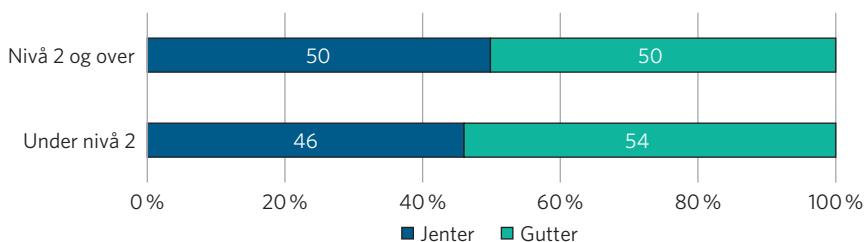
Vi brukte IEAs IDB Analyser versjon 5.0 for å sammenlikne resultater for elever som presterer under nivå 2 i matematikk, med elever som presterer på nivå 2 og over. Der vi sammenlikner gjennomsnittresultatene for samlevariablene, bruker vi tommelfingerregelen fra Cohen (1992) og beskriver forskjeller på 0,2 standardavvik som små, 0,5 som middels og 0,8 som store. Det vil si at vi beskriver forskjellene mellom de to gruppene som Cohens *d*. Formelen vi har brukt, er forskjellen mellom de to gruppenes gjennomsnitt delt på standardavviket til alle norske elever (begge elevgruppene som sammenliknes).

Resultater

Vi presenterer først resultater for bakgrunnsvariabler, deretter for holdninger og læringsmiljø.

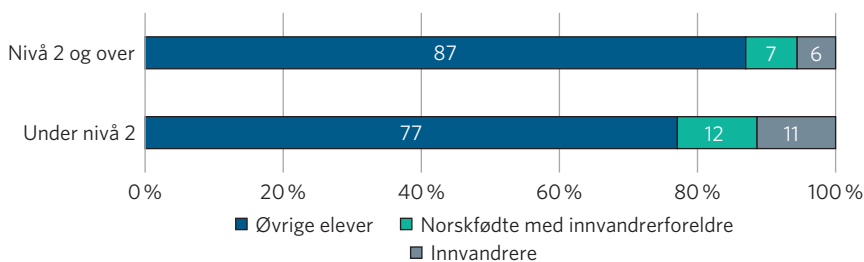
Bakgrunnsvariabler

Blant de elevene som presterer under nivå 2, er det litt flere gutter enn jenter (figur 3). Blant elevene som presterer på nivå 2 og over, er det like mange gutter som jenter. Samtidig er det litt større spredning i matematikkprestasjoner blant gutter enn jenter. Det er en litt større andel høytpresterende gutter (nivå 5 og 6) enn jenter (Jensen et al., 2023).



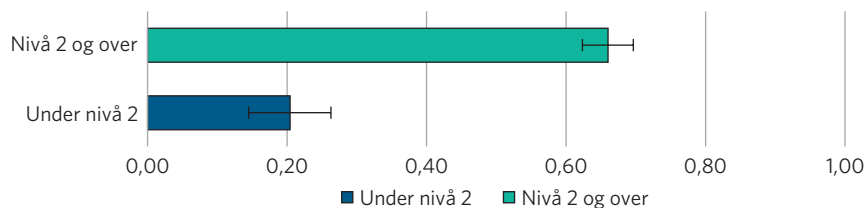
Figur 3. Kjønnfordeling for elever som presterer under nivå 2 og elever som presterer på nivå 2 og over i matematikk

Gruppen med elever som presterer under nivå 2, har en større andel innvandrerelever og norskfødte elever med innvandrerforeldre sammenliknet med elevene som presterer på nivå 2 og over (figur 4).



Figur 4. Prosentandel elever med innvandrerbakgrunn, norskfødte med innvandrerforeldre og øvrige elever i gruppene med elever som presterer under nivå 2 og på nivå 2 og over i matematikk

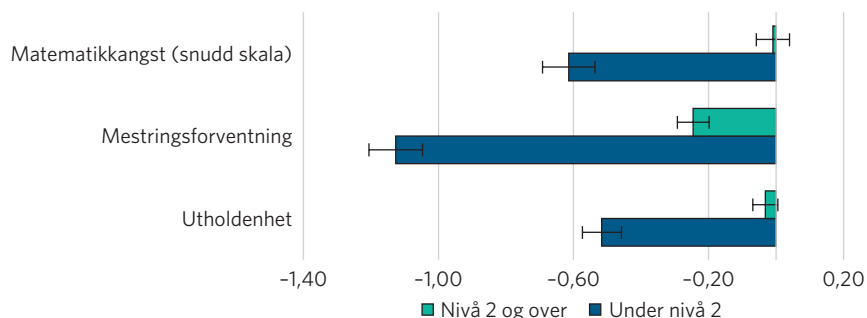
Elever som presterer under nivå 2, har lavere gjennomsnittlig sosioøkonomisk status enn elever som presterer på nivå 2 og over (figur 5). Forskjellen er på 0,55 standardavvik og dermed middels stor.



Figur 5. Gjennomsnittlig sosioøkonomisk status (SØS) for elever som presterer under nivå 2 og på nivå 2 og over i matematikk. 95 prosent konfidensintervall er markert med 1,96 ganger standardfeilen i hver retning

Holdninger

Figur 6 viser at elever som presterer under nivå 2 i matematikk, rapporterer om lavere utholdenhet og mestringsforventning og mer matematikkangst enn elever på nivå 2 og over. Resultater for de tre samlevariablene presenteres mer detaljert nedenfor.

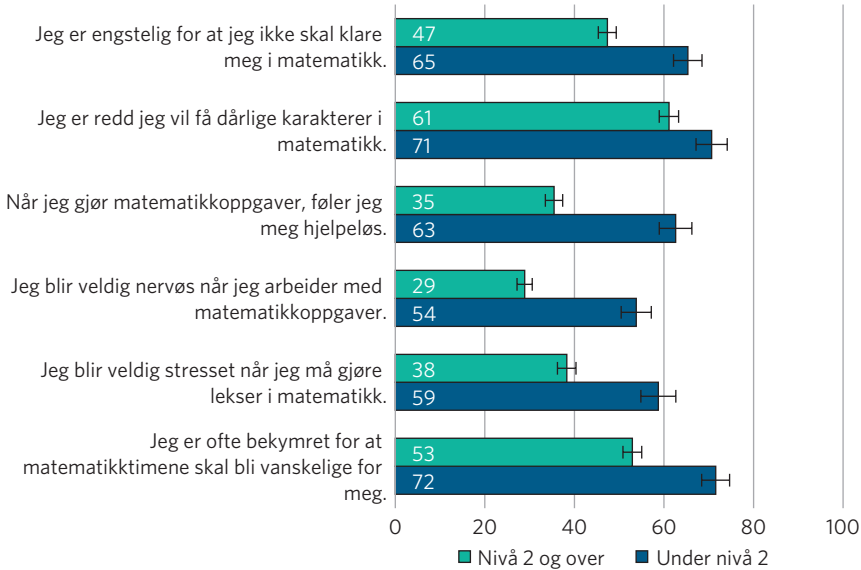


Figur 6. Gjennomsnittsverdier på samlevariablene knyttet til mestringsforventning, matematikkangst og utholdenhet. 95 prosent konfidensintervall er markert med 1,96 ganger standardfeilen i hver retning

Samlevariabelen «Matematikkangst» er basert på seks utsagn knyttet til spørsmålet «Hvor enig eller uenig er du i følgende utsagn?» der elevene kunne krysse av for «Svært enig», «Enig», «Uenig» eller «Svært uenig». Utsagnene vises i figur 7. Det er en middels stor forskjell på 0,48 standardavvik i rapportert matematikkangst mellom elevene som presterer under nivå 2 og elever som presterer på nivå 2 og over i matematikk.

Vi finner den største forskjellen for utsagnet «Når jeg gjør matematikkoppgaver, føler jeg meg hjelpeløs». Her er det 27 prosentpoeng flere blant de lavtpresterende elevene som svarer «Svært enig» eller «Enig» sammenliknet med elevene som presterer på nivå 2 og over. Den minste

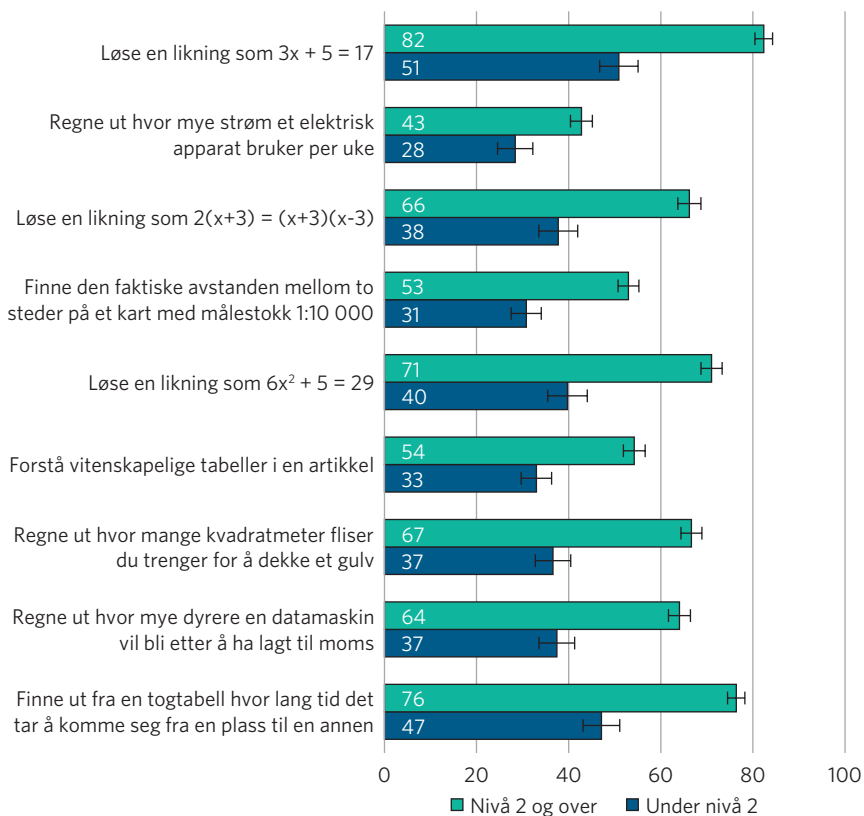
forskjellen er for utsagnet «Jeg er redd jeg vil få dårlige karakterer i matematikk». Her er det 10 prosentpoeng flere lavtpresterende elever som svarer «Svært enig» eller «Enig» enn det er blant elevene som presterer på nivå 2 og over.



Figur 7. «Hvor enig eller uenig er du i følgende utsagn?» Prosentandel elever som svarer «Svært enig» eller «Enig». Utsagnene inngår i samlevariabelen «Matematikkangst». 95 prosent konfidensintervall er markert med 1,96 ganger standardfeilen i hver retning

Samlevariabelen «Mestringsforventning» er basert på ni utsagn til spørsmålet «Hvor sikker vil du føle deg dersom du må gjøre disse matematikkoppgavene?», der elevene kunne svare «Ikke sikker i det hele tatt», «Ikke så sikker», «Sikker» eller «Helt sikker». Utsagnene vises i figur 8. Forskjellen i rapportert mestringsforventning mellom de to gruppene er på hele 0,70 standardavvik.

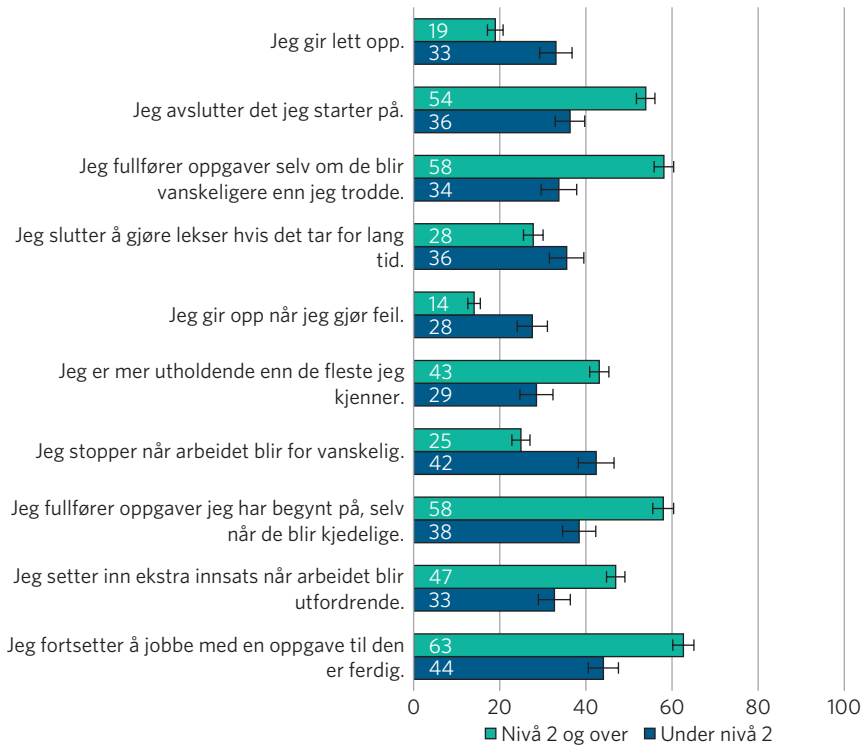
Det er størst forskjell på hva lavtpresterende elever og elever som presterer på nivå 2 og over i matematikk svarer til utsagnet «Løse en likning som $3x + 5 = 17$ ». Det er 31 prosentpoeng færre i gruppen med lavtpresterende elever som svarer at de ville følt seg sikker eller helt sikker dersom de måtte løse denne oppgaven. Den minste forskjellen finner vi for utsagnet «Regne ut hvor mye strøm et elektrisk apparat bruker per uke». Her det 14 prosentpoeng færre av de lavtpresterende som svarer at de ville følt seg sikker eller helt sikker dersom de måtte gjøre dette.



Figur 8. «Hvor sikker vil du føle deg dersom du må gjøre disse matematikkoppgavene?» Prosentandel elever som svarer «Sikker» eller «Helt sikker». Utsagnene inngår i samlevariabelen «Mestringsforventning». 95 prosent konfidensintervall er markert med 1,96 ganger standardfeilen i hver retning

Samlevariabelen for «Utholdenhet» er basert på ti utsagn til spørsmålet «Hvor enig eller uenig er du i følgende utsagn?», der elevene kunne krysse av for «Svært uenig», «Uenig», «Verken enig eller uenig», «Enig» eller «Svært enig». Utsagnene vises i figur 9. Forskjellen i utholdenhet mellom de to elevgruppene er på 0,47 standardavvik og dermed middels sterk.

Vi finner den største forskjellen i andelen som svarer «Svært enig» eller «Enig» på utsagnet «Jeg fullfører oppgaver selv om de blir vanskeligere enn jeg trodde». Her er det 24 prosentpoeng færre av de lavtpresterende elevene som svarer dette sammenliknet med elevene som presterer på nivå 2 og over. Den minste forskjellen finner vi for utsagnet «Jeg slutter å gjøre lekser hvis det tar for lang tid». Her er det 8 prosentpoeng flere av de lavtpresterende elevene som svarer «Svært enig» eller «Enig» enn i den andre elevgruppen.



Figur 9. «Hvor enig eller uenig er du i følgende utsagn?» Prosentandel elever som svarer «Svært enig» eller «Enig». Utsagnene inngår i samlevariabelen «Utholdenhet». 95 prosent konfidensintervall er markert med 1,96 ganger standardfeilen i hver retning

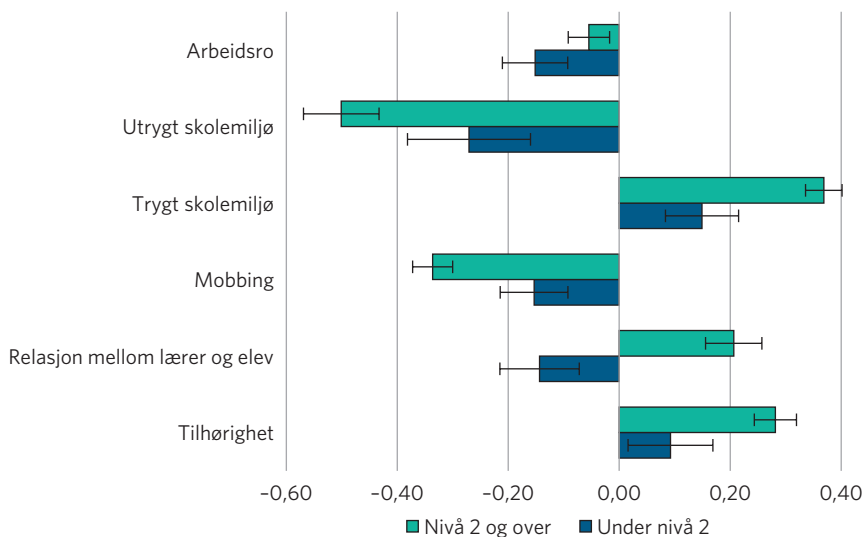
Læringsmiljø

Elever som presterer under nivå 2, rapporterer om noe lavere grad av tilhørighet og et litt dårligere læringsmiljø enn elever på nivå 2 og over. Resultatene for de seks samlevariablene i figur 10 presenteres mer detaljert nedenfor.

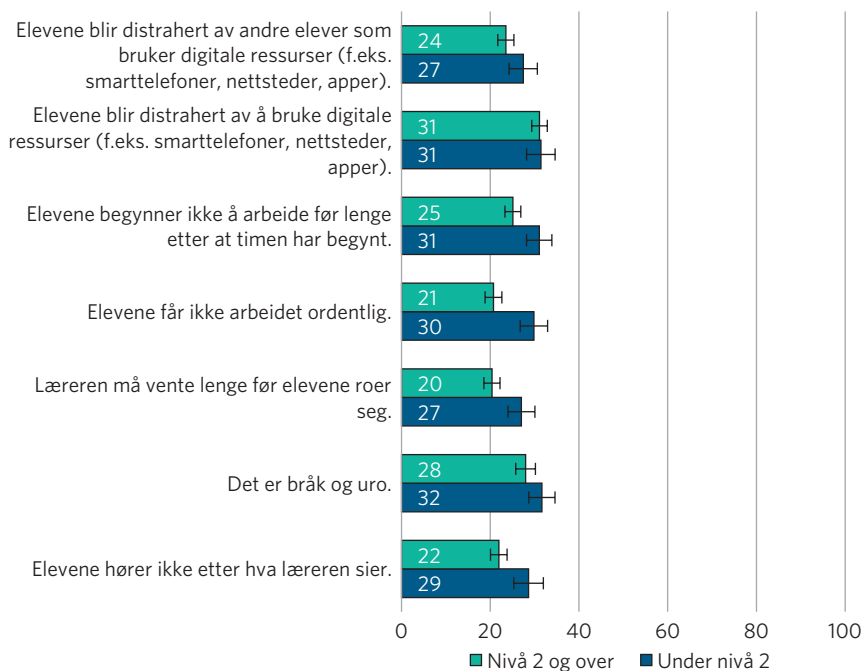
Samlevariabelen for «Arbeidsro» er basert på syv utsagn knyttet til spørsmålet «Hvor ofte skjer dette i matematikktimene?», der elevene kunne svare «Alle timene», «De fleste timene», «Noen timer» eller «Aldri eller nesten aldri». Utsagnene vises i figur 11. For samlevariabelen «Arbeidsro» er det en liten forskjell på 0,12 standardavvik mellom de to gruppene (forskjellen er statistisk signifikant).

Det er størst forskjell mellom elevgruppene på utsagnet «Elevene får ikke arbeidet ordentlig». Her er det 9 prosentpoeng flere i gruppen med lavtpresterende elever som svarer at dette skjer i de fleste eller alle timene. Det er minst forskjell på utsagnet «Elevene blir distraheret av å bruke

digitale ressurser ...». Her svarer like stor andel elever i begge grupper at dette skjer i de fleste eller alle timene.



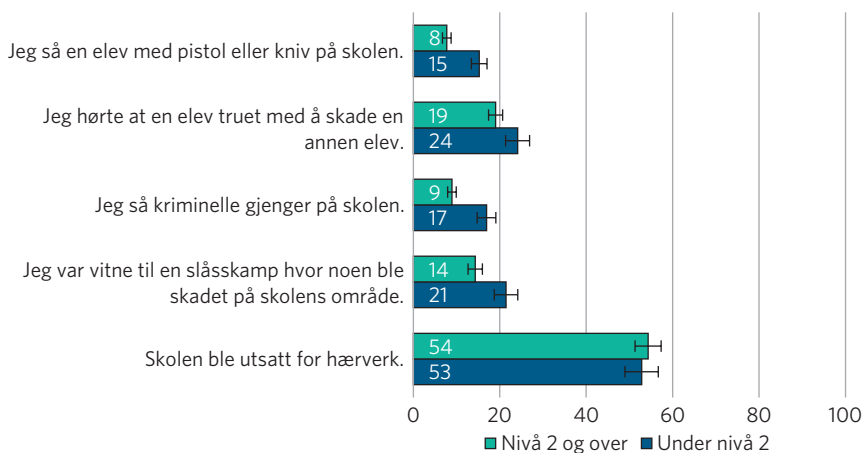
Figur 10. Gjennomsnittsverdier på samlevvariablene knyttet til læringsmiljø. Det vises 95 % konfidensintervall for gjennomsnittene



Figur 11. «Hvor ofte skjer dette i matematikktimene?» Elever som svarer «Alle timene» eller «De fleste timene». Utsagnene inngår i samlevvariabelen «Arbeidsro». 95 prosent konfidensintervall er markert med 1,96 ganger standardfeilen i hver retning

Samlevariabelen «Utrygt skolemiljø» er basert på fem utsagn knyttet til spørsmålet «Har noe av dette skjedd i løpet av de siste fire ukene?», der elevene kunne svare «Ja» eller «Nei». Utsagnene vises i Figur 12. Det er en liten forskjell på 0,16 standardavvik mellom de to gruppene.

Vi finner størst forskjell mellom de to elevgruppene på utsagnet «Jeg så kriminelle gjenger på skolen». Det er 8 prosentpoeng flere blant de lavtpresterende elevene som svarer ja til dette utsagnet. Det er minst forskjell på utsagnet «Skolen ble utsatt for hærverk», der den lille forskjellen på 1 prosentpoeng ikke er statistisk signifikant.



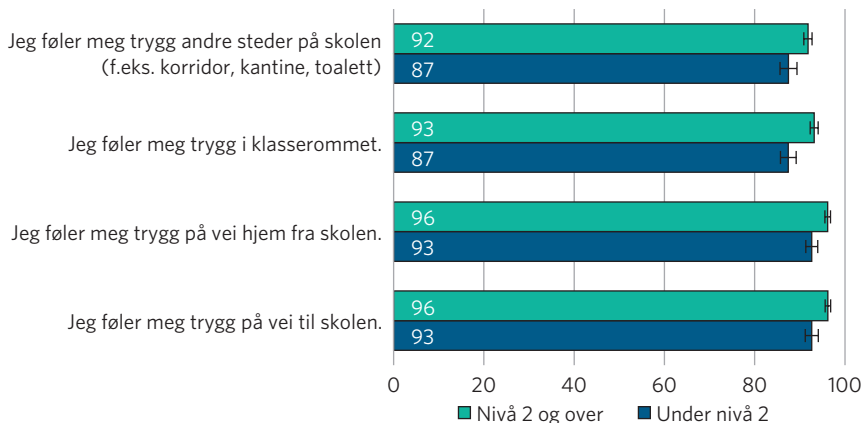
Figur 12. «Har noe av dette skjedd i løpet av de siste fire ukene?» Prosentandel elever som svarer «Ja». Utsagnene inngår i samlevariabelen «Utrygt skolemiljø». 95 prosent konfidensintervall er markert med 1,96 ganger standardfeilen i hver retning

Samlevariabelen «Trygt skolemiljø» er basert på fire utsagn til spørsmålet «Hvor enig eller uenig er du i følgende utsagn?», der elevene kunne krysse av for «Svært enig», «Enig», «Uenig» eller «Svært uenig». Utsagnene vises i figur 13. Det er en liten forskjell på 0,22 standardavvik mellom de to gruppene på samlevariabelen «Trygt skolemiljø».

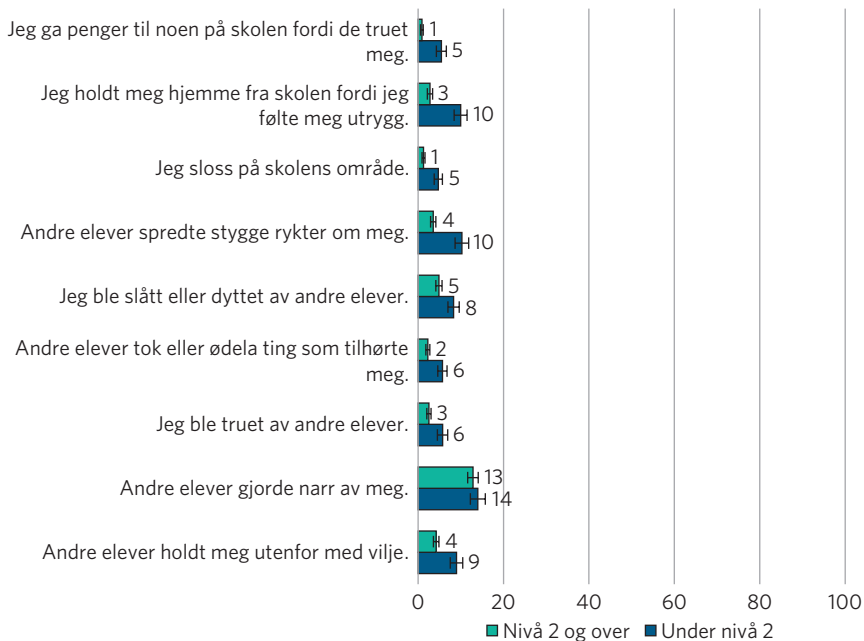
Vi finner den største forskjellen på hvor mange elever som svarer «Svært enig» eller «Enig» for utsagnet «Jeg føler meg trygg i klasserommet». Her er det 6 prosentpoeng færre blant de lavtpresterende elevene som svarer dette sammenliknet med elevene som presterer på nivå 2 og over. For de tre andre utsagnene er forskjellen på 4 prosentpoeng.

Samlevariabelen «Mobbing» er basert på ni utsagn til spørsmålet «Hvor ofte har du opplevd noe av dette på skolen i løpet av de siste 12 månedene?», der elevene kunne krysse av for «Aldri eller nesten aldri», «Noen få

ganger i året», «Noen få ganger i måneden» eller «En gang i uka eller mer». Utsagnene vises i figur 14. Det er en liten forskjell på 0,17 standardavvik mellom de to gruppene på samlevariabelen for mobbing.



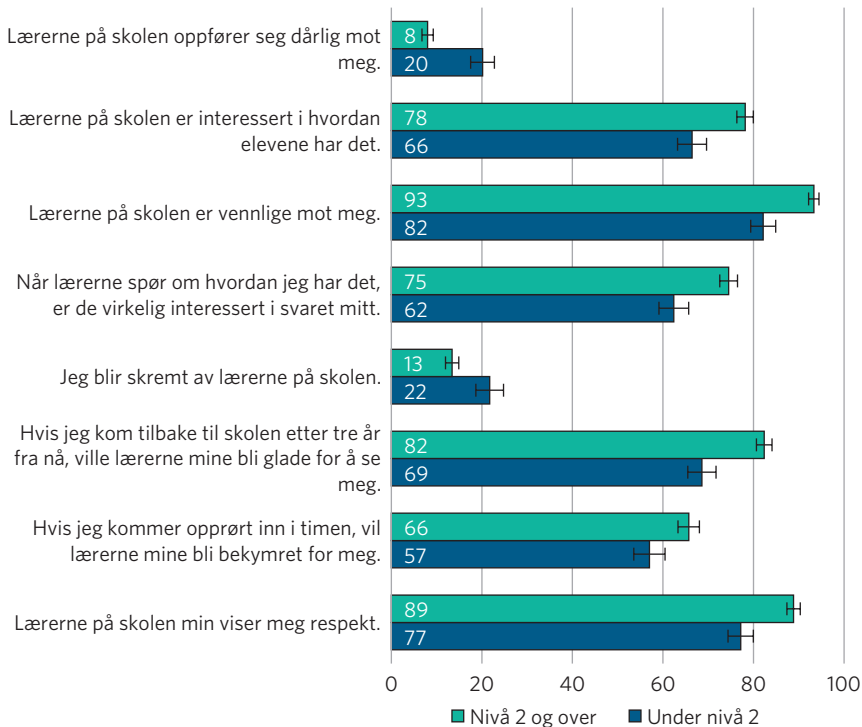
Figur 13. «Hvor enig eller uenig er du i følgende utsagn?» Prosentandel som svarer «Svært enig» eller «Enig». Utsagnene inngår i samlevariabelen «Trygt skolemiljø». 95 prosent konfidensintervall er markert med 1,96 ganger standardfeilen i hver retning



Figur 14. «Hvor ofte har du opplevd noe av dette på skolen i løpet av de siste 12 månedene?» Prosentandel elever som svarer «Noen få ganger i måneden» eller «En gang i uka eller mer». Utsagnene inngår i samlevariabelen «Mobbing». 95 prosent konfidensintervall er markert med 1,96 ganger standardfeilen i hver retning

Det er størst forskjell i andel elever som svarer «Noen få ganger i måneden» eller «En gang i uka eller mer» på utsagnet «Jeg holdt meg hjemme fra skolen fordi jeg følte meg utrygg». Her svarer 7 prosentpoeng flere av de lavtpresterende elevene dette sammenliknet med de som presterer på nivå 2 og over. Det er minst forskjell for utsagnet «Andre elever gjorde narr av meg», der omtrent like stor andel elever i de to gruppene svarer at de har opplevd dette noen få ganger i måneden eller oftere.

Samlevariabelen «Relasjon mellom lærer og elev» er basert på åtte utsagn til spørsmålet «Hvor enig eller uenig er du i følgende utsagn?», der elevene kunne krysse av for «Svært uenig», «Uenig», «Enig» eller «Svært enig». Utsagnene vises i figur 15. På samlevariabelen «Relasjon mellom lærer og elev» er det en liten forskjell på 0,31 standardavvik mellom de to gruppene.



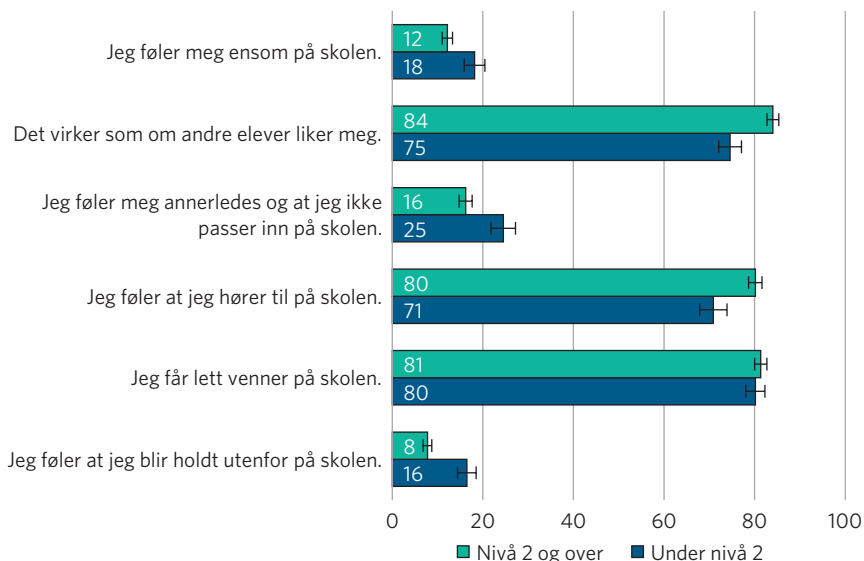
Figur 15. «Hvor enig eller uenig er du i følgende utsagn?» Prosentandel elever som svarer «Svært enig» eller «Enig». Utsagnene inngår i samlevariabelen «Relasjon mellom lærer og elev». 95 prosent konfidensintervall er markert med 1,96 ganger standardfeilen i hver retning

Det er størst forskjell mellom de to elevgruppene i andel som svarer «Svært enig» eller «Enig» på utsagnet «Hvis jeg kom tilbake til skolen etter tre år fra nå, ville lærerne mine bli glade for å se meg». Til dette utsagnet

svarer 14 prosentpoeng færre av de lavtpresterende dette sammenliknet med elevene som presterer på nivå 2 og over. Det er minst forskjell mellom de to gruppene på utsagnet «Jeg blir skremt av lærerne på skolen» med 8 prosentpoeng flere av de lavtpresterende elevene som svarer dette sammenliknet med elevene som presterer på nivå 2 og over.

Samlevariabelen «Tilhørighet til skolen» er basert på seks utsagn til spørsmålet «Tenk på skolen din: Hvor enig er du i disse utsagnene?», der elevene kunne svare «Svært enig», «Enig», «Uenig» eller «Svært uenig». Utsagnene vises i figur 16. Det er en liten forskjell på 0,17 standardavvik mellom gruppene på samlevariabelen «Tilhørighet til skolen».

Vi finner størst forskjell i andel elever som svarer «Svært enig» eller «Enig» mellom de to elevgruppene for utsagnet «Det virker som om andre elever liker meg». Det er 9 prosentpoeng færre av de lavtpresterende elevene som svarer dette sammenliknet med elevene som presterer på nivå 2 og over. Det er minst forskjell mellom de to gruppene på utsagnet «Jeg får lett venner på skolen». Omtrent like mange svarer dette både blant de lavtpresterende og de som presterer på nivå 2 og over.



Figur 16. «Tenk på skolen din: Hvor enig er du i disse utsagnene?» Prosentandel elever som svarer «Svært enig» eller «Enig». Utsagnene inngår i samlevariabelen «Tilhørighet til skolen». 95 prosent konfidensintervall er markert med 1,96 ganger standardfeilen i hver retning

Oppsummering og diskusjon

I dette kapittelet har vi undersøkt forskjeller mellom de lavtpresterende elevene og elever som presterer på nivå 2 og over i matematikk. Sammenliknet med elevene som presterer på nivå 2 og over, kjennetegnes gruppen med lavtpresterende elever ved at

- den har en litt større andel gutter enn jenter, lavere gjennomsnittlig sosioøkonomisk status og en større andel elever med innvandrerbakgrunn.
- elevene rapporterer om lavere utholdenhet og mestringsforventning samt mer matematikkangst.
- elevene rapporterer om litt lavere grad av tilhørighet og et litt dårligere læringsmiljø.

Selv om vi finner forskjeller mellom de to elevgruppene på bakgrunnsvariabler og spørsmål om holdninger og læringsmiljø, er det ikke alle forskjellene som er store. For eksempel er det ikke mer enn 4 prosentpoeng flere gutter i gruppen med lavtpresterende elever enn det er blant elevene som presterer på nivå 2 og over. Det er med andre ord snakk om en liten kjønnsforskjell. Hvis man ser på hele prestasjonsskalaen, finner vi at det er en litt større andel høytpresterende gutter enn høytpresterende jenter (Jensen et al., 2023). Av de tre bakgrunnsvariablene vi har sett på, er det dermed mer interessante forskjeller mellom de to gruppene i andel elever med innvandrerbakgrunn (10 prosentpoeng flere blant de lavtpresterende elevene) og sosioøkonomisk status (0,5 standardavvik lavere for de lavtpresterende elevene). Det er verdt å merke seg at disse variablene henger sammen. Forskjellen i gjennomsnittlig prestasjon i matematikk mellom elever med innvandrerbakgrunn og øvrige elever blir vesentlig mindre når vi kontrollerer for SØS (Jensen et al., 2023).

Vi finner tydelige forskjeller mellom de to gruppene på samlevariablene for holdninger. Spesielt stor er forskjellen i rapportert mestringsforventning (0,7 standardavvik lavere blant de lavtpresterende elevene). Forskjellene i rapportert matematikkangst og utholdenhet er middels store (0,5 standardavvik).

Når det gjelder de seks ulike samlevariablene for læringsmiljø, er det små forskjeller mellom de to gruppene (fra 0,1 til 0,3 standardavvik forskjell). Det er ikke overraskende at forskjellene til sammenlikning er større

for spørsmålene om holdninger, da de spørsmålene er mye tettere knyttet til faglige prestasjoner.

Selv om forskjellene mellom de to elevgruppene er små for samlevariablene om læringsmiljø, er likevel flere av resultatene verdt å merke seg. Selv en liten økning i andel elever som rapporterer at de mobbes eller ikke trives på skolen, er alvorlig. Vi ser for eksempel at det blant lavtpresterende elever er 5 prosentpoeng flere som svarer at andre elever har holdt dem utenfor med vilje noen få ganger i måneden eller oftere det siste året. Av de ulike variablene knyttet til læringsmiljø, var det størst forskjell mellom de to elevgruppene på spørsmålene om relasjon mellom lærer og elev (0,3 standardavvik). Her er det for eksempel 12 prosentpoeng færre blant de lavtpresterende elevene som er enige eller svært enige i at «Når lærerne spør om hvordan jeg har det, er de virkelig interesserte i svaret mitt».

Resultatene sett i sammenheng med annen forskning

Forskjellene mellom de to elevgruppene som presterer under og på nivå 2 og over, stemmer overens med det vi vet fra andre publikasjoner. For eksempel vet vi fra annen forskning at det er en sammenheng mellom prestasjoner og bakgrunnsvariabler som sosioøkonomisk status og om elevene har innvandrerbakgrunn (Mittal et al., 2020; OECD, 2023a; Rege et al., 2023; Sirin, 2005). Det er mange studier som har funnet en sammenheng mellom motivasjon og prestasjoner (Eklöf, 2022; Jensen & Nortvedt, 2013; Kaarstein & Nilsen, 2016). Flere studier viser også at det er en sammenheng mellom elevenes prestasjoner og hvordan de opplever læringsmiljøet på skolen (Nilsen & Teig, 2022).

I den norske kortrapporten fra PISA 2022 så vi at det var flere lavtpresterende gutter enn jenter, og at det var en sammenheng mellom både SØS og innvandrerbakgrunn for matematikkprestasjoner. Den samme rapporten viste også at det var sammenheng mellom både tilhørighet til skolen og mobbing og matematikkprestasjoner (Jensen et al., 2023). Verdien av analysen i dette kapitlet er at vi ser nærmere på elevene som presterer under nivå 2, og beskriver hvordan resultatene er for denne elevgruppen.

Størrelsen på resultatene passer med resultatene som ble rapportert for lavtpresterende elever i PISA 2012 (OECD, 2016). Da var det ikke noen kjønnsforskjell i andel lavtpresterende elever, men selv om vi finner en forskjell i PISA 2022, er den liten. Videre fant man i 2012 at det også var flere lavtpresterende blant elever med innvandrerbakgrunn enn øvrige

elever, og at det var flere lavtpresterende blant elever med lav sosioøkonomisk status sammenliknet med elever med høy sosioøkonomisk status. Forskjellene i holdninger og læringsmiljø er også sammenliknbare i de to undersøkelsene. I 2012 rapporterte de lavtpresterende elevene om vesentlig lavere utholdenhet og mestringsforventning og litt lavere tilhørighet til skolen (OECD, 2016).

Begrensninger ved denne studien

Selv om resultatene i kapittelet gir en viktig beskrivelse av de lavtpresterende elevene i PISA-undersøkelsen, er det flere begrensninger ved en slik studie. For eksempel er det en tverrsnittsundersøkelse, som betyr at man ikke kan trekke kausale slutninger. Vi kan for eksempel ikke si sikkert hva som kommer først av holdninger og prestasjoner, men ifølge tidligere forskning er dette eksempler på sammenhenger som kan gå begge veier (Seaton et al., 2010).

Vi ser også at det – spesielt for de lavtpresterende elevene på spørsmålene om matematikkangst, mestringsforventning, utholdenhet og arbeidsro – er en relativt stor andel manglende data (22 til 30 prosent). Dette må vi ha med som et forbehold når vi tolker disse resultatene. Dette er spørsmål som var plassert relativt langt bak i elevspørreskjemaet, og vi kan for eksempel anta at en av grunnene til at elevene ikke svarte på disse, handlet om utholdenhet. Vi kan ut fra det tenke at resultatene for spørsmålene om utholdenhet ville vært enda lavere dersom alle de lavtpresterende elevene svarte på disse spørsmålene. Men dette kan vi selvsagt ikke være sikre på.

Til slutt vil vi presisere at når vi bruker begrepet «lavitpresterende» i dette kapittelet, viser vi til enkeltstående prestasjoner i PISA-undersøkelsen, og ikke til en generell egenskap disse elevene har.

Forfatterbiografier

Fredrik Jensen har en forskerstilling ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo. Han har jobbet med PISA-undersøkelsen siden 2013, og vært prosjektleder fra PISA 2018. Hans forskningsinteresser inkluderer elevs kompetanse i og holdninger til naturfag og matematikk. Jensen var medredaktør for boka *Like muligheter til god leseforståelse? 20 år med lesing i PISA* (utgitt på Universitetsforlaget i 2020).

Trude Nilsen er seniorforsker ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo. Hun er leder for Strand 1 ved senter for fremdragende forskning CREATE – Senter for forskning på likhet i utdanning, og for prosjektet TESO, støttet av Norges forskningsråd. Nilsen jobber med data fra de internasjonale undersøkelsene, og hennes forskningsinteresser inkluderer ulikheter i utdanningen, læreres kompetanse og undervisningskvalitet samt kausale metoder. Nilsen var redaktør av håndboken *International Handbook of Comparative Large-Scale Studies in Education* (utgitt på Springer i 2022), og har også utgitt et betydelig antall artikler i internasjonale tidsskrift i tillegg til bøker og rapporter.

Referanser

- Cohen, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin*, 112(1), 155–159.
- Creemers, B. & Kyriakides, L. (2008). The dynamics of educational effectiveness. *A contribution to policy, practice and theory in contemporary schools*. Routledge.
- Eccles, J. S. & Wigfield, A. (2002). Motivational beliefs, values, and goals. *Annual Review of Psychology*, 53(1), 109–132. <https://doi.org/10.1146/annurev.psych.53.100901.135153>
- Eklöf, H. (2022). Student motivation and self-beliefs. I T. Nilsen, A., Stancel-Piątak & J. E. Gustafsson (Red.), *International handbook of comparative large-scale studies in education: Perspectives, methods and findings* (s. 1299–1322). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-38298-8_44-1
- Jensen, F. & Nortvedt, G. A. (2013). Holdninger til matematikk. I M. Kjærnsli & R. V. Olsen (Red.), *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012* (s. 97–120). Universitetsforlaget.
- Jensen, F., Pettersen, A., Frønes, T. S., Eriksen, A., Løvgren, M. & Narvhus, E. K. (2023). *PISA 2022. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing*. Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/noasp.205>
- Kunnskapsdepartementet. (2015). Tett på realfag. Nasjonal strategi for realfag i barnehagen og grunnsopplæringen (2015–2019). https://www.regjeringen.no/contentassets/869faa81d1d740d297776740e67e3e65/kd_realfagsstrategi.pdf
- Kaarstein, H. & Nilsen, T. (2016). Motivasjon. I O. K. Bergem, H. Kaarstein & T. Nilsen (Red.), *Vi kan lykkes i realfag: Resultater og analyser fra TIMSS 2015* (s. 63–77). Universitetsforlaget. <https://doi.org/10.18261/97882150279999-2016-05>
- Marsh, H. W., Abduljabbar, A. S., Parker, P. D., Morin, A. J. S., Abdelfattah, F., Nagengast, B., Möller, J. & Abu-Hilal, M. M. (2015). The internal/external frame of reference model of self-concept and achievement relations: Age-cohort and cross-cultural differences. *American Educational Research Journal*, 52(1), 168–202. <https://doi.org/10.3102/0002831214549453>
- Mittal, O., Nilsen, T. & Björnsson, J. K. (2020). Measuring equity across the Nordic education systems—conceptual and methodological choices as implications for educational policies. I T. S. Frønes, A. Pettersen, J. Radišić & N. Buchholtz (Red.), *Equity, equality and diversity in the Nordic model of education* (s. 43–71). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61648-9_3
- Nilsen, T. & Pettersen, A. (2024). Matematikkundervisning i norske og nordiske klasserom – klasseledelse, støttende undervisning og faglige utfordringer. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 139–165). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch6>

- Nilsen, T. & Teig, N. (2022). A systematic review of studies investigating the relationships between school climate and student outcomes in TIMSS, PISA, and PIRLS. I T. Nilsen, A. Stancel-Piątak & J.-E. Gustafsson (Red.), *International handbook of comparative large-scale studies in education: Perspectives, methods and findings* (s. 1053–1086). https://doi.org/10.1007/978-3-030-88178-8_34
- NOU 2019: 3. (2019). Nye sjanser – bedre læring. Kjønnforskjeller i skoleprestasjoner og utdanningsløp. Kunnskapsdepartementet. <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2019-3/id2627718/>
- NOU 2019: 12. (2019). *Lærekraftig utvikling. Livslang læring for omstilling og konkurransevne*. Kunnskapsdepartementet. <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2019-12/id2653116/>
- OECD. (2016). *Low-performing students. Why they fall behind and how to help them succeed*. OECD Publishing.
- OECD. (2023a). *PISA 2022 Results: Volume I. The state of learning and equity in education*. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- OECD. (2023b). Scaling PISA data. I *PISA 2022 technical report*. Organisation for Economic Co-operation and Development.
- OECD. (2023c). Scaling procedures and construct validation of context questionnaire data. I *PISA 2022 technical report* (s. 390–452). Organisation for Economic Co-operation and Development.
- Rege, M., Bøe, T., Drange, N. E., Fløtten, T., Glemmestad, H. S., Hugvik, K., Salvanes, K. G. & Zachrisson, H. D. (2023). *En barndom for livet: Økt tilhørighet, mestring og læring for barn i fattige familier*. <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/en-ny-barndom-for-livet/id3000835/>
- Rosén, M., Steinmann, I. & Wernersson, I. (2022). Gender differences in school achievement. I T. Nilsen, A. Stancel-Piątak & J.-E. Gustafsson (Red.), *International handbook of comparative large-scale studies in education: Perspectives, methods and findings* (s. 1–48). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-38298-8_46-1
- Ryan, R. M. & Deci, E. L. (2000). Intrinsic and extrinsic motivations: Classic definitions and new directions. *Contemporary educational psychology*, 25(1), 54–67. <http://dx.doi.org/10.1006/ceps.1999.1020>
- Seaton, M., Marsh, H. W. & Craven, R. G. (2010). Big-fish-little-pond effect: Generalizability and moderation – two sides of the same coin. *American Educational Research Journal*, 47(2), 390–433. <https://doi.org/10.3102/0002831209350493>
- Sirin, S. R. (2005). Socioeconomic status and academic achievement: A meta-analytic review of research. *Review of Educational Research*, 75(3), 417–453. <https://doi.org/10.3102/00346543075003417>
- Statistisk Sentralbyrå. (2019). Slik definerer SSB innvandrere. <https://www.ssb.no/befolkning/innvandrere/artikler/slik-definerer-ssb-innvandrere>
- Strietholt, R. & Strello, A. (2022). Socioeconomic inequality in achievement: Conceptual foundations and empirical measurement. I T. Nilsen, A. Stancel-Piątak & J. E. Gustafsson (Red.), *International handbook of comparative large-scale studies in education: Perspectives, methods and findings* (s. 201–220). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-38298-8_11-1
- Thapa, A., Cohen, J., Guffey, S. & Higgins-D'Alessandro, A. (2013). A review of school climate research. *Review of Educational Research*, 83(3), 357–385. <https://doi.org/10.3102/0034654313483907>
- Wang, M.-T. & Degol, J. L. (2015). School climate: A review of the construct, measurement, and impact on student outcomes. *Educational Psychology Review*, 28, 315–332. <https://doi.org/10.1007/s10648-015-9319-1>

CHAPTER 9

Succeeding against the odds: Exploring self-beliefs and academic emotions profiles of resilient and non-resilient students

Jelena Radišić University of Oslo

Andreas Pettersen University of Oslo

Abstract: The chapter focuses on academically resilient students in Norway using PISA 2022 data and relying on the person-centred approach. We investigate self-belief profiles of different student categories and compare profile saturation between academically resilient and non-resilient categories. Further, we explore the characteristics of each self-belief profile, tapping into school, classroom, and family environments. The analyses reveal three distinct belief profiles—*positive self-image*, *underdeveloped* and *negative self-image* profiles—among which the latter can be labelled as the profile at risk. Academically resilient students are found in the *positive self-image* and *underdeveloped* profiles. The former is situated within the most favourable school, classroom and family characteristics. When observing the entire study sample, the *underdeveloped* profile comprises almost two-thirds of the students, leaving room for potential support of these students in developing more favourable belief systems concerning mathematics.

Keywords: academic resilience, classroom and school environment, mathematics self-beliefs

Even though socioeconomic status is strongly related to school performance (OECD, 2018; Xie & Ma, 2019) and favours students with more social and economic resources, many socioeconomically disadvantaged students break these odds and manage to be amongst the highest-performing groups. These students are often labelled as academically resilient (Kiswarday, 2012; Martin & Marsh, 2006; Rutter, 2012; Sattler & Gershoff, 2019).

Academic resilience is about students' ability to succeed in school despite growing up in disadvantageous environments (Kiswarday, 2012; Martin & Marsh, 2006; Masten, 2018; Rutter, 2012). A myriad of studies explored individual characteristics linked to resilience (Masten, 2018), recently tapping into the socioemotional domain (e.g., exploring anxiety, self-efficacy or perseverance; Etherton et al., 2022; Martin & Marsh, 2006; Thorsen et al., 2021), as well as the school and family environment in which a resilient student may be situated (Abelev, 2009; Agasiti et al., 2018; Rutter, 2006, 2012). In parallel, international large-scale assessments like the Programme for International Student Assessment (PISA, OECD, 2011) draw attention to the phenomenon, discussing how schools can support disadvantaged students (Agasiti et al., 2018). PISA 2022 results show that in Norway, 12.6 per cent of the socioeconomically disadvantaged students are amongst the highest-performing students in mathematics (OECD, 2023b). However, there is still much to be learned about resilient students and the factors and conditions that explain their success, even though adjacent fields like developmental psychology and education thoroughly address this topic.

Utilising data from the PISA 2022, in this chapter, we investigate the characteristics of academically resilient students in mathematics in Norway using a person-centred approach (Bergman & Trost, 2006; Ferguson et al., 2020). While the focus is on the resilient students and creating a more nuanced understanding of this group, we observe them in contrast to peers experiencing similar risks and peers performing at the same high level but not experiencing risk (Sattler & Gershoff, 2019). Thus, our primary focus is exploring whether distinct belief patterns can be isolated across resilient and non-resilient student groups—can some belief patterns be considered unique to the resilient student category? Following, we investigate how the particular belief systems of resilient students tie back to their perception of classroom instruction and the learning environment, both at home and school.

Background

Academic resilience

While in everyday language, resilience has become one of the buzzwords one uses when describing battling adversity (Xenofontos & Mouroutsou, 2023), in academia, resilience research has been recognised as a potential tool in understanding how to advance the learning outcomes of students at risk of school failure (Rudd et al., 2021). Yet, despite its popularity, the field still struggles with common ground for defining resilience.

Within the educational milieu, academic resilience is about students' ability to succeed in school even though they are exposed to unfavourable environments or have a disadvantaged background (Kiswarday, 2012; Martin & Marsh, 2006; Masten, 2018; Rutter, 2012). In connection with this, educational literature also recognises academic buoyancy, that is, students' ability to cope with everyday setbacks and challenges (e.g., exam pressure, low grades and difficulties related to schoolwork, Martin & Marsh, 2008) and grit, i.e., individuals' capacities to be able to endure the effort and to succeed by responding positively to challenging situations and overcoming adversities (Thorsen et al., 2021). Within this chapter, we utilise the term academic resilience.

Recent meta-analyses attempted to map out the flow of ideas related to understanding resilience (Xenofontos & Mouroutsou, 2023), recognising several distinct approaches to its operationalisation (Sattler & Gershoff, 2019), processes underlying resilience (Nearchou et al., 2014), measurement and analyses that follow from such definitions and inferences made (Rudd et al., 2021). While earlier definitions were grounded on a shared belief that individuals exhibiting resilience had outstanding characteristics and extraordinary coping mechanisms that made them stand out from the rest (Masten, 2001, 2018), the literature has slowly moved in the direction of the view that resilience does not originate from unique or exceptional qualities these individuals may have and that its occurrence can very much depend on outside circumstances. Such an understanding has shifted focus towards factors that can predict resilience, i.e., family or school environment (Abelev, 2009; Masten, 2018; Rutter, 2006), slowly adding to the complexity of the lenses used to understand resilience (Bronfenbrenner & Morris, 2006; Hernandez-Martinez & Williams, 2013; Masten, 2018; Ungar, 2013). Ultimately, this has contributed to a new understanding that

everyone can positively function and ‘bounce back’ given the right circumstances (Rudd et al., 2021).

Factors associated with resilience

While resilience research adopts the view of natural variation in individual responses to unfavourable situations, it also seeks to identify contributing or protective factors to their positive adaptation (Rutter, 2012). As such, researchers have explored individual characteristics linked to resilience, in particular, those belonging to the non-cognitive domain (Etherton et al., 2022; Martin & Marsh, 2006; Thorsen et al., 2021) as well as those coming from the surroundings, namely school and family (Abelev, 2009; Agasiti et al., 2018; Rutter, 2012).

Focusing on the students, their positive attitude towards mathematics, high self-efficacy and self-regulation (Etherton et al., 2022; James et al., 2021; Martin & Marsh, 2006), persistence and perseverance (Neumann et al., 2020; Thorsen et al., 2021), low anxiety (Mammarella et al., 2018; Putwain et al., 2013) and a sense of control are reported to endorse resilience (Sandoval-Hernandez & Białowolski, 2016). Yeager and Dweck (2012) also relate resilience with a growth mindset about one’s intellectual abilities.

Furthermore, resilient students establish and sustain positive relationships with their teachers and peers (Doll, 2013; Doll et al., 2004; Eisenber et al., 2003; Langenkamp, 2010; Lessard et al., 2014) and report a positive sense of belonging and attitudes to their school (Donolato et al., 2020; Kalender, 2015; Lipscomb et al., 2021) compared to low-achieving students. Thus, school characteristics and structures (Borman & Overman, 2004; Cordero & Mateos-Romero, 2021) very much matter in supporting resilient students, especially when grounded in supportive relationships and experiences of social cohesion (Ungar et al., 2019). At a classroom level, several studies show links between resilience and learning environments and teachers’ teaching strategies, notably when asking students to explain their answers (Alivernini et al., 2016; Chirkina et al., 2020; Cordero & Mateos-Romero, 2021).

Beyond school grounds, the family environment is shown to matter (Frempong et al., 2016; Holliday et al., 2014; Nearchou et al., 2014), with parents’ engagement and quality of the relationships being the most advocated for (James et al., 2021; Whitten & Weaver, 2010).

Resilience and equity in international large-scale assessments

In recent years, data from the international large-scale assessments (ILSA) have been used to investigate research questions related to resilience (see, for instance, OECD, 2019; Radišić & Pettersen, 2020; Siebecke & Jarl, 2022; Teig, 2023). In the context of ILSAs, resilience is often seen as a component of equity, i.e., all students should have equal learning opportunities (OECD, 2019). This is especially pronounced in PISA 2022, where equity in education, measured through *fairness* and *inclusion*, is one of the key topics addressed and investigated (OECD, 2023b). Fairness refers to the idea that all students should be “given the opportunity to realise their full learning potential, irrespective of their background” (OECD, 2023b, p. 111). In contrast, inclusion means all students should have access to quality education. In PISA, students’ economic, social and cultural status (ESCS) is a crucial measure of equity and equal opportunity for education. ESCS comprises parents’ highest level of education, parents’ highest occupational status and home possession (OECD, 2023b, p. 114). In all PISA cycles, students’ ESCS is strongly related to mathematics performance across all the participating countries (OECD, 2019, 2023b). In PISA 2022, ESCS could explain 15 per cent of the variance in students’ mathematics performance across OECD countries (OECD, 2023b). Norway is found to be one of the OECD countries in PISA with the highest levels of fairness, where “only” 9.6 per cent of the variance in student mathematics performance can be explained by ESCS. When comparing the performance of students with different ESCS in Norway, we find that the 25 per cent of students with the lowest ESCS had a mean performance of 431, and the 25 per cent of students with the highest ESCS had a mean performance of 512 (Jensen et al., 2023). This difference of 81 points is substantial, corresponding to more than two years of difference in schooling (Avvisati & Givord, 2023), and is larger than the difference captured in earlier PISA cycles (Jensen et al., 2023).

Despite the pronounced importance of economic, social, and cultural status for school achievement, some students who score low on the ESCS are among the academically highest performers. In PISA, these are referred to as academically resilient and are defined as students who are amongst the bottom quarter (25 per cent) of the ESCS measure in their own country and score in the top quarter (OECD, 2023b, p. 119). In PISA 2022, Norway had 12.6 per cent of socioeconomically disadvantaged students who

performed among the top quarter of mathematics performance (i.e., about 3.15 per cent of the total population), which is above the OECD average and among the highest among the Nordic countries (see Table 1).

Table 1. Percentage of resilient students in mathematics in PISA 2022 in the Nordic countries

	Norway	Denmark	Finland	Iceland	Sweden	OECD
Resilient students in mathematics	12.6% (0.96)	10.2% (1.09)	11.9% (0.84)	11.3% (1.36)	9.9% (0.90)	10.2% (0.17)

Note: Standard errors are shown in parentheses. OECD represents the average of the OECD countries. (Source OECD, 2023b)

According to the results of PISA 2018, when reading was the primary domain, parental support, teacher enthusiasm, student self-efficacy and disciplinary climate at school were recognised as critical elements aiding students' resilience across countries (OECD, 2019, p. 65). Furthermore, the results show that the students' mindset is also essential for resilience in reading. There are more academically resilient students among students who report having a growth mindset than students with a fixed mindset. Also, on average, academically resilient students tended to enjoy reading more, were willing to work hard to master tasks, and indicated a more remarkable ability to set and pursue their goals (OECD, 2019, p. 75).

The current study

Alongside the background described in the previous sections, we focus further on the distinct characteristics of resilient students. Instead of observing possible protective factors individually, we observe their belief patterns. Resilient students are often compared only with peers experiencing similar risks but achieving lower results or with peers doing as well but not experiencing risk (Sattler & Gershoff, 2019). We include both these criteria in our study. Thus, we start by exploring belief patterns of resilient and diverse non-resilient groups, utilising a person-centred approach (Bergman & Trost, 2006; Ferguson et al., 2020). Then, we observe which of the selected profiles is more pertinent to the resilient student category and how each belief profile is supported within classroom, school and family environments. Such an approach will allow us to better understand the different nuances across the belief patterns of 15-year-olds in Norway, not disregarding the diversity concerning their background and the adverse

conditions they may face. Current analyses use PISA 2022 data for Norway, and the variable choice is somewhat constrained by the concepts examined in PISA. However, this investigation is not data-driven but rather among the poll of available variables we choose to include in the analyses, those that allow us to answer the research questions and are sustained in the literature relevant to the field. The following research questions are the focus of our investigation:

1. What are the characteristics of academically resilient students compared with the non-resilient groups concerning the students' perceived perseverance, self-efficacy in mathematics, and mathematics anxiety? Given the overview of research on personal characteristics supporting resilience and our sample, we expect mixed belief patterns, ranging from more to less optimal ones (Etherton et al., 2022; James et al., 2021; Mammarella et al., 2018; Martin & Marsh, 2006; Neumann et al., 2020; Putwain et al., 2013; Radišić & Pettersen, 2020; Thorsen et al., 2021). At the same time, we expect resilient and high-achieving students who are not exposed to adverse risks to be more present within the optimal belief pattern profiles (Radišić & Pettersen, 2020).
2. What are student profiles' perceptions of mathematics concerning their relative preference for the domain, view of math being easier than other subjects, motivation to do well in math and the notion that everyone can learn mathematics (growth mindset)? Based on previous studies, we postulate optimal self-belief profiles saturated by resilient and high-achieving students who are not exposed to adverse risks to have more favourable perceptions of mathematics as a subject (Martin & Marsh, 2006; Yeager and Dweck, 2012).
3. What are the typical characteristics of the family, school, and classroom environment surrounding the student profiles? Based on previous studies, we postulate optimal self-belief profiles saturated by resilient and high-achieving students who are not exposed to adverse risks to have more favourable perceptions of their immediate classroom and school environment (Donolato et al., 2020; Kalender, 2015; Lipscomb et al., 2021) and student-teacher relationships (Doll, 2013; Doll et al., 2004; Eisenber et al., 2003; Langenkamp, 2010; Lessard et al., 2014). Similarly, we expect a more positive perception of family support across more optimal belief profiles (James et al., 2021; Whitten & Weaver, 2010).

Methods

Data and sample

The current study utilises data from PISA 2022 for Norway. PISA is an international survey of 15-year-olds' skills and knowledge in mathematics, reading, and science. PISA collects representative data for 15-year-old students; 99 per cent of sampled students in Norway attend grade 10 (Jensen et al., 2023). This study is based on the released international data files comprising 6,611 Norwegian students.¹

According to Sattler and Gershoff (2019), two different criteria are used in the literature to distinguish resilient from non-resilient students. These include 1) doing better than peers experiencing similar risks and 2) doing as well as peers not experiencing risk. While authors across studies chose one or the other, we combine these in our current investigation. Following this principle, we selected a subsample of students based on their ESCS and performance (see the section on *Variables* for further details), distinguishing four subgroups—*academically resilient*, *failing under-risk*, *low-achieving*, and *non-risk achievers*.²

The *academically resilient* category consists of the students from the lowest 25 per cent on the ESCS scale who are at the same time among the 25 per cent highest achieving students in mathematics in PISA 2022. The three comparison categories involved the *failing under-risk* students (the lowest 25 per cent on ESCS/the lowest 25 per cent in mathematics achievement), the *low achievers* (the highest 25 per cent on ESCS/the lowest 25 per cent in mathematics achievement) and the *non-risk achievers* (the highest 25 per cent on ESCS/the highest 25 per cent in mathematics achievement). Please see Table 2 for more details.

Table 2. The four categories of students comprising the study sample

	Low ESCS (25% lowest)	High ESCS (25% highest)
High-achieving (25% highest)	Academically resilient: 192 students	Non-risk achievers: 664 students
Low-achieving (25% lowest)	Failing under-risk: 619 students	Low achievers: 178 students

1 The full sample in PISA 2022 in Norway was around 8,500 students. Some of these students were administered the PISA financial literacy test. These students were not included in the data files released in December 2022 (OECD, 2023a). The released data file used in this study includes 6,611 students.

2 In the released data file, 401 students did not have a score for ESCS. These were excluded from the data file before creating the subgroups.

Variables

In PISA, students are administered a two-hour test composed of two parts (first and second hours), where students are tested in mathematics, reading and/or science. The mathematics test comprises 234 items, where each student receives a sample of items. Students' mathematics scores are reported in the form of 10 plausible values. The current study used the average of these ten plausible values as the student's score in selecting the subgroups described in Table 2.

The second part of the PISA administration is a questionnaire designed to explore students' demographics (e.g., ESCS) and self-belief variables about oneself (e.g., mathematics anxiety, self-efficacy), school (e.g., sense of belonging, being bullied), instruction (e.g., disciplinary climate in mathematics, cognitive activation), mathematics as a subject (e.g., preference of math over other core subjects), the math teacher (e.g., mathematics teacher support) and home (e.g., family support). Please see Table 3 for a complete list of variables used in the study.

Table 3. Variables used in the study

Construct (abbreviation)	Description	Reliability
Achievement in mathematics	An average of 10 plausible values was used in the study.	/
Gender (ST004D01T)	Student gender was obtained from school records and validated by comparing it to the student's responses to the questionnaire (0 for girls)	/
Index of economic, social and cultural status (ESCS)	The score is based on three indicators: highest parental occupation status, highest education of parents in years and home possessions.	/
Self-beliefs of oneself		
Mathematics self-efficacy: formal and applied mathematics (MATHEFF)	Students' ratings of how confident they were about having to do a range of formal and applied mathematics tasks (e.g., "Solving an equation like $2(x + 3) = (x + 3)(x - 3)$ "); 9 items with 4-response options ("Not at all confident" to "Very confident")	0.86
Mathematics self-efficacy: mathematical reasoning and 21st-century skills (MATHEF21)	Students' ratings of how confident they were about having to do a range of mathematical reasoning and 21st-century mathematics tasks (e.g., "Using the concept of statistical variation to make a decision"); 10 items with 4-response options ("Not at all confident" to "Very confident")	0.90
Mathematics Anxiety (ANXMAT)	Students' ratings of their agreement with 6 statements (e.g., "I often worry that it will be difficult for me in mathematics classes."); 4-response options ("Strongly agree" to "Strongly disagree")	0.92

(Continued)

Table 3. (Continued)

Construct (abbreviation)	Description	Reliability
Effort and Persistence in Mathematics (MATHPERS)	Students' ratings of how often they engaged in behaviours revealing effort and persistence in mathematics (e.g., "I put effort into my assignments for mathematics class."); 8 items with 5-response options ("Never or almost never" to "All or almost all of the time")	0.73
Perseverance (agreement) (PERSEVAGR)	Students' ratings of their agreement with 10 statements about a range of behaviours indicative of general perseverance (e.g., "I keep working on a task until it is finished"); 5-response options ("Strongly disagree" to "Strongly agree")	0.74
Item ST263Q04JA	"Some people are just not good at mathematics, no matter how hard they study"; 4-response options ("Strongly agree" to "Strongly disagree")	/
Perception of the school environment		
Sense of belonging (BELONG)	Students' ratings of their agreement with 6 statements (e.g., "I feel lonely at school."); 4-response options ("Strongly agree" to "Strongly disagree")	0.81
Being bullied (BULLIED)	Students' ratings of how often they had a range of experiences at school that are indicative of being bullied during the past 12 months (e.g., "Other students made fun of me."); 4-response options ("Never or almost never" to "Once a week or more")	0.85
Feeling safe (FEELSAFE)	Students' ratings of their agreement with 4 statements about their perceived safety (e.g., "I feel safe in my classrooms at school."); 4-response options ("Strongly agree" to "Strongly disagree")	0.92
School safety risks (SCHRISK)	Students' answers of whether a range of events indicative of safety risks at school occurred during the past four weeks (e.g., "Our school was vandalised."); 4 items had two response options ("Yes", "No")	0.69
Perception of the teacher, math subject and instruction		
Quality of student- teacher relationships (RELATST)	Students' ratings of their agreement with 8 statements (e.g., "The teachers at my school are respectful towards me"); 4-response options ("Strongly disagree" to "Strongly agree")	0.79
Mathematics Teacher Support (TEACHSUP)	Students' ratings of how often a range of situations occurred in their mathematics lessons (e.g., "The teacher shows an interest in every student's learning."); 4 items with 4-response options ("Every lesson" to "Never or almost never")	0.92
Preference of Math over other core subjects (MATHPREF)	This index captures students' relative preference for mathematics over Test Language and Science—index values 0 and 1.	/
Perception of Mathematics as easier than other subjects (MATHEASE)	This index captures students' relative easiness of mathematics compared to the Test Language and Science—index values 0 and 1.	/

Construct (abbreviation)	Description	Reliability
Motivation to do well in mathematics (MATHMOT)	This index captures students' relative motivation for mathematics compared to Test Language and Science—index values 0 and 1.	/
Disciplinary climate in mathematics (DISCLIM)	Students' ratings of how often a range of situations occurred in their mathematics lessons (e.g., "Students do not listen to what the teacher said."); 7 items with 4-response options ("Every lesson" to "Never or almost never").	0.86
Cognitive activation in mathematics: Foster reasoning (COGACRCO)	Students' ratings of how often their mathematics teacher showed behaviours indicative of fostering mathematics reasoning during the ongoing school year (e.g., "The teacher asked us to defend our answer to a mathematics problem."); 9 items with 5-response options ("Never or almost never" to "Every lesson or almost every lesson")	0.83
Cognitive activation in mathematics: Encourage mathematical thinking (COGACMCO)	Students' ratings of how often their mathematics teacher showed behaviours indicative of encouraging mathematical thinking during the ongoing school year (e.g., "The teacher encouraged us to 'think mathematically'"); 9 items included with 5-response options ("Never or almost never" to "Every lesson or almost every lesson")	0.92
Exposure to Formal and Applied Mathematics Tasks (EXPOFA)	Students' ratings of how often they had encountered a range of formal and applied mathematics tasks during their time at school (e.g., "Solving an equation like $2(x + 3) = (x + 3)(x - 3)$ "); 9 items with 4-response options ("Frequently" to "Never")	0.74
Exposure to Mathematical Reasoning and 21 st century mathematics tasks (EXPO21ST)	Students' ratings of how often they had encountered a range of different types of mathematics tasks related to mathematical reasoning and 21st-century mathematics tasks during their time at school (e.g., "Extracting mathematical information from diagrams, graphs, or simulations"); 10 items included in this scale had 4-response options ("Frequently" to "Never")	0.85
Subjective familiarity with mathematics concepts (FAMCON)	Students' ratings of how familiar they were with different mathematical concepts representative of different levels of mathematical skill or understanding (e.g., "Exponential function"); 10 items with 5-response options ("Never heard of it" to "Know it well, understand the concept")	0.74
Home Support		
Family support (FAMSUP)	Students' ratings of how often their parents or someone else in their family engaged in a range of behaviours indicative of family support (e.g., "Discuss how well you are doing at school"); 10 items with 5-response options ("Never or almost never" to "Every day or almost every day")	0.86

Analyses

Upon preliminary descriptive analyses in SPSS, principal analyses relied on latent profile analyses (LPA) in *Mplus* (Muthén & Muthén, 1998–2017), a type of latent variable mixture modelling technique that allows for testing the fit and significance of a certain number of types or latent profiles among individuals within a data set (Bergman & Trost, 2006; Collins & Lanza, 2010; Ferguson et al., 2020). The profiles were constructed based on the following four constructs related to their mathematical self-belief: mathematics anxiety (ANXMAT), mathematics self-efficacy—Formal and applied mathematics (MATHEFF) and 21st-century mathematics (MATHEF21), and proactive mathematics study behaviour (MATHPERS) were used in the analyses. All four constructs were continuous measures.

Models with two through nine latent classes ($k = 2-9$) were tested to reveal the number of profiles that emerged from the data. All models were initially estimated using 5,000 random start value sets with 100 iterations, and the 200 best solutions were retained for the final optimisation stage. The number of stat values and iterations increased with the complexity of the models tested. The cut-off for the entropy index (Ferguson et al., 2020; Geiser, 2013) and a combination of bootstrapped likelihood ratio test (BLRT), Vuong–Lo–Mendell–Rubin likelihood ratio test (VL-LRT), and the Lo–Mendell–Rubin adjusted LRT test (LMR), as suggested by Muthén and Asparouhov (2012), were considered when choosing the final solution. The final model was again validated using Geiser's (2013) recommendations on the use of the best log-likelihood value.

After the self-belief profiles were established, we compared the student distribution across the profiles, using the cross-tab option, to determine the prevalence of resilient students in the profiles, compared to non-resilient student categories (see Table 2 for categories description) to answer the first research question. Next, across the profiles, we examined differences in relative preference for the domain, the view of math being easier than other subjects, and the perception that everyone can learn mathematics to answer the second research question using the cross-tab option and R3Step for the dichotomous correlates (Asparouhov & Muthén, 2020). Finally, we investigated the differences between the examined profiles across selected aspects of the school, classroom and home environment to answer the third research question. We used the BCH method (Bolck et al., 2004) for the continuous correlates.

Results

The results section is divided into four major parts. The first part presents the results from the profile analyses. The next three sections follow the focus of each research question guiding this investigation.

Three self-belief profiles

Table 4 provides an overview of fit statistics for the profile solutions we examined ($k = 2 - 9$). Among them, statistically acceptable solutions can be found in the range of three to seven latent profiles. Yet, further inspection shows their different value from the perspective of interpretability and the quality of distinguished profiles.

Table 4. Overview of evaluated models

#No.	Log likelihood	#fp	AIC	BIC	SABIC	LMR	BLRT	VL-LRT	Entropy	Smallest class Frequency
2	-8450.976	13	16927.95	16996.48	16955.18	/	/	/	0.663	51.35%
3	-8005.961	18	16047.92	16142.8	16085.62	0	0	0	0.874	11.99%
4	-7868.84	23	15783.68	15904.91	15831.85	0	0	0	0.823	9.17%
5	-7805.519	28	15667.04	15814.63	15725.68	0	0	0	0.853	8.42%
6	-7739.496	33	15544.99	15718.94	15614.11	0	0	0	0.882	4.57%
7	-7682.49	38	15440.98	15641.28	15520.57	0.0002	0	0.0001	0.876	4.23%
8	7643.533	43	15373.07	15599.72	15463.12	0.0905	0	0.0855	0.88	1.77%
9	-7614.1	48	15324.2	15577.21	15424.73	0.7218	0.2381	0.718	0.867	1.79%

Note: #No=number of profiles; #fp =degrees of freedom; AIC = Akaike's Information Criterion; BIC = Bayesian information criterion; SABIC = Sample-size Adjusted BIC; LMR = Lo-Mendell-Rubin adjusted likelihood ratio test; BLRT = parametric Bootstrapped Likelihood Ratio Test; VL-LRT = Vuong-Lo-Mendell-Rubin likelihood ratio test. The selected model is highlighted.

Namely, solutions with five to seven profiles imitate the three-profile solution with no additional quality information about the observed student sample. Comparison of three- and four-profile solutions shows a slight drop in BIC/AIC values. However, the three-profile solution maintains higher entropy and classification probability values. Thus, we continued with further

analyses using the three-profile solution, which was also validated using Geiser’s (2013) recommendation of the best log-likelihood value repetition.

Figure 1 shows the three mathematical self-belief profiles and their characteristics regarding the four constructs constituting the profiles. The first distinguished profile gathers students with negative perceptions of their own mathematics self-efficacy concerning formal and applied mathematics and mathematical reasoning. Such a negative perception is coupled with a negative view of proactive mathematics study behaviour and high anxiety related to mathematics. Almost 12 per cent of students can be found in this profile, labelled as a *negative self-image* profile.

Just the opposite is the profile labelled as the *positive self-image* profile (24.4 per cent). These students report equally positive perceptions regarding diverse aspects of mathematics self-efficacy (i.e., mathematical reasoning and formal and applied mathematics). Students within this profile experience low math anxiety and also report proactive mathematics study behaviours concerning effort and persistence.

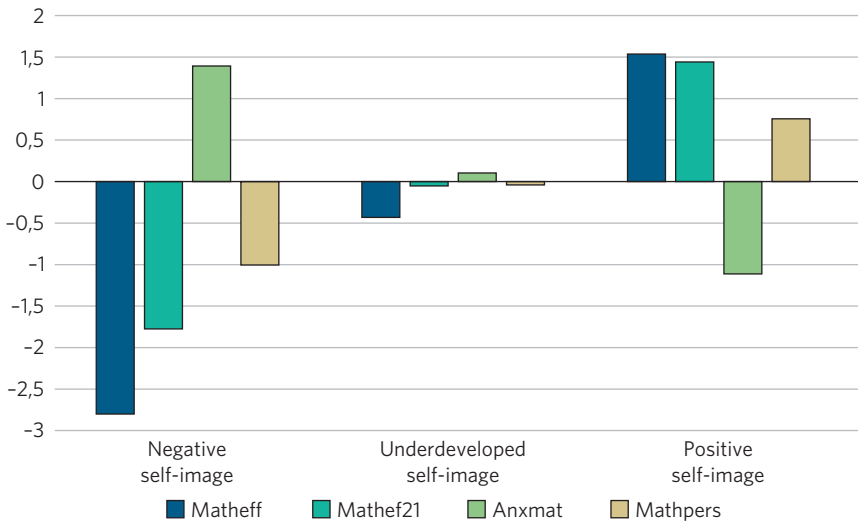


Figure 1. Overview of the three profiles
 Note: The Y-axis provides profiles of mean scores on each of the dimensions that entered LPA.

The majority of students (63.7 per cent) are placed in the profile labelled as “*underdeveloped*”. These students have a somewhat negative perception of their self-efficacy concerning formal and applied aspects of

mathematics. At the same time, their perceptions of perseverance in mathematics, mathematics anxiety, and self-efficacy concerning mathematical reasoning are not differentiated in positive or negative directions. Given the subject relatedness (i.e., mathematics), we can also argue that this is a group of students who might not be attached to mathematics as a subject and whose perceptions of efficacy, potential anxiety and efforts lay elsewhere.

Both boys and girls are equally represented in the *underdeveloped* profile. However, boys are significantly overrepresented in the *positive self-image* profile, and girls are overrepresented in the *negative self-image* profile ($\chi^2 = 49.989$, $df = 2$, $p < 0.001$).

Table 5. Gender and profile overview

	Negative self-image profile	Underdeveloped profile	Positive self-image profile
Girls			
% within profile	58.5%	49.8%	30.5%
Stand. residual	2.4	1.6	-4.3
Boys			
% within profile	41.5%	50.2%	69.5%
Stand. residual	-2.2	-1.5	4.0

Note: The absolute value of standardised residual above 1.96 is statistically significant.

Resilient and non-resilient student categories across the profiles

To investigate the characteristics of resilient students (RQ2), we examine if distinct belief patterns are more dominant in academically resilient students than other non-resilient categories (i.e., *failing under-risk* students, *low-achieving* students, and *non-risk achievers*) (Table 6). The negative self-image profile is more common among failing under-risk and low-achieving students compared to the other categories (i.e., standardised residual value is positive and statistically significant). The commonality of these two categories is their low achievement (see Table 2). Conversely, categories of students with high achievement, irrespective of their ESCS status, are strongly underrepresented in this profile (i.e., standardised residual value is negative and statistically significant).

Table 6. Student profiles and resilient and non-resilient student categories

	Negative self-image profile	Underdeveloped profile	Positive self-image profile
<i>Academically resilient</i>			
% category	1.6%	78.1%	20.3%
Stand. residual	-4.1	2.5	-1.1
<i>Failing under-risk</i>			
% category	28.1%	66.7%	5.1%
Stand. residual	10.2	0.8	-8.5
<i>Low achievers</i>			
% category	20.4%	70.8%	8.8%
Stand. residual	2.9	1.0	-3.7
<i>Non-risk achievers</i>			
% category	1.2%	55.8%	42.9%
Stand. residual	-7.8	-2.5	9.5
Total % profile within the sample	11.9%	63.7%	24.4%

Note: The absolute value of standardised residual above 1.96 is statistically significant. % cell represents % of students situated in the profile within the category (e.g., failing under-risk category).

At the same time, non-risk achievers are less frequent than expected in the *underdeveloped* profile and significantly more present in the *positive self-image* profile compared to all the other categories. While academically resilient students can be found in the *positive self-image* cluster, they are overrepresented in the *underdeveloped* profile ($\chi^2 = 382.245$, $df = 6$, $p < 0.001$).

Student profiles and self-beliefs about mathematics and mathematics ability

Across the profiles, there are no differences in the motivation to do well in mathematics (see Table 7). However, the *positive self-image* profile is more than two times more likely to prefer math over the other core subjects than the *Underdeveloped profile* and nearly three times more likely to perceive mathematics as easier than other subjects (i.e., reading and science).

The *positive self-image* profile retains the highest scores in perceiving one's own general perseverance (Table 8). Similarly, students in this profile are more likely to disagree with the idea that some people are just not good at mathematics, no matter how hard they study ($\chi^2 = 98.191$, $df = 6$, $p < 0.001$, see Table 8 for details).

Table 7. Odds-ratio being in a profile as a function of relative preference of mathematics, perception of math being easy and motivation to do well in mathematics

Student profiles	Preference of math over other core subjects Estimate (S.E.)	Perception of mathematics as easier than other subjects Estimate (S.E.)	Motivation to do well in mathematics Estimate (S.E.)
Negative self-image	0.140 (0.094)**	0.262 (0.141)*	0.687 (0.316)
Positive self-image	2.447 (0.418)**	2.959 (0.538)**	1.116 (0.325)

Note: Reference profile is the Underdeveloped; **p < 0.01, *p < 0.05; See Appendix 1 for a complete overview of the difference across the profiles.

Table 8. Student profiles and perception of growth mindset

	Negative self-image profile	Underdeveloped profile	Positive self-image profile
Strongly disagree			
% within profile	11.8%	11.7%	19.7%
Stand. residual	-0.6	-1.6	3.0
Disagree			
% within profile	16.8%	34.2%	38.2%
Stand. residual	-3.6	0.5	1.6
Agree			
% within profile	31.7%	39.6%	32.4%
Stand. residual	-1.1	1.3	-1.4
Strongly agree			
% within profile	39.8%	14.5%	9.8%
Stand. residual	7.4	-1.3	-3.0

Note: The absolute value of standardised residual above 1.96 is statistically significant.

Student profiles and classroom, school and home environment

Concerning the school environment, all three profiles perceive school safety risks to be low, among which the *positive self-image* profile scores lowest on this dimension (Table 9). The feeling of being safe is also strongly perceived in the *positive self-image*. An indication of being bullied is notable in the perception of the *negative self-image* profile, coupled with these students scoring lowest on the sense of belonging scale compared to the other two profiles. In parallel to the broader school community, the *negative self-image* profile also perceives family support as the lowest compared to the other two latent profiles. There are no notable differences in the perception

of family support between the *underdeveloped* and *positive self-image* clusters (see Appendix 1 for details).

Regarding the perception of the mathematics classroom and the teacher, the overall relationship with the teacher and math teacher support, particularly, is perceived to be lowest among the students within the *negative self-image* profile. Mathematics teacher support is also negatively perceived by students within the *underdeveloped* profile. The disciplinary climate in mathematics holds the lowest for the *negative self-image* profile.

Table 9. Students' profiles and mean values of self-beliefs about mathematics classroom, school and home

	Negative self-image profile M (S.E.)	Under- developed profile M (S.E.)	Positive self-image profile M (S.E.)
School environment			
Sense of belonging	-0.154 (0.091)	0.131 (0.039)	0.663 (0.071)
Being bullied	0.196 (0.126)	-0.316 (0.037)	-0.405 (0.055)
Feeling safe	-0.091 (0.098)	0.233 (0.035)	0.696 (0.049)
School safety risks	-0.120 (0.138)	-0.501 (0.049)	-0.483 (0.077)
Teacher and math classroom			
Quality of student-teacher relationships	-0.478 (0.122)	0.100 (0.036)	0.544 (0.068)
Mathematics teacher support	-0.811 (0.118)	-0.135 (0.036)	0.192 (0.067)
Cognitive activation in mathematics: Foster reasoning	-0.384 (0.116)	0.034 (0.034)	0.370 (0.060)
Cognitive activation in mathematics: Encourage mathematical thinking	-0.421 (0.107)	0.071 (0.032)	0.440 (0.058)
Exposure to formal and applied mathematics tasks	-0.171 (0.118)	0.075 (0.028)	0.226 (0.054)
Exposure to mathematical reasoning and 21st century mathematics tasks	-0.036 (0.130)	0.139 (0.032)	0.454 (0.057)
Disciplinary climate in mathematics	-0.443 (0.092)	-0.082 (0.028)	0.081 (0.046)
Subjective familiarity with mathematics concepts	-1.265 (0.140)	0.328 (0.040)	1.722 (0.087)
Perseverance (agreement)	-0.722 (0.104)	-0.181 (0.032)	0.641(0.069)
Family environment			
Family support	-0.404 (0.113)	-0.042 (0.035)	0.057 (0.054)

Note: See Appendix 1 for a complete overview of the difference across the profiles.

Focus on fostering reasoning and encouraging mathematical thinking, as an aspect of cognitive activation, is perceived positively among the students belonging to the *positive self-image* profile and negatively by those

belonging to the *negative self-image* profile. Similar results are found when observing values regarding students' perception of the exposure to formal and applied mathematics tasks and exposure to mathematical reasoning and 21st-century mathematics tasks. However, there are no statistically significant differences between the *negative self-image* and *underdeveloped* profile for the latter. Subjective familiarity with mathematics concepts is again lowest for the *negative self-image* profile.

Discussion

This chapter's primary focus was to investigate the dominant belief pattern of academically resilient students compared to the non-resilient categories (i.e., failing under-risk students, low-achieving students, and non-risk achievers). Grounded on the previous research on exploring personal characteristics supporting resilience and our particular sample, we expected mixed belief patterns, ranging from more to less optimal ones (Etherton et al., 2022; James et al., 2021; Mammarella et al., 2018; Martin & Marsh, 2006; Neumann et al., 2020; Putwain et al., 2013; Thorsen et al., 2021). The assumption was confirmed, yielding three profiles—*positive self-image*, *underdeveloped* and *negative self-image* profiles. At the same time, our assumption that academically resilient and non-risk achievers will be more present within the optimal belief pattern profiles was partially met, aligning with the results of Radišić and Pettersen (2020) who relied on a person-centred approach using TIMSS data while exploring students in Sweden and Norway. While currently observed constructs concerning latent profiles differed, the *positive self-image* profile had far more students belonging to the non-risk achievers than the resilient student category. This result was similar to earlier results from Radišić and Pettersen (2020) involving the math enthusiast profile. Present analyses also indicated that low achievement may be more detrimental in gathering students around a particular set of beliefs, given that failing under-risk and low-achieving student categories dominate the *negative self-image* profile, irrespective of their diverse ESCS background. At the same time, this profile gathers more girls, aligning with Cordero and Mateos-Romero's (2021) assumption that boys are more likely to be high achievers than girls, and here, we find more girls in a profile populated by students with low achievement.

Interestingly, our result yielded no differences between the profiles concerning their relative motivation for the subject. While this somewhat

contradicts the view on the role of different motivational constructs, the current result can also be attributed to how motivation was observed (i.e., the index captures students' relative motivation for mathematics compared to the subjects Norwegian Language Arts and Science). At the same time, relative preference for the domain and the perception of math being easier than other subjects was distinctive between the profiles aligning to previous work involving positive attitudes towards mathematics and self-regulation in general (Etherton et al., 2022; James et al., 2021; Martin & Marsh, 2006; Sandoval-Hernandez & Białowolski, 2016). If we observe this result from the perspective of categories dominating the *positive self-image* and *underdeveloped* profiles, non-risk achievers and resilient categories develop more favourable perceptions; that is, they have a higher preference for mathematics and see it as relatively easier compared to other domains, especially in the *positive self-image profile*. Similar results were obtained for students' general perseverance (Neumann et al., 2020; Thorsen et al., 2021) and perceptions of one's mathematical abilities (Yeager & Dweck, 2012), indicating that both low-achieving categories give up more easily on tasks and may associate failure with the idea that some people are just not good at mathematics, no matter how hard they try.

Perceptions of students belonging to the *positive self-image* and *underdeveloped* profiles are more positive than those of students found in the *negative self-image* profile. Consistently, students found in the *positive self-image* profile report a higher perception of family support compared to other profiles (James et al., 2021; Whitten & Weaver, 2010), not being exposed to bullying or a positive sense of belonging to the school environment (Donolato et al., 2020; Kalender, 2015; Lipscomb et al., 2021). Again, when we observe profile composition, this puts students from the low achievers and failing under-risk category in a less favourable position than the resilient and non-risk categories. The latter is prone to seeing the school environment as safer and a place to connect and, at the same time, can gain more support at home, especially the non-risk achievers. Across all profiles, school safety risks are not perceived, which aligns with earlier results for Norway (Radišić & Pettersen, 2020), highlighting the importance of school characteristics and structures (Borman & Overman, 2004; Cordero & Mateos-Romero, 2021). Nonetheless, compared to other profiles, students with a *negative self-image* profile still report some experience with bullying and a lower sense of belonging, which are again more likely to be students from the low-achieving categories.

Furthermore, students with a *negative self-image* profile maintain the lowest scores concerning student–teacher relations and math–teacher support (Doll, 2013; Doll et al., 2004; Eisenber et al., 2003; Langenkamp, 2010; Lessard et al., 2014), again putting low-achieving categories more at risk. The latter is also somewhat indicative of the *underdeveloped* profile, but to a lesser extent than the *negative self-image* profile, and may be connected to the somewhat detached self-belief set these students have concerning mathematics. The fact that the resilient category is highly present in the *underdeveloped* profile creates a space for deliberation on how these students can be further supported in math class on their path to optimal results.

Different aspects of cognitive activation related to fostering reasoning or encouraging mathematical thinking, subject familiarity and exposure to various types of content are perceived as highest among the students with a *positive self-image* profile (Alivernini et al., 2016; Chirkina et al., 2020; Cordero & Mateos-Romero, 2021) or in the context of a dominant category saturating this profile, non-risk achievers are more likely to develop such positive perceptions. Low-achieving categories, saturating the *negative self-image* profile, are more likely to develop just the opposite view.

If we attempt to map out the current results, we can see that the biggest cluster in the sample are the students with an *underdeveloped* profile and that academically resilient students mainly saturate this profile compared to others. A distinctive feature of the profile seems to be a lack of either strongly negative or positive perceptions of mathematics. Math can simply be the subject one needs to grapple with, while one's interest may be elsewhere. At the same time, mathematics as a subject is still considered relatively easier than other domains (i.e., language and science). Thus, working with the students in this group on not necessarily liking mathematics but rather developing positive competence beliefs may further strengthen the adaptive barrier of academically resilient students (Martin & Marsh, 2006; Masten, 2018; Sandoval-Hernandez & Białowolski, 2016).

Similarly, the most vulnerable group is low-achieving students with a *negative self-image* profile, who do not seem to have developed any support system either at home or school. Girls are also more prominent in this profile (Cordero & Mateos-Romero, 2021). Considering the importance of decreasing girls dropping out of STEM tracks, addressing the needs of this profile is important. Although this is the smallest profile among the three we described in this chapter (i.e., 12 per cent of students), assuming an

average classroom has 25 students, there are potentially three girls in each who may decide not to participate in occupations involving mathematics; precisely a trend policymakers attempt to avoid.

Limitations and further research

While ILSAs allow for more robust samples, one significant limitation is that this investigation is still performed on cross-sectional data. Thus, we cannot observe the stability of the distinguished profiles and whether targeted interventions could shift students from the *negative self-image* profile towards the *underdeveloped* or *positive self-image* profile. Similar issues could be reasoned regarding the possible shift between the two other profiles. The second limitation concerns the choice of variables observed, which is, to an extent, limited by constructs available within PISA 2022. Thus, a similar investigation on different sets of constructs might yield somewhat different results. Nevertheless, the current investigation contributes to a deeper understanding of academically resilient students and students who fail or excel, irrespective of their background and extends our views of potentially supportive environments each of the student categories may need.

Concluding remarks

With non-cognitive learning outcomes (e.g., self-efficacy, motivation, academic emotions, perseverance) being more and more the focus of research and policy, seen as tools that allow students to persist on their path to education, our aim was also to look beyond the most common divide between resilient and non-resilient students and go for a more nuanced understanding of these diverse student categories (Sattler & Gershoff, 2019). Our results show that low achievement may be more detrimental in gathering students with less-than-optimal beliefs about mathematics (i.e., *negative self-image* profile), which are further fuelled by negative perceptions of the immediate surroundings at school, the classroom and home. In addition, having the vast majority of students situated within the *underdeveloped* profiles calls upon and creates an opportunity for dedicated work on developing more optimal beliefs about mathematics as a subject among the students who are yet to decide what they wish to do as they grow up. At the same time, we do not expect all students to have a naturally developed

interest in STEM or, in this case, mathematics. Yet situating mathematical competence as one of the key skills needed in life may help those who struggle, i.e., have either negative or undeveloped perceptions related to math, to connect math to other domains relevant to them and learn to see how math can be applicable outside of the mathematical world even to them. In some cases, this may be a more critical pedagogical lesson than mastering particular concepts in math.

Author biographies

Jelena Radišić has been a researcher at the Department of Teacher Education and School Research at the University of Oslo since 2016. Her work is situated in the areas of research on student, teacher, and school characteristics affecting student outcomes. She investigates the topics of motivation for learning, mathematics self-beliefs and academic emotions, coupled with teacher beliefs and practices and their impact on student learning. In her work, Radišić employs a variety of different approaches constitutive to quantitative, qualitative, and mixed methods research.

Andreas Pettersen is a researcher at the Department of Teacher Education and School Research (ILS) at the University of Oslo. He holds a PhD in mathematics education and has been working with the PISA survey since 2017. Pettersen has published several articles in mathematics education and has been the editor of the book *Equity, Equality and Diversity in the Nordic Model of Education* (2020).

References

- Abelev, M. S. (2009). Advancing out of poverty: Social class worldview and its relation to resilience. *Journal of Adolescent Research*, 24(1), 114–141. <https://doi-org.ezproxy.uio.no/10.1177/0743558408328441>
- Agasisti, T., Avvisati, F., Borgonovi, F., & Longobardi, S. (2018). Academic resilience: What schools and countries do to help disadvantaged students succeed in PISA. *OECD Education Working Papers*, No. 167. OECD Publishing. <https://doi-org.ezproxy.uio.no/10.1787/e22490ac-en>
- Alivernini, F., Manganelli, S., & Lucidi, F. (2016). The last shall be the first: Competencies, equity and the power of resilience in the Italian school system. *Learning and Individual Differences*, 51, 19–28. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2016.08.010>
- Asparouhov, T., & Muthén, B. (2020). Auxiliary variables in mixture modeling: Using the BCH method in Mplus to estimate a distal outcome model and an arbitrary secondary model (*Mplus Web Notes: No. 21, Version 8*). Mplus. <https://www.statmodel.com/examples/webnotes/webnote21.pdf>

- Avvisati, F., & Givord, P. (2023). The learning gain over one school year among 15-year-olds: An international comparison based on PISA. *Labour Economics*, *84*. <https://doi.org/10.1016/j.labeco.2023.102365>
- Bergman, L. R., & Trost, K. (2006). The person-oriented versus the variable-oriented approach: Are they complementary, opposites, or exploring different worlds? *Merrill-Palmer Quarterly*, *52*(3), 601–632. <https://doi-org.ezproxy.uio.no/10.1353/mpq.2006.0023>
- Bolck, A., Croon, M., & Hagenaars, J. (2004). Estimating latent structure models with categorical variables: One-step versus three-step estimators. *Political Analysis*, *12*, 3–27. <https://doi.org/10.1093/pan/mp01>
- Borman, G. D., & Dowling, M. (2010). Schools and inequality: A multilevel analysis of Coleman's equality of educational opportunity data. *Teachers College Record*, *112*(5), 1201–1246. <https://doi-org.ezproxy.uio.no/10.1177/016146811011200507>
- Bronfenbrenner, U., & Morris, P. A. (2006). The bioecological model of human development. In W. Damon & R. M. Lerner (Eds.), *Handbook of child psychology: Vol. 1. Theoretical models of human development* (6th ed., pp. 793–828). Wiley.
- Chirkina, T., Khavenson, T., Pinskaya, M., & Zvyagintsev, R. (2020). Factors of student resilience obtained from TIMSS and PISA longitudinal studies. *Issues in Educational Research*, *30*(4), 1245–1263.
- Collins, L. M., & Lanza, S. T. (2010). *Latent class and latent transition analysis: With applications in the social, behavioral, and health sciences*. John Wiley & Sons.
- Cordero, J. M., & Mateos-Romero, L. (2021). Exploring factors related with resilience in primary education: Evidence from European countries. *Studies in Educational Evaluation*, *70*. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2021.101045>
- Doll, B., Zucker, S., & Brehm, K. (2004). *Resilient classrooms: Creating healthy environments for learning*. Guilford Publications.
- Doll, B. (2013). Enhancing resilience in classrooms. In S. Goldstein & R. B. Brooks (Eds.), *Handbook of resilience in children* (2nd ed., pp. 399–409). Springer Science + Business Media. https://doi-org.ezproxy.uio.no/10.1007/978-1-4614-3661-4_23
- Donolato, E., Toffalini, E., Giofrè, D., Caviola, S., & Mammarella, I. C. (2020). Going beyond mathematics anxiety in primary and middle school students: The role of ego-resiliency in mathematics. *Mind, Brain, and Education*, *14*(3), 255–266. <https://doi.org/10.1111/mbe.12251>
- Eisenberg, N., Valiente, C., Fabes, R. A., Smith, C. L., Reiser, M., Shepard, S. A., Losoya, S. H., Guthrie, I. K., Murphy, B. C., & Cumberland, A. J. (2003). The relations of effortful control and ego control to children's resiliency and social functioning. *Developmental Psychology*, *39*(4), 761–776. <https://doi-org.ezproxy.uio.no/10.1037/0012-1649.39.4.761>
- Etherton, K., Steele-Johnson, D., Salvano, K., & Kovacs, N. (2022). Resilience effects on student performance and well-being: The role of self-efficacy, self-set goals, and anxiety. *The Journal of General Psychology*, *149*(3), 279–298. <https://doi.org/10.1080/00221309.2020.18358000>
- Ferguson, S. L., G. Moore, E. W., & Hull, D. M. (2020). Finding latent groups in observed data: A primer on latent profile analysis in Mplus for applied researchers. *International Journal of Behavioural Development*, *44*(5), 458–468. <https://doi.org/10.1177/0165025419881721>
- Frempong, G., Visser, M., Feza, N., Winnar, L., & Nuamah, S. (2016). Resilient learners in schools serving poor communities. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *14*(2), 352–367. <https://doi.org/10.14204/ejrep.39.15038>
- Geiser, C. (2013). *Data analysis with Mplus*. Guilford Press.
- Hernandez-Martinez, P., & Williams, J. (2013). Against the odds: Resilience in mathematics students in transition. *British Educational Research Journal*, *39*(1), 45–59. <http://www.jstor.org/stable/24464801>
- Holliday, M., Cimetta, A., Cutshaw, C., Yaden, D., & Marx, R. (2014). Protective factors for school readiness among children in poverty. *Journal of Education for Students Placed at Risk (JESPAR)*, *19*(3–4), 125–147. <https://doi.org/10.1080/10824669.2014.971692>

- James, C., Wandix White, D., Waxman, H., Rivera, H., & Harmon, W. (2021). Remixing resilience: A critical examination of urban middle school learning environments among resilient African American learners. *Urban Education, 57*(3), 432–462. <https://doi.org/10.1177/0042085921991632>
- Jensen, F., Pettersen, A., Frønes, T. S., Eriksen, A., Løvgren, M. & Narvhus, E. K. (2023). *PISA 2022. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing* [PISA 2022. Norwegian students' competence in mathematics, science and reading]. Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/noasp.205>
- Kalender, İ. (2015). An analysis of the profile of resilient students based on PISA 2012. *Journal of Measurement and Evaluation in Education and Psychology, 6*(1), 158–172. <https://doi.org/10.21031/epod.16925>
- Kiswarday, V. (2012). Empowering resilience within the school context. *Methodological Horizons, 7*(1), 93–103. <https://doi.org/10.32728/mo.07.1.2012.07>
- Langenkamp, A. G. (2010). Academic vulnerability and resilience during the transition to high school: The role of social relationships and district context. *Sociology of Education, 83*(1), 1–19. <https://doi.org/10.1177/0038040709356563>
- Lessard, A., Butler-Kisber, L., Fortin, L., & Marcotte, D. (2014). Analyzing the discourse of dropouts and resilient students. *The Journal of Educational Research, 107*(2), 103–110. <https://doi-org.ezproxy.uio.no/10.1080/00220671.2012.753857>
- Lipscomb, S., Hatfield, B., Lewis, H., Goka-Dubose, E., & Abshire, C. (2021). Adverse childhood experiences and children's development in early care and education programs. *Journal of Applied Developmental Psychology, 72*, 101218. <https://doi.org/10.1016/j.appdev.2020.101218>
- Mammarella, I. C., Donolato, E., Caviola, S., & Giofrè, D. (2018). Anxiety profiles and protective factors: A latent profile analysis in children. *Personality and Individual Differences, 124*, 201–208. <https://doi.org/10.1016/j.paid.2017.12.017>
- Martin, A. J., & Marsh, H. W. (2006). Academic resilience and its psychological and educational correlates: A construct validity approach. *Psychology in the Schools, 43*(3), 267–281. <https://doi-org.ezproxy.uio.no/10.1002/pits.20149>
- Martin, A. J., & Marsh, H. W. (2008). Academic buoyancy: Towards an understanding of students' everyday academic resilience. *Journal of School Psychology, 46*, 53–83. <https://doi.org/10.1016/j.jsp.2007.01.002>
- Masten, A. S. (2001). Ordinary magic: Resilience processes in development. *American Psychologist, 56*, 227–238. <https://doi-org.ezproxy.uio.no/10.1037//0003-066X.56.3.227>
- Masten, A. S. (2018). Resilience theory and research on children and families: Past, present, and promise. *Journal of Family Theory & Review, 10*(1), 12–31. <https://doi-org.ezproxy.uio.no/10.1111/jftr.12255>
- Muthén, L. K., & Muthén, B. (1998–2017). *Mplus user's guide: Statistical analysis with latent variables*. Wiley.
- Muthen, B., & Asparouhov, T. (2012). Using Mplus TECH11 and TECH14 to test the number of latent classes. <https://www.statmodel.com/examples/webnotes/webnote14.pdf>
- Nearchou, F. A., Stogiannidou, A., & Kiosseoglou, G. (2014). Adaptation and psychometric evaluation of a resilience measure in Greek elementary school students. *Psychology in the Schools, 51*(1), 58–71. <https://doi.org/10.1002/pits.21732>
- Neumann, I., Jeschke, C., & Heinze, A. (2020). First year students' resilience to cope with mathematics exercises in the university mathematics studies. *Journal für Mathematik-Didaktik, 42*(2), 307–333. <https://doi.org/10.1007/s13138-020-00177-w>
- OECD. (2011). Defining and characterising student resilience in PISA. In *Against the odds: Disadvantaged students who succeed in school*. OECD Publishing. <https://doi-org.ezproxy.uio.no/10.1787/9789264090873-4-en>
- OECD. (2018). *Equity in education: Breaking down barriers to social mobility*. OECD Publishing. <https://doi-org.ezproxy.uio.no/10.1787/19963777>

- OECD. (2019), *PISA 2018 results (Volume II): Where all students can succeed*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/b5fd1b8f-en>
- OECD. (2023a), Data management procedures. In *PISA 2022 Technical Report* (pp. 255–279). OECD Publishing.
- OECD. (2023b), *PISA 2022 results (Volume I): The state of learning and equity in education*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- Putwain, D. W., Nicholson, L. J., Connors, L., & Woods, K. (2013). Resilient children are less test anxious and perform better in tests at the end of primary schooling. *Learning and Individual Differences*, 28, 41–46. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2013.09.010>
- Radišić, J., & Pettersen, A. (2020). Resilient and nonresilient students in Sweden and Norway – investigating the interplay between their self-beliefs and the school environment. In T. S. Frønes, A. Pettersen, J. Radišić, & N. Buchholtz (Eds.), *Equity, equality and diversity in the Nordic model of education* (pp. 273–304). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61648-9_11
- Rudd, G., Meissel, K., & Meyer, H., (2021). Measuring academic resilience in quantitative research: A systematic review of the literature. *Educational Research Review*, 34. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2021.100402>
- Rutter, M. (2006). Implications of resilience concepts for scientific understanding. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1094, 1–12. <https://doi.org/10.1196/annals.1376.002>
- Rutter, M. (2012). Resilience as a dynamic concept. *Development and Psychopathology*, 24(2), 335–344. <https://doi.org/10.1017/S0954579412000028>
- Sandoval-Hernández, A., & Białowolski, P. (2016). Factors and conditions promoting academic resilience: A TIMSS-based analysis of five Asian education systems. *Asia Pacific Education Review*, 17(3), 511–520. <https://doi-org.ezproxy.uio.no/10.1007/s12564-016-9447-4>
- Sattler, K., & Gershoff, E. (2019). Thresholds of resilience and within- and cross-domain academic achievement among children in poverty. *Early Childhood Research Quarterly*, 46, 87–96. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2018.04.003>
- Siebecke, D. E., & Jarl, M. (2022). Does the material well-being at schools successfully compensate for socioeconomic disadvantages? Analysis of resilient schools in Sweden. *Large-Scale Assessments in Education*, 10(1), 11. <https://doi.org/10.1186/s40536-022-00130-y>
- Teig, N. (2023). *Embracing teachers' role in promoting equity in the classroom: Global patterns and evidence of academic resilience from 58 countries*. Paper commissioned as part of the GEM Report Fellowship Programme in 2022. https://www.unesco.org/gem-report/sites/default/files/medias/fichiers/2023/09/Nani_Teig.pdf
- Thorsen, C., Yang Hansen, K., & Johansson, S. (2021). The mechanisms of interest and perseverance in predicting achievement among academically resilient and non-resilient students: Evidence from Swedish longitudinal data. *British Journal Educational Psychology*, 91(4), 1481–1497. <https://doi.org/10.1111/bjep.12431>
- Ungar, M., Connelly, G., Liebenberg, L., & Theron, L. (2019). How schools enhance the development of young people's resilience. *Social Indicators Research*, 145(2), 615–627. <https://doi-org.ezproxy.uio.no/10.1007/s11205-017-1728-8>
- Whitten, K., & Weaver, S. (2010). Adoptive family relationships and healthy adolescent development: A risk and resilience analysis. *Adoption Quarterly*, 13(3–4), 209–226. <https://doi.org/10.1080/10926755.2010.524873>
- Xenofontos, C., & Mouroutsou, S. (2023). *Resilience in mathematics education research: A systematic review of empirical studies*. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 67(7), 1041–1055. <https://doi.org/10.1080/00313831.2022.2115132>
- Xie, C., & Ma, Y. (2019). The mediating role of cultural capital in the relationship between socioeconomic status and student achievement in 14 economies. *British Educational Research Journal*, 45, 838–855. <https://doi.org/10.1002/berj.3528>
- Yeager, D. S., & Dweck, C. S. (2012). Mindsets that promote resilience: When students believe that personal characteristics can be developed. *Educational Psychologist*, 47(4), 302–314. <https://doi-org.ezproxy.uio.no/10.1080/00461520.2012.722805>

Appendix 1

Overview of the differences between student profiles relative to mathematics classroom, school and home

	Negative self-image profile vs Underdeveloped profile	Negative self-image profile vs Positive self-image profile	Underdeveloped profile vs Positive self-image profile
Sense of belonging	0.005	0.000	0.000
Being bullied	0.000	0.000	0.199
Feeling safe	0.002	0.000	0.000
School safety risks	0.011	0.021	0.855
Quality of student-teacher relationships	0.000	0.000	0.000
Mathematics teacher support	0.000	0.000	0.000
Cognitive activation in mathematics: Foster reasoning	0.001	0.000	0.000
Cognitive activation in mathematics: Encourage mathematical thinking	0.000	0.000	0.000
Exposure to formal and applied mathematics tasks	0.047	0.002	0.017
Exposure to mathematical reasoning and 21st century mathematics tasks	0.199	0.001	0.000
Disciplinary climate in mathematics	0.000	0.000	0.004
Subjective familiarity with mathematics concepts	0.000	0.000	0.000
Perseverance (agreement)	0.000	0.000	0.000
Family support	0.003	0.000	0.144
Preference of math over other core subjects	0.003	0.000	0.000
Perception of mathematics as easier than other subjects	0.013	0.000	0.000
Motivation to do well in mathematics	0.415	0.317	0.707

Note: The table provides an overview of p values associated with each difference when comparing the profiles. If the p-value is in bold print, the difference is significant ($p < 0.01$ or $p < 0.05$).

KAPITTEL 10

Avsluttende bemerkninger

Andreas Pettersen Universitetet i Oslo

Fredrik Jensen Universitetet i Oslo

I læreplanens overordnede del kan vi lese at «matematikk skal forberede elevene på et samfunn og arbeidsliv i utvikling» og at kritisk tenkning i matematikk kan «ruste elevene til å gjøre egne valg og ta stilling til viktige spørsmål i sitt eget liv og i samfunnet» (Kunnskapsdepartementet, 2017). Hensikten med matematikkfaget er altså å sørge for at *alle* elever tilegner seg den matematiske kompetansen som ansees som viktig med tanke på videre utdanning og arbeidsliv. I tillegg har vi som samfunn et behov for høy matematisk kompetanse i deler av befolkningen for å kunne løse mange av de store utfordringene vi står overfor blant annet innenfor energi og klima. Matematikkresultatene fra PISA 2022 tegner et nedslående bilde av hvilke kunnskaper, ferdigheter og holdninger norske elever sitter igjen med etter ti år med matematikk i skolen. Tilbakegangen i gjennomsnittsresultater i matematikk for norske 15-åring er større enn i de fleste andre land, og det er en stor økning i andelen lavtpresterende elever. Dette kan tyde på at vi i mindre grad enn tidligere lykkes med å legge til rette for at alle elever utvikler den matematiske kompetansen som er nødvendig.

Resultatene fra PISA 2022 viser også en betydelig nedgang i andelen høytpresterende elever (Jensen et al., 2023). I tillegg kan vi stadig lese om manglende rekruttering til realfaglige yrker og utdanning (Stølen et al., 2023), samtidig som vi allerede nå har et stort udekket behov av arbeidstakere med utdanning som krever matematisk kompetanse (Furholt & Børing, 2024). For at flere unge skal velge realfaglige utdanninger og yrkesretninger, trenger vi at barn og unge interesserer seg og er motiverte for å arbeide med matematikk og realfag. Også her er resultatene nedslående. Svært mange

norske elever rapporterer om negative følelser og holdninger til matematikk, og norske elever rapporterer i større grad om matematikkangst enn elever i de andre nordiske landene (Jensen et al., 2023).

Siden PISA 2022 ble gjennomført av et «koronakull», rett i etterkant av at samfunnet gjenåpnet, er det betimelig å spørre om i hvor stor grad disse resultatene er farget av covid-19-pandemien. Det er lov å håpe at 2022 er et unntaksår, og at framtidige undersøkelser tegner et noe mer positivt bilde av norske elevers matematiske kompetanse og holdninger til matematikk enn resultatene fra PISA 2022 viser. Samtidig har det også før PISA 2022 vært uttrykt i realfagsstrategier og meldinger til Stortinget at det er viktig å redusere den store andelen elever som går ut av 10. trinn med svært begrensede kunnskaper og ferdigheter i matematikk (Pettersen et al., 2024, kapittel 2 i denne boka). I tillegg har negative følelser og holdninger til matematikkfaget vært en stor utfordring også lenge før pandemien, illustrert gjennom Johan Sverdrups tale i Stortingssalen i 1896 (gjengitt av Pettersen & Jensen, 2024, kapittel 1 i denne boka). Lederen av matematikk-senteret, Kjersti Wæge, er heller ikke overrasket over de svake resultatene i PISA 2022 og mener at matematikkfaget har blitt nedprioritert de siste årene (Krogslud, 2023).

Like muligheter til å oppnå matematisk kompetanse

Tanken om at alle elever skal ha like muligheter til å lykkes, er dypt forankret i den norske skolen (Kunnskapsdepartementet, 2017). PISA og andre internasjonale undersøkelser kan brukes til å sammenlikne resultater på tvers av elevgrupper og egner seg derfor til å undersøke spørsmål knyttet til likeverd. I hvilken grad elever har like muligheter til å tilegne seg matematisk kompetanse, er et av hovedtemaene i denne boka, der flere av kapitlene viser til resultater som vitner om at det finnes utfordringer på dette området.

Det er ikke et mål at alle skal bli eksperter i matematikk, men matematikkfaget må gi alle den matematiske kompetansen de trenger for å kunne håndtere utfordringene som vil møte dem senere i livet. Dette handler blant annet om å kunne ta velbegrunnede valg når det kommer til økonomiske spørsmål, utdanning og helse, forstå samfunnsspørsmål og være i stand til å reflektere over og tenke kritisk rundt matematiske framstillinger og andres bruk av matematikk. I PISA er mestringsnivå 2 vurdert til å tilsvare

en slik minimumskompetanse, og det er derfor en bekymring at såpass mange norske elever presterer under nivå 2 i PISA 2022. Jensen og Nilsen (2024, kapittel 8 i denne boka) undersøker denne gruppa av lavtpresterende elever nærmere. Her vises det til kjennetegn som lavere gjennomsnittlig sosioøkonomisk status (SØS), en større andel elever med innvandrerbakgrunn og at det er litt flere gutter enn jenter blant de lavtpresterende elevene. Sammenliknet med elevene som presterer på nivå 2 og over, rapporterer de lavtpresterende elevene om lavere mestringsforventning og utholdenhet samt mer matematikkangst. De lavtpresterende elevene rapporterer også om noe lavere grad av tilhørighet til skolen og at de opplever læringsmiljøet som litt dårligere. Pettersen et al. (2024, kapittel 2 i denne boka) diskuterer noen av konsekvensene av at det er flere elever under nivå 2 i matematikk. En konsekvens er at det vil være mer krevende å undervise i matematikkfaget når flere elever mangler grunnleggende kunnskaper og ferdigheter. Når vi vet at mange av disse elevene også har lave mestringsforventninger, negative følelser knyttet til faget og at de trives mindre på skolen enn andre elever, blir utfordringen med å løfte disse elevene enda større.

Det er en klar sammenheng mellom elevenes hjemmebakgrunn og faglige prestasjoner. Selv om denne sammenhengen er svakere i Norge enn i de fleste andre land, viser resultatene fra PISA-undersøkelsen at forskjellen i prestasjoner mellom elever med lav og høy SØS har økt de siste 10–15 årene (Jensen et al., 2023). Nilsen og Pettersen (2024, kapittel 6 i denne boka) viser at skolens elevsammensetning, ut fra elevenes SØS, har en sammenheng med hvordan elevene opplever matematikkundervisningen. På skoler hvor elevene har høyere SØS, rapporterer elevene om bedre klasseledelse og mer støttende undervisning enn på skoler med lavere SØS blant elevene. Siden klasseledelse og støttende undervisning henger sammen med elevenes prestasjoner, vil det også bidra til å styrke forskjeller mellom elever og elevgrupper på tvers av skoler.

Det finnes også elever som presterer på høyt nivå selv om de har lav SØS. Disse elevene omtales som resiliente. Radišić og Pettersen (2024, kapittel 9 i denne boka) undersøker denne elevgruppa nærmere. Resultatene viser at resiliente elever i Norge har høyere grad av mestringsforventning og mer positive følelser og holdninger enn lavtpresterende elever med både høy og lav SØS. Imidlertid har resiliente elever lavere grad av mestringsforventning og mindre positive følelser og holdninger til matematikk enn gruppa med høytpresterende elever med høy SØS.

Selv om gruppa med resiliente elever presterer godt i matematikk, har de altså ikke utviklet like positive holdninger og følelser for faget, eller like stor tro på sin egen matematiske kompetanse, som høytpresterende elever med høy SØS.

Fagdidaktiske betraktninger knyttet til resultatene i boka

Et annet hovedtema for boka er det faglige innholdet i matematikkfaget i skolen. Et viktig spørsmål er hvorvidt den matematiske kompetansen som måles i PISA-undersøkelsen, er relevant for norsk skole. Pettersen (2024, kapittel 3 i denne boka) konkluderer med at matematikken som beskrives i rammeverket for PISA 2022, er svært relevant for den norske læreplanen i matematikk, men at det samtidig er noen sider ved matematikkfaget som ikke er en del av PISA-rammeverket. Videre ser vi at både PISA-rammeverket og læreplanen har store likhetstrekk med KOM-rammeverket. Dette innflytelsesrike rammeverket beskriver hva det vil si å mestre matematikk, og det er mye brukt i forskningslitteraturen (Niss et al., 2017). Pettersen (2024, kapittel 3 i denne boka) viser også til at noen av endringene i den nye læreplanen, som innføringen av kjerneelementer, legger til rette for en tydeligere progresjon og sammenheng i matematikkfaget, både på tvers av årstrinn (vertikalt) og matematiske temaer (horisontalt). Vi kan si at LK20 representerer et «forskningsbasert» syn på matematisk kompetanse, og at PISA-resultatene gir relevant informasjon om norske elevers matematiske kompetanse.

Det er derimot ikke læreplanen, men matematikkundervisningen som legger til rette for at elevene skal utvikle sin matematiske kompetanse. For at det faglige innholdet i kjerneelementene skal prege undervisningen og styrke sammenhengene og progresjonen i faget, må matematikklærere «omfavne» disse ideene og sørge for at de utgjør en sentral del av undervisningen. Dette er enklere sagt enn gjort. Læreplanen, og særlig kjerneelementene, består av tunge faglige begreper, som problemløsning, resonnering, modellering og abstraksjon, uten tydelige beskrivelser eller forklaringer på hva dette er eller hvordan det skal undervises. Kapitlene om matematisk modellering (Berget et al., 2024, kapittel 4 i denne boka) og resonnering og argumentasjon (Senneset & Pettersen, 2024, kapittel 5 i denne boka) har en didaktisk vinkling hvor det legges vekt på å beskrive hva som ligger i disse begrepene, og hvordan de kan inngå i undervisningen.

Forskning har vist at matematisk modellering, og særlig den første delen av modelleringsprosessen hvor elevene skal sette seg inn i og forstå et problem fra virkeligheten og omforme det til et matematisk problem, er krevende for elever. Berget et al. (2024, kapittel 4 i denne boka) viser at det er noen deler av modelleringsprosessen, som å gjøre forenklinger og bestemme forutsetninger, som er utelatt fra PISA-oppgavene. Dette er ikke unikt for PISA-undersøkelsen. Studier har vist at oppgaver i lærebøker og på eksamen, både i Norge og andre land, ofte mangler utfordringer fra den første delen av modelleringsprosessen (Berget, 2022; Frejd, 2011; Gatabi et al., 2012; Jessen & Kjeldsen, 2021; Urhan & Dost, 2018). Berget et al. (2024, kapittel 4 i denne boka) framhever viktigheten av at elevene også møter disse utfordringene i undervisningen for å ha mulighet til å utvikle en helhetlig modelleringskompetanse.

Resultatene fra PISA 2022 viser at det også er krevende for elevene å legge fram skriftlige argumenter når de skal begrunne svarene på matematikkoppgaver. For å legge fram et gyldig skriftlig argument, trenger elevene matematiske kunnskaper og ferdigheter, de må kunne formulere seg klart og presist med et matematisk språk, og de må også vite hva et gyldig argument er. Senneset og Pettersen (2024, kapittel 5 i denne boka) finner, basert på analyser av elevenes besvarelser på tre PISA-oppgaver, at det er svært få elever som skriver gyldige argumenter og analysene av elevsvarene tyder på at det er relativt få norske tiendeklassinger som mestrer alt dette.

Implementeringen av kjerneelementene i matematikkfaget avhenger også av at elevenes tilegnelse av disse kan vurderes. Dette er viktig både for å kunne måle elevenes kompetanse (summativ vurdering) og for å kunne fremme læring og tilpasse undervisningen (formativ vurdering). Selv om kjerneelementene inngår som en viktig del av både PISA og eksamen, er det noen utfordringer og begrensninger når det kommer til å bruke denne typen prøver til å måle hvorvidt elevene har utviklet kompetansene som inngår i kjerneelementene. Berget et al. (2024, kapittel 4 i denne boka) og Senneset og Pettersen (2024, kapittel 5 i denne boka) peker på noen av disse utfordringene når det kommer til vurdering av elevenes kompetanse innenfor modellering og argumentasjon. Det er derfor viktig at det ikke er oppgaver fra denne typen standardiserte prøver som preger matematikkundervisningen, men at elevene møter på oppgaver som er utviklet for å fremme, og ikke måle, læring og som involverer kjerneelementene og kompetansene som inngår i disse i sin helhet. Fra et formativt perspektiv, er det også viktig at lærere kan gjenkjenne i hvilken grad elevene har

utviklet de kompetansene som er beskrevet innenfor kjerneelementene, slik at de kan gi konstruktive tilbakemeldinger som fremmer elevenes læring. Berget et al. (2024, kapittel 4 i denne boka) utviklet et analyseskjema som kan være et nyttig verktøy for lærere for å reflektere over og være bevisst på noen av utfordringene knyttet til matematisk modellering. Senneset og Pettersen (2024, kapittel 5 i denne boka) peker på at det å diskutere ulike begrunnelser og argumenter med elevene, slik at de får kunnskap om og blir bevisste på hva som kjennetegner et godt argument, kan være én måte å fremme elevenes evne til å argumentere og resonnerer.

For at kjerneelementene skal kunne binde matematikkfaget sammen, og bidra til at elevene får en dypere forståelse for og ser sammenhenger i matematikken, må de gjennomsyre matematikkundervisningen i hele utdanningsløpet. Dette betyr at modellering, resonnering og argumentasjon, og de andre kjerneelementene, må inngå allerede som en del av begynneropplæringen i matematikk. I tillegg er det viktig at matematikklærere og andre ressurspersoner har en felles forståelse av kjerneelementene og deres rolle i undervisningen. For framtidige lærere innebærer dette at lærerutdanningene må sørge for at studentene tilegner seg den nødvendige fagdidaktiske kompetansen dette krever. For lærere i skolen kan dette bety etter- og videreutdanningskurs som fremmer læreplanens ideer om betydningen av kjerneelementene for å styrke den faglige sammenhengen og progresjonen i undervisningen.

Viktig med bred satsing på matematikkfaget

Det er matematikklæreren som skal planlegge og tilrettelegge undervisningen slik at hver enkelt elev utvikler sin matematiske kompetanse. Hvis klassen består av mange elever som misliker faget, har mistet troen på at de kan lære det og har mangler i sin matematiske forståelse fra tidligere klasseserier, kan dette være en utfordrende oppgave. Det er derfor viktig at matematikklærere får de rammene og ressursene de trenger for å kunne tilpasse og tilrettelegge undervisningen best mulig. Når resultatene fra PISA 2022 tyder på at det å undervise matematikk er mer krevende enn før, og en ny læreplan skal implementeres i undervisningen, kan matematikklærere trenge mer tid og ressurser enn tidligere til faglig arbeid og undervisning. Det motsatte ser imidlertid ut til å være tilfelle: En undersøkelse om læreres tidsbruk viser at de bruker mer tid på flere ikke-faglige oppgaver enn tidligere (Mejlbo, 2024).

Samtidig er det ikke bare læreren og skolen som påvirker elevenes forhold til matematikk. Foreldre og andre rollemodeller har også et ansvar for å framsnakke matematikkfaget og fremme gode holdninger og et positivt syn på det å lære matematikk. Fire av ti norske 15-åringer gir uttrykk for å ha en oppfatning av at evner og intelligens ikke kan læres, men er noe man er født med (Jensen et al., 2023). Denne typen oppfatninger om læring og matematikkfaget, samt myter som for eksempel at noen er født med et «mattegen» og andre ikke, finnes rundt omkring i samfunnet. Resultatene fra PISA 2022 og flere andre studier har vist at denne typen syn og holdninger kan være til hinder for elevenes faglige utvikling. Matematikk er et fag som krever mye tid, innsats og øving. Hvis man tror man ikke har de forutsetningene som skal til for å lære matematikk, vil man kanskje ikke legge inn den tiden og innsatsen som kreves for å lære faget. Dette kan forklare hvorfor elever med et slikt låst tankesett presterer betydelig svakere enn elever med et lærende tankesett i PISA 2022. Vi har et felles ansvar som lærere, forskere og foreldre for å sørge for at alle barn og unge har tro på at de kan lære matematikk.

Skole og utdanning skal ikke bare forberede elevene på dagens samfunn, men også ruste dem for fremtiden, både i yrkessammenheng og privat. I den forbindelse er kunstig intelligens (KI) et viktig tema som ikke berøres i denne boka. Ifølge digitaliseringsminister Karianne Tung er det en målsetting at 80 prosent av offentlig sektor skal ta i bruk KI innen 2025 (Muhaisen, 2024). Men hva slags matematisk kompetanse er nødvendig for å kunne ta i bruk KI i arbeidslivet? Og det kanskje mest interessante spørsmålet: Hvordan kan KI brukes som en del av matematikkundervisningen slik at det fremmer elevenes læring? Selv om KI kan brukes til både å forklare og vise hvordan matematiske begreper og prosedyrer fungerer, lage løsningsforslag og finne og forklare feil i elevers besvarelser, er det usikkert i hvilken grad elever klarer å ta i bruk dette på en slik måte at de *forstår* matematikk, og ikke bare hermer etter framgangsmåter og kopierer løsninger. KI og mye annen teknologi er utformet slik at man skal finne ut av ting raskt og enkelt. Læring i matematikk handler derimot ofte om å tenke lenge og grundig, utforske, diskutere og forklare. Det er også viktig at elevene selv er bevisste på egen læring. Det trengs mer kunnskap om hvordan KI kan bli en del av læringsfellesskapet, og hvordan det kan tas i bruk i undervisningssammenheng på en slik måte at det fremmer læring.

Mange av de negative resultatene fra PISA 2022 som løftes fram og diskuteres i denne boka, er knyttet til utfordringer med matematikkfaget

som lenge har vært kjente, men som kan se ut til å ha vokst seg enda større de siste årene. Med innføringen av kjerneelementene i LK20 er det lagt et grunnlag for å styrke sammenhengen og den faglige progresjonen i matematikkfaget ved å legge til rette for at alle matematikklærere på alle trinn skal «dra i samme retning». Å lykkes med dette vil kreve tid, ressurser og høy fagdidaktisk kompetanse i skolen. Det er med andre ord viktig med en bred satsing på matematikkfaget.

Forfatterbiografier

Andreas Pettersen er forsker ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo. Han har en doktorgrad i matematikdidaktikk og har jobbet med PISA-undersøkelsen siden 2017. Pettersen har utgitt flere artikler om matematikdidaktikk og vært redaktør for boka *Equity, Equality and Diversity in the Nordic Model of Education* (utgitt på Springer i 2020).

Fredrik Jensen har en forskerstilling ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Universitetet i Oslo. Han har jobbet med PISA-undersøkelsen siden 2013, og vært prosjektleder fra PISA 2018. Hans forskningsinteresser inkluderer elevers kompetanse i og holdninger til naturfag og matematikk. Jensen var medredaktør for boka *Like muligheter til god leseforståelse? 20 år med lesing i PISA* (utgitt på Universitetsforlaget i 2020).

Referanser

- Berget, I. K. L. (2022). Mathematical modelling in textbook tasks and national examination in Norwegian upper secondary school. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 27(1), 51–70.
- Berget, I. L., Løvgren, M. & Pettersen, A. (2024). Å kome i gang med matematisk modellering i klasserommet – kan PISA-oppgåver vise veg frå kaos til system i første del av modelleringsprosessen? I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 75–110). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch4>
- Frejd, P. (2011, 9.–13. februar). *An investigation of mathematical modelling in the Swedish national course tests in mathematics* [Paperpresentasjon]. The Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Rzeszów, Polen.
- Furholt, J. & Børing, P. (2024). NHOs kompetansebarometer 2023. Ei kartlegging av kompetansebehovet til NHOs medlems-bedrifter i 2023 (NIFU-rapport 2024:3). <https://hdl.handle.net/11250/3117584>
- Gatabi, A. R., Stacey, K. & Gooya, Z. (2012). Investigating grade nine textbook problems for characteristics related to mathematical literacy. *Mathematics Education Research Journal*, 24(4), 403–421. <https://doi.org/10.1007/s13394-012-0052-5>

- Jensen, F. & Nilsen, T. (2024). Lavtpresterende elever i matematikk. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 187–211). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch8>
- Jensen, F., Pettersen, A., Frønes, T. S., Eriksen, A., Løvgren, M. & Narvhus, E. K. (2023). *PISA 2022. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing*. Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/noasp.205>
- Jessen, B. E. & Kjeldsen, T. H. (2021). Mathematical modelling in scientific contexts and in Danish upper secondary education: are there any relations? *Quadrante*, 30(2), 37–57. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23658>
- Krogsrud, Ø. (2023, 8. desember). *Beretningen om en varslet mattekrise*. Tekna Magasinet. <https://www.tekna.no/magasinet/beretningen-om-en-varslet-mattekrise/>
- Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/overordnet-del>
- Mejlbo, K. (2024, 13. mars). *Lærere får stadig flere oppgaver – mister motivasjonen*. Utdanningsnytt. <https://www.utdanningsnytt.no/helsesykepleier-laerer-laererollen/laerere-far-stadig-flere-oppgaver-mister-motivasjonen/393434>
- Muhaisen, S. (2024, 16. april). *Regjeringen ber 80 prosent av offentlig sektor bruke KI innen 2025*. NRK. https://www.nrk.no/norge/regjeringen-vil-at-80-prosent-av-offentlig-sektor-bruiker-ki_-urealistisk_-mener-ki-forsker-1.16843972
- Nilsen, T. & Pettersen, A. (2024). Matematikkundervisning i norske og nordiske klasserom – klasseledelse, støttende undervisning og faglige utfordringer. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 139–165). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch6>
- Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R. & Villa-Ochoa, J. A. (2017). *Conceptualisation of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research* [Paperpresentasjon]. Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education, Cham.
- Pettersen, A. (2024). Hvor relevante er PISA-resultatene for matematikkfaget i Norge? – En sammenlikning av matematisk kompetanse i PISA 2022 og LK20. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 49–74). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch3>
- Pettersen, A. & Jensen, F. (2024). Innledning. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 9–19). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch1>
- Pettersen, A., Kaarstein, H. & Nortvedt, G. A. (2024). Matematikk i PISA 2003–2022: Måling av endringer i et samfunn som endrer seg. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 21–48). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch2>
- Radišić, J. & Pettersen, A. (2024). Succeeding against the odds: Exploring self-beliefs and academic emotions profiles of resilient and non-resilient students. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 213–239). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch9>
- Senneset, M. K. & Pettersen, A. (2024). Norske 15-åringers begrunnelser/argumentasjon i påstand-oppgaver i PISA 2022. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 111–138). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch5>
- Stølen, S., Borg, A. & Almlid, O. E. (2023, 5. februar). *Realfagskrisen kan stoppe det grønne skiftet i Norge*. Khrono. <https://www.khrono.no/real-fagskrisen-kan-stoppe-det-gronne-skiftet-i-norge/756768>
- Urhan, S. & Dost, Ş. (2018). Analysis of ninth grade mathematics course book activities based on model-eliciting principles. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(5), 985–1002. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9808-4>

KAPITTEL 11

PISA og den internasjonale forskningen

Reidar Mosvold Universitetet i Stavanger

Sammendrag: PISA-studien er viktig, og resultatene fra denne studien får en oppmerksomhet fra politisk hold og samfunnet for øvrig som er unik i utdanningsforskning. Stor oppmerksomhet kan derimot føre til mangel på nyansering, og dette kommentarkapittelet sammenligner fokuset i kapitlene i denne antologien med den internasjonale forskningen på elever og matematikk. Studien anvender teknikker fra kvantitativ tekstanalyse for å sammenligne antologikapitlene med sammendrag fra 5683 tidsskriftartikler som er publisert mellom 2000 og 2024. Analysene indikerer at kapitlene har sterkt fokus på elevenes prestasjoner. Sammenlignet med den internasjonale forskningen fokuserer antologikapitlene i mindre grad på lærerne og deres kunnskap og praksis, og mindre på elevenes tenkning og forståelse. Selv om PISA-studien er betydningsfull og gir et verdifullt redskap for å sammenligne elevprestasjoner, må man være oppmerksom på at det er mange sentrale aspekter ved undervisning og læring i matematikk som PISA ikke vektlegger.

Nøkkelord: kommentar, PISA, kvantitativ tekstanalyse, topic modeling

Abstract: The PISA study is significant, and its results are garnering attention from policy makers and society at large in a way that is unique to studies in education research. Receiving a great deal of attention might, however, lead to a lack of nuance and this commentary chapter compares the focus in the chapters of this anthology with that of international research on students and mathematics. The study applies techniques from computational text analysis to compare the anthology chapters with abstracts from 5,683 journal articles published between 2000 and 2024. The analysis indicates that the chapters focus strongly on student achievement. Compared to the international research, the chapters focus less on the teachers and their knowledge and practice, as well as less on students' thinking and understanding. Although the PISA study is significant and provides a valuable tool for comparing student achievements, it is necessary to keep in mind that there are many important aspects of teaching and learning mathematics that PISA does not attend to.

Keywords: commentary, PISA, computational text analysis, topic modeling

Innledning

Helt siden den første gjennomføringen i 2000 har resultatene fra PISA-undersøkelsene fått stor oppmerksomhet i norsk offentlighet. Her står PISA i en særstilling. Selv om forskere generelt ønsker oppmerksomhet omkring studiene sine, så er det en fare for at resultatene fra PISA kan bli oppfattet av politikere og allmennheten som den eneste forskningen av betydning for skoledebatten. PISA er en stor og viktig studie – både nasjonalt og internasjonalt. Likevel er PISA bare én av mange studier innenfor utdanningsforskning, og det er en rekke sentrale perspektiver knyttet til læring og undervisning i matematikk som PISA-undersøkelsene ikke sier noe om. I dette kommentarkapittelet vil jeg forsøke å nøste opp i dette ved å sammenligne fokuset i PISA-undersøkelsen – representert ved kapitlene i denne antologien – med den øvrige forskningen på feltet. For at denne sammenligningen ikke skal bli altfor preget av hva jeg som forsker på feltet er opptatt av, har jeg tatt i bruk teknikker fra kvantitativ tekstanalyse. Disse analyseteknikkene er brukt både i lesingen av antologikapitlene og i en gjennomgang av forskningslitteraturen på feltet. Målet er at sammenligningen på denne måten skal bli mer objektiv og etterprøvable.

Nedenfor gjør jeg først rede for den analytiske tilnærmingen jeg har brukt. Deretter tar jeg for meg innhold og fokus i antologikapitlene, før jeg analyserer sammenhenger mellom tendensene i den internasjonale forskningslitteraturen og fokuset i antologikapitlene.

Metode

For å sammenligne fokuset i de ulike antologikapitlene med den øvrige forskningen på feltet har jeg tatt utgangspunkt i kvantitative tekstanalyser. I disse analysene utgjør tekstene fra antologikapitlene en av to tekstsamlinger.

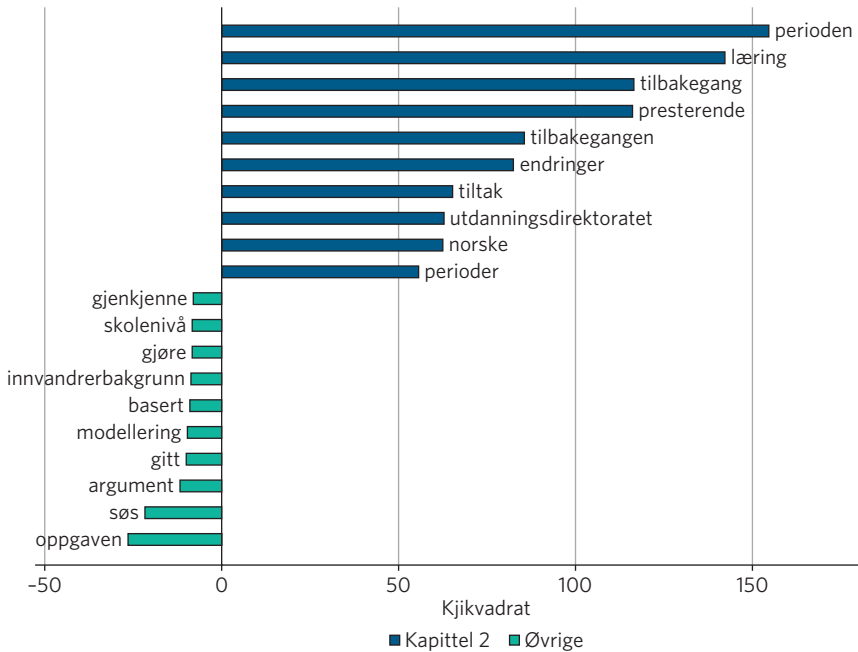
Strukturert søk i litteraturen

Utgangspunktet for gjennomgangen av forskningslitteraturen er et strukturert søk i Eric-databasen etter fagfelleverderte tidsskriftartikler som handler om elever og matematikk, siden dette var toppordene som kom fram i analysene av ordfrekvenser fra antologikapitlene. Søket ble avgrenset ved at søkeordene «students» og «mathematics»

måtte forekomme i artiklenes sammendrag, og jeg avgrenset til fagfellevurderte tidsskriftartikler på engelsk med fokus på grunnskolen («elementary education»). Siden jeg ønsket å sammenligne innholdet i antologikapitlene med forskningen på feltet innenfor den perioden PISA-undersøkelsen har eksistert, avgrenset jeg søket til perioden 2000–2024. Det siste og gjeldende søket gjorde jeg i databasen mandag 15. april 2024, og da fikk jeg 5683 treff på tidsskriftartikler som oppfylte disse kriteriene. Jeg lastet ned Bibtex-fil med bibliografisk informasjon for alle disse tidsskriftartiklene, og det er altså de 5683 sammendragene som utgjør den andre tekstsamlingen i analysene; den første tekstsamlingen besto av tekstene i antologikapitlene.

Analytisk tilnærming

For å analysere datamaterialet brukte jeg programmeringsspråket R (R Core Team, 2023), og de kvantitative tekstanalysene tok særlig utgangspunkt i programpakken Quanteda (Benoit et al., 2018). Quanteda inneholder en rekke funksjoner som kan brukes i kvantitative tekstanalyser. Jeg lagret sammendragene fra litteraturgjennomgangen som en tekstsamling («corpus») for videre analyser i Quanteda. På samme måte lagret jeg tekstene til kapitlene i antologien som en annen tekstsamling. Siden kapitteltekstene er av en litt annen karakter enn sammendrag av de vitenskapelige artiklene, var det nødvendig med noe forhåndsprosessering. For eksempel kuttet jeg referanselister og vedlegg i kapitlene, slik at det ikke skulle bli for mye støy i sammenligningen, og slik at tekstene her skulle bli mer sammenlignbare med artikkel-sammendragene. For å kunne sammenligne ordbruken på tvers av de ulike kapitlene, oversatte jeg kapittel 9 fra engelsk til norsk (ved hjelp av Google Translate samt noe manuell justering), og kapittel 4 ble oversatt fra nynorsk til bokmål (ved hjelp av Wordify, med noen manuelle justeringer). Etter å ha gjort en forhåndsprosessering av datamaterialet, gjennomførte jeg først frekvensanalyser for å se hvilke ord som ble mest brukt. For antologikapitlene gjorde jeg deretter keyness-analyser for å undersøke forskjeller i ordbruken mellom kapitlene. Keyness-analyser anvender kjikvadratter for å sammenligne sannsynligheten for at enkelte ord forekommer i en del av datamaterialet i forhold til resten (se figur 1).



Figur 1. Eksempel på keyness-analyse av kapittel 2, sammenlignet med de øvrige kapitlene

For å få en oversikt over tematikkene i forskningslitteraturen gjennomførte jeg såkalt «topic modeling», og da ved hjelp av Latent Dirichlet Allocation (Blei et al., 2003). Dette er en analyseteknikk som identifiserer grupper av nøkkelord som med stor sannsynlighet forekommer i nærheten av hverandre i tekster. Disse gruppene av ord utgjør «topics» eller tema. Deretter gjennomførte jeg videre analyser av utvalgte nøkkelord i kontekst for å undersøke hva studiene av elever og deres læring i matematikk handlet om. For disse analysene avgrenset jeg konteksten til de tre ordene som forekom før nøkkelordet, og de tre ordene som kom etter (se figur 2).

Keyword-in-context with 17,067 matches.			
[text1, 47]	of compulsory school	students	beliefs about mathematics
[text1, 94]	characterizing and analysing	students	beliefs about mathematics
[text1, 102]	a discipline with	students	generally possessing dualistic
[text2, 25]	of seventh-grade gifted	students	in the equation
[text2, 57]	of seventh-grade gifted	students	in the experimental
[text2, 135]	attitudes of gifted	students	toward mathematics it
[text2, 147]	levels of the	students	decreased after the
[text2, 162]	in the study	students	stated that mathematics
[text3, 15]	aiming to enhance	students	creativity in mathematics
[text3, 54]	the relationship between	students	aptitude for mathematical
[text3, 83]	cohort consisted of	students	carefully selected by
[text4, 41]	levels elementary school	students	differ in their
[text4, 47]	their characteristics from	students	at the higher

Figur 2. Utdrag fra analyse av nøkkelord i kontekst for ordet «students» i forskningslitteraturen

Til slutt gjorde jeg nye frekvensanalyser av disse mikrokontekstene for å undersøke tendenser i hvordan ulike nøkkelord ble beskrevet i tekstene. Tilsvarende analyser gjorde jeg av antologikapitlene.¹

Innhold og ordbruk i antologikapitlene

Dette delkapittelet tar for seg innholdet i antologikapitlene og ser på de enkelte kapitlene i forhold til de andre kapitlene i antologien. Denne gjennomgangen er både preget av min egen lesing av kapitlene og de kvantitative tekstanalysene.

Kapittel 2: resultatkapittelet

Hovedresultatene fra PISA 2022 ble allerede presentert i kortrapporten (Jensen et al., 2023), men i kapittel 2 analyserer Pettersen et al. (2024) utviklingen i elevenes prestasjoner i matematikk over tid. I kapittelet ser forfatterne tilbake på hva som preget samfunnet og norsk skole i 2003, 2012 og 2022 – de årene hvor matematikk har vært hovedområde i PISA. Kapittelet diskuterer også pandemien og hvordan denne påvirket skolen i Norge. Når forfatterne så studerer utviklingen i matematikk over tid, peker de særlig på nedgangen i de nordiske resultatene fra 2018 til 2022. Selv om alle de nordiske landene har hatt en nedgang i resultatene i denne perioden, står Norge i en særstilling ved at det her har vært en tydelig nedgang for elevene på alle mestringsnivåer. Det som kanskje er mest bekymringsfullt i de norske resultatene, er at det har vært en kraftig nedgang i andelen av høytpresterende elever, samtidig som det også har vært en kraftig økning i andelen lavtpresterende elever. På disse områdene er utviklingen i Norge enda mer markant enn i de andre nordiske landene – med unntak av Island. Selv om forfatterne argumenterer for at det sannsynligvis er flere ulike faktorer som har bidratt til den negative utviklingen, blir likevel pandemien løftet fram som en faktor som sannsynligvis har hatt spesielt stor betydning.

Analysen av ordbruken i dette kapittelet viser – ikke overraskende – at fokuset er på de norske resultatene, og særlig i den siste perioden. Et ord som forekommer relativt ofte, er «tilbakegang», og ord som «lavtpresterende»

¹ Fullstendig oversikt over analyseprosessen i R er tilgjengelig på <https://github.com/rmosvold/pisakommentar>

og «høytpresterende» forekommer også ofte i dette kapittelet. Selv om fokuset særlig er på prestasjoner, kommer forfatterne i dette kapittelet også ofte inn på læring. En sammenligning av ordbruken i dette kapittelet med ordbruken i de andre kapitlene viser at det særlig er tilbakegangen i prestasjonene som trer fram (jf. figur 1).

Kapittel 3: PISA-rammeverket

Når en skal forholde seg til resultatene fra en studie som PISA, er det viktig å være oppmerksom på hva denne studien faktisk måler. Det er ulike syn på hva som skal til for å lykkes i et fag som matematikk, og det er også ulike syn på hva som bør vektlegges i matematikkundervisningen. Pettersen (2024, kapittel 3 i denne boka) gjør rede for hvordan rammeverket i PISA definerer matematisk kompetanse, og kapittelet sammenligner måten PISA-rammeverket beskriver matematisk kompetanse på, med hvordan dette presenteres i Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020, LK20 (Kunnskapsdepartementet, 2020). Kapittelet konkluderer med at PISA-rammeverket har en klar tilknytning til det synet på matematisk kompetanse som er rådende både i forskningen – for eksempel illustrert gjennom KOM-rammeverket – og i den norske læreplanen. Det ser ut til å være et underliggende argument om at resultatene fra PISA-undersøkelsen dermed er relevante for den norske skolekonteksten. Samtidig understreker forfatteren at PISA ikke måler alt, og det er momenter fra den norske læreplanen som ikke måles gjennom oppgavene i PISA-undersøkelsen. For eksempel vektlegger læreplanen utforskning, diskusjon og muntlig arbeid med matematikk, men muntlige aspekter ved læring i matematikk blir ikke vektlagt i PISA.

Når en ser bort fra alle småord, så er ordet «kompetanse» det ordet som forekommer oftest i kapittelet, og kompetanse blir diskutert opp mot ulike rammeverk. Forkortelsen LK20 forekommer også ofte – relativt oftere enn i de andre kapitlene – og i dette kapittelet blir fokuset i PISA sett i forhold til LK20 (Kunnskapsdepartementet, 2020). Kapittelet refererer også hyppig til kjerneelementene i læreplanen. Sammenligning med ordbruken i de andre kapitlene viser at dette kapittelet har søkelys på matematisk kompetanse, men ord som «kjerneelementet/kjerneelementene» og «kontekster» forekommer også markant oftere her enn i de andre kapitlene. Dette synliggjør kapittelets fokus på kompetanse – operasjonalisert gjennom rammeverket til Niss og Højgaard (2019), og i tett tilknytning til kjerneelementene i

LK20 – og oppgavene i PISA tar ofte utgangspunkt i kontekster som elevene må forholde seg til, for å løse de matematiske problemene.

Kapittel 4: matematisk modellering

Matematisk modellering blir vektlagt i PISA-rammeverket, og modellering har også fått en stadig større plass i matematikkfaget i skolen. Berget et al. (2024, kapittel 4 i denne boka) har et særlig fokus på modellering, og kapitlet gir et godt innblikk i matematisk modellering som prosess. Forfatterne fokuserer særlig på den delen av modelleringsprosessen hvor en må gå fra den virkelige verden til den matematiske verden – eller hvor en må formulere et reelt problem i et matematisk språk. Forfatterne har analysert modelleringsoppgaver fra PISA med fokus på hvilke handlinger oppgavene krever av elevene, og hvilke deler av modelleringsprosessen oppgavene rettes mot. Forfatterne har særlig fokus på oppgavene innenfor den første av de fire modelleringsprosessene i rammeverket: *gjenkjenne og formulere*. I kapitlet viser forfatterne eksempler fra de frigitte PISA-oppgavene, og de sammenligner utfordringene i PISA-oppgavene med de utfordringene elevene står overfor i en friggitt eksamensoppgave fra 10. trinn. Gjennom analysene viser forfatterne at oppgavene i PISA ikke utfordrer elevene i bredden av de handlingene som inngår i modelleringsprosessen, og elevene blir for eksempel ikke utfordret på å gjøre forenklinger eller finne relevant informasjon.

Kapittel 4 handler om modellering, og derfor er det ikke uventet at ord som «modellering» og «modell» forekommer ofte i kapitlet. Analyser av ordbruken viser at kapitlet særlig ser på modellering i tilknytning til de oppgavene som elevene står overfor, og ord som «oppgåva», «oppgåvene» og «oppgåver» forekommer ofte. Andre hyppig forekommende ord er «løse», «gjere», «bruke» og «gjenkjenne», og alle disse ordene sier noe om prosessene som elevene er engasjert i. Sammenlignet med de andre kapitlene er det tydelig at dette kapitlet, naturlig nok, har et større fokus på modellering, men matematiske problem er også hyppigere referert til her enn i de andre kapitlene i antologien.

Kapittel 5: resonnering og argumentasjon

I kapittel 5 retter Senneset og Pettersen (2024) særlig søkelys på resonnering og argumentasjon. Resonnering og argumentasjon er sentrale kompetanser i matematikk (jf. Niss & Højgaard, 2019), og de blir

framhevet både i PISA og i LK20 (Kunnskapsdepartementet, 2020). Senneset og Pettersen har utviklet et analyseskjema for å vurdere kvaliteten på elevers argumentasjon, og de har analysert elevers svar på tre frigitte oppgaver fra PISA 2022. Resultatene indikerer at det er relativt få elever som er i stand til å gi gyldige argumenter med en matematisk forankring, og det er ofte feil og mangler i elevenes argumenter. Dette indikerer at matematisk resonnering og argumentasjon er kompetanser norske elever trenger å videreutvikle, og dette er noe matematikklærere må være oppmerksomme på. Kapittelet viser også hvor krevende det kan være å vurdere argumentasjonen i elevsvar, og det skjemaet forfatterne har utviklet, kan være et verktøy som kan støtte lærere i denne prosessen.

Analysen av ordbruken understreker at argumentasjon og resonnering er i fokus, og dette blir ofte diskutert i tilknytning til oppgavene som elevene jobber med. Gyldigheten i matematiske argumenter er viktig, og ordet «gyldig» forekommer ofte i dette kapittelet – relativt sett mye oftere enn i de andre kapitlene i antologien – og dette er et kjernebegrep innenfor resonnering og argumentasjon. Sammenlignet med de andre kapitlene refererer dette kapittelet oftere eksplisitt til elevenes skriftlige besvarelser på oppgavene enn de andre kapitlene.

Kapittel 6: undervisningskvalitet

Kapittelet til Nilsen og Pettersen (2024, kapittel 6 i denne boka) handler om undervisningskvalitet, og forfatterne starter med å slå fast at kvaliteten på matematikkundervisningen har stor betydning for elevenes prestasjoner, motivasjon og læring. Forfatterne problematiserer fordeler og ulemper med kvalitative og kvantitative tilnærminger, men de understreker at representative utvalg er avgjørende for kvaliteten på forskningsprosjekter. Rammeverket for undervisningskvalitet som forfatterne anvender i denne studien, består av de tre variablene *klasseledelse*, *støttende undervisning* og *faglig utfordring*. De to første variablene er mer generelle, mens den tredje variabelen er knyttet til faget. For å studere disse aspektene ved undervisningskvalitet, analyserer forfatterne svar fra elevspørreundersøkelsen. Andre studier har analysert undervisningskvalitet med utgangspunkt i observasjon, men forfatterne hevder at forskernes ulike tolkninger blir en svakhet i slike studier. I stedet fokuserer dette kapittelet på elevenes opplevelse av undervisningskvalitet. Resultatene peker i retning av at elevene

opplever undervisningskvaliteten som god, særlig med tanke på faglige utfordringer (over OECD-gjennomsnittet). Likevel hevder forfatterne at det er viktig å styrke lærerutdanning og etter- og videreutdanning av lærerne.

I kapittelet ser forfatterne på undervisningskvalitet i forhold til sosioøkonomisk status (SØS), og denne forkortelsen forekommer ofte. Sosioøkonomisk status blir studert både på skolenivå og elevnivå. «Klasseledelse» er også et av de sentrale begrepene i kapittelet, og sammen med ord som «undervisningskvalitet» og «undervisning» forekommer dette ordet relativt sett mye oftere i dette kapittelet enn i de andre kapitlene i antologien. Ord som «faglig» og «støttende» forekommer også relativt oftere her enn i de andre kapitlene, og de er ofte knyttet til variablene i rammeverket.

Kapittel 7: likeverd

Nilsen og Jensen (2024, kapittel 7 i denne boka) starter kapittelet med å vise til at alle elever skal ha like muligheter for å lykkes i Norge, og dette er et sentralt aspekt ved likeverd. Samtidig er det tydelige signaler på at det blir stadig større ulikheter i samfunnet. Kapittelet undersøker hvordan likeverd og endringer i likeverd kan påvirke elevenes prestasjoner i matematikk. Forfatterne definerer likeverd som «at alle elever skal ha like muligheter til å lære» (Nilsen & Jensen, 2024, s. 170), og disse mulighetene skal være uavhengige av bakgrunnsvariabler og elevkarakteristikker. Resultatene indikerer at norske elever ikke alltid har like muligheter, og det ser ut til å bli stadig større forskjeller blant elevene i norsk skole. Både sosioøkonomisk status og innvandrerbakgrunn ser ut til å ha betydning for elevenes prestasjoner, og forfatterne rapporterer også om indikasjoner på segregering og ulikheter mellom skoler i Norge. Dette er funn som kan ha betydning for politikerne i Norge.

Kapittelet handler om likeverd, men det er interessant å se at ord som «SØS», «prestasjoner» og «innvandrerbakgrunn» forekommer oftere enn «likeverd». Likeverd blir sett på i forhold til disse variablene – både på skolenivå og elevnivå. Pandemien blir også hyppig nevnt i dette kapittelet, men ikke så mye oftere enn i andre kapitler. Sammenlignet med de andre kapitlene forekommer de allerede nevnte nøkkelordene relativt hyppigere her, men ord som «varians», «ulikheter» og «påvirkningen» blir også brukt relativt hyppigere i dette kapittelet enn i de andre kapitlene.

Kapittel 8: lavtpresterende elever

Utgangspunktet for Jensen og Nilsen (2024, kapittel 8 i denne boka) er at andelen av lavtpresterende elever har økt betydelig fra 2018 til 2022, og kapittelet har som mål å se nærmere på hva som kjennetegner denne elevgruppen. Resultatene indikerer at elevene som presterer lavt, opplever mindre tilhørighet og dårligere læringsmiljø enn de andre elevene, de rapporterer om lavere utholdenhet og mestringsforventning og mer matematikkangst, og de har lavere gjennomsnittlig sosioøkonomisk status. I tillegg er det en større andel av elever med innvandrerbakgrunn i denne gruppen, og det er også flere gutter enn jenter blant de lavtpresterende elevene. Det er en relativt stor gruppe elever som faller utenfor i skolen, og sammenhengen mellom variabler knyttet til prestasjoner, holdninger og likeverd er alarmerende.

Dette kapittelet retter søkelyset mot lavtpresterende elever, og ord som «lavitpresterende», «presterer» og «nivå» forekommer naturlig nok ofte – relativt sett mye oftere enn i de andre kapitlene. Ord som «læringsmiljø» og «mestringsforventning» blir også brukt relativt oftere her sammenlignet med de andre kapitlene i antologien. Noe av utfordringen som forfatterne peker på er at de lavtpresterende elevene ofte ser ut til å ha et dårligere læringsmiljø enn de høytpresterende elevene, og dermed kan det være fare for at de negative tendensene bare vil bli større framover.

Kapittel 9: robuste elever

Flere av kapitlene i antologien peker på at elever med lav sosioøkonomisk status eller innvandrerbakgrunn generelt presterer dårligere enn andre elever. Samtidig er det en gruppe elever fra de utsatte gruppene som likevel presterer godt, og Radišić og Pettersen (2024, kapittel 9 i denne boka) ser nærmere på hva som kjennetegner de elevene som lykkes mot alle odds. Forfatterne – som har skrevet dette kapittelet på engelsk – omtaler denne elevgruppen som «resilient». På norsk kan vi kalle dem for robuste eller motstandsdyktige elever. Gjennom analysene identifiserer forfatterne tre profiler blant elevene i de utsatte gruppene: elever med positivt selvbilde, elever med underutviklet selvbilde, og elever med et negativt selvbilde. Selv om en kanskje skulle tro at de robuste elevene bare ville ha et positivt selvbilde, viser forfatterne at det også er en del elever i denne gruppen som har et underutviklet selvbilde. Forfatterne hevder at disse elevene trenger særlig støtte for å fortsatt kunne lykkes i matematikk.

Dette kapittelet er det eneste som er skrevet på engelsk, men analyser av en norsk oversettelse av kapittelet viser at ord som «motstandsdyktige» («resilient» på engelsk) forekommer svært ofte – og oftere enn i de andre kapitlene. Frekvensanalyser viser også at det er mye snakk om profiler og selvbilde her, og de positive selvbildene ser ut til å bli vektlagt mer enn de negative i kapittelet. Forfatterne løfter også fram familiens og lærerens betydning for utviklingen av elevenes selvbilde.

PISA og den internasjonale forskningslitteraturen

Nedenfor har jeg gjort en strukturert sammenligning av fokuset i antologi-kapitlene og den øvrige forskningslitteraturen på feltet. Denne sammenligningen er gjort på tre nivåer. På det første nivået har jeg sammenlignet hvilke ord og begreper som brukes i forskningslitteraturen, med ord og begreper som brukes i antologikapitlene som rapporterer fra PISA 2022. I det neste nivået har jeg identifisert tematikker i forskningen på feltet og sammenlignet disse med fokuset i antologikapitlene. Til slutt har jeg i det tredje nivået analysert ordbruken omkring sentrale ord og begreper i antologikapitlene og i forskningslitteraturen.

Nivå 1: Sammenligning av ord og begreper

Tabell 1 sammenligner de mest brukte ordene i sammendragene fra forskningslitteraturen med de mest brukte ordene i antologikapitlene. For å gjøre denne sammenligningen har jeg fjernet såkalte stoppord (pronomener, vanlige småord, osv.), og jeg har også fjernet ord som «elever» og «matematikk», siden disse bare skaper støy i toppen av listene.

Tabell 1. Sammenligning av ordbruk i forskningslitteraturen og antologikapitlene

Nr.	Ord, litteratur	f	Ord, antologi	f
1	teachers	7079	oppgaven	165
2	study	6999	prestasjoner	143
3	learning	6177	norge	139
4	school	4925	søs	135
5	research	3475	resultatene	124
6	achievement	3445	oppgavene	108
7	teaching	3215	skoler	106

Nr.	Ord, litteratur	f	Ord, antologi	f
8	education	2973	norske	104
9	results	2951	nivå	102
10	data	2949	poeng	101
11	teacher	2788	informasjon	92
12	science	2740	oppgaver	90
13	elementary	2556	kompetanse	83
14	used	2417	gjøre	78
15	using	2314	løse	76
16	grade	2231	prosent	75
17	knowledge	2077	modellering	74
18	use	1997	argument	73
19	classroom	1988	skolen	72
20	can	1845	landene	72
21	findings	1830	lavtpresterende	68
22	schools	1828	videre	67
23	instruction	1784	nordiske	67
24	group	1778	resonnering	66
25	two	1763	undervisning	64

Noen forskjeller i ordbruken kan forklares med at artikkelsammendrag har en annen karakter enn teksten i et fullt kapittel. I sammendrag er det vanlig å beskrive studien («study») eller forskningen («research»), resultatene («results» og «findings») og de metodiske tilnærmingene samt rammeverk og data som er brukt («used», «using» og «use» figurerer høyt oppe på lista). Når en luker bort slike ord, trer det fram noen interessante tendenser. For eksempel har den internasjonale forskningslitteraturen ofte søkelys på læreren, og ord som læring («learning») og undervisning («teaching» og «instruction») forekommer hyppig. Kapitlene i denne antologien har lite fokus på lærerne, og de handler mer om elevenes prestasjoner enn deres læring. Selv om et av kapitlene handler om undervisningskvalitet, har antologikapitlene samlet sett mindre fokus på undervisning enn den internasjonale forskningslitteraturen knyttet til elever og matematikk.

I en sammenligning av forskningslitteraturen og antologikapitlene fra den norske PISA-undersøkelsen i 2022 kan det være interessant å se hvordan elevene omtales. Jeg har her tatt utgangspunkt i den umiddelbare konteksten rundt ord som «elev», «elever» og «elevene» i antologikapitlene og ord som «student» og «students» i sammendragene fra forskningslitteraturen (se tabell 2). Jeg har avgrenset søket til de tre ordene som kommer

før og etter disse nøkkelordene (for å få den umiddelbare konteksten), og så har jeg luket bort stoppord.

Tabell 2. Sammenligning av ordbruk når det skrives om elever

Nr.	Ord, litteraturen	f	Ord, antologi	f
1	mathematics	1475	norske	73
2	learning	916	lavtpresterende	59
3	school	897	matematikk	53
4	grade	822	presterer	45
5	teachers	711	motstandsdyktige	33
6	achievement	595	prestasjoner	31
7	elementary	586	elever	29
8	mathematical	481	nivå	28
9	students	378	svarer	26
10	primary	366	læring	24
11	study	357	presterende	23
12	performance	344	andelen	22
13	understanding	328	bruke	20
14	thinking	269	gruppen	20
15	results	268	innvandrerbakgrunn	19
16	skills	249	vurdering	18
17	can	245	høyest	17
18	disabilities	236	lavest	17
19	group	231	poeng	17
20	knowledge	219	rapporterer	17
21	schools	219	flere	16
22	among	214	oppgaven	16
23	science	205	skoler	16
24	middle	202	prosentandel	15
25	grades	194	antall	15

Antologikapitlene handler naturligvis om «norske» elever, og matematikk/mathematics forekommer ofte begge plasser. Ordet «learning» kommer på andreplass i forskningslitteraturen, mens «læring» kommer lenger ned på lista i antologikapitlene. Mens forskningslitteraturen altså har større fokus på elevenes læring, handler antologikapitlene mer om elevenes prestasjoner, og antologikapitlene er særlig opptatt av lavtpresterende elever. Forskningslitteraturen handler ofte om lærere i forbindelse med omtaler av elevene, mens dette ordet figurerer langt nede på lista i antologikapitlene. Videre handler forskningslitteraturen ofte om elevenes forståelse og

tenkning, mens dette er ord som nesten aldri blir brukt når antologikapitlene skriver om elevene. Et ord som «disabilities» forekommer ofte i den internasjonale litteraturen (det er ofte snakk om «learning disabilities»), men tilsvarende ord brukes ikke i antologikapitlene. Antologikapitlene viser sjeldnere til «ferdigheter», og «kunnskap» kommer langt ned på lista over ord som forekommer i samme kontekst som elever i antologikapitlene. Ordet «kompetanse» blir derimot brukt en del i antologikapitlene, da dette er det begrepet som er foretrukket i rammeverket for PISA, men det kommer likevel et stykke ned på lista her. Det er også interessant å merke seg at antologikapitlene har forholdsvis sterkt fokus på elever med «innvandrerbakgrunn», mens dette perspektivet ikke er særlig framtrædende i forskningslitteraturen.

Nivå 2: Sammenligning av tema

For å få en oversikt over tema i forskningslitteraturen om elever og matematikk kjørte jeg flere runder med «topic modeling» på tekstene fra artikkelsammendragene. Gjennom disse analysene identifiserte jeg tretten overordnede tema i litteraturen (tabell 3).

Tabell 3. Tema i forskningslitteraturen om elever og matematikk

Tema	Beskrivelse	f	%
1	Læreres undervisningspraksis	616	10,8
2	Læreres kunnskaper og holdninger	601	10,6
3	Prestasjoner	558	9,8
4	Læring og ferdigheter	558	9,8
5	Læreplan	532	9,4
6	Effekt av intervensjoner	505	8,9
7	Angst, motivasjon og self-efficacy	479	8,4
8	Forståelse for matematiske begreper	365	6,4
9	Teknologi og digitale verktøy	328	5,8
10	STEM	325	5,7
11	Internasjonale tester	321	5,6
12	Språk og matematikk	259	4,6
13	Problemløsning, strategier og tenkning	236	4,2
Totalt		5683	100 %

En stor del av forskningslitteraturen (totalt en femtedel) handler enten om lærernes kunnskaper og holdninger eller deres undervisningspraksis (f.eks. Hill et al., 2012). Omtrent 10 prosent av studiene ser på elevenes

prestasjoner, og her studeres ofte elevers testskår. En like stor gruppe studier handler om elevenes læring, og mange av disse studerer ferdigheter. En annen gruppe med studier ser på læreplanen. Selv om mange studier innenfor ulike tematikker analyserer effekter, er det også en gruppe med studier som særlig undersøker effekter av intervensjoner i undervisningen. Flere av disse studiene har eksperimentelle eller kvasiekperimentelle design (f.eks. Yakubova et al., 2024). Flere studier undersøker matematikkangst, elevers motivasjon eller self-efficacy (f.eks. Halme et al., 2024). Det er også en rekke studier som undersøker elevenes forståelse av ulike matematiske begreper; mange studier handler om brøk (f.eks. Rodrigues et al., 2024). Det er også en gruppe med studier som ser på teknologi og digitale verktøy. Noen av disse studiene undersøker hvordan dataspill påvirker elevenes læring (f.eks. Soboleva et al., 2021), mens andre studerer programmering i matematikkundervisningen (f.eks. Gökçe & Yenmez, 2023). Det er også en del studier som plasserer seg innenfor STEM (f.eks. Roof & Chimuma, 2022). En del artikler rapporterer fra internasjonale tester, som TIMSS (f.eks. Uyar, 2021). Noen studier trekker inn perspektiver knyttet til språk og matematikk; her er det for eksempel studier som undersøker matematisk «literacy» (f.eks. Ozkale & Aprea, 2023). Til slutt er det en del studier av problemløsning, strategier og elevers matematiske tenkning (f.eks. Powell et al., 2022).

En sammenligning av disse temaområdene med kapitlene i denne antologien viser flere likhetstrekk. Blant annet handler mange av antologikapitlene om elevenes prestasjoner (tema 3), og flere kapitler nevner også elevenes læring (tema 4) – selv om læring er mindre framtrødende i antologikapitlene enn i forskningslitteraturen. PISA-undersøkelsen hører inn under kategorien for internasjonale tester (tema 11), og det er i seg selv et sentralt tema i forskningslitteraturen. Et par av kapitlene tar for seg ulike aspekter ved elevenes holdninger (jf. tema 7), men det er ikke noen kapitler som har dette som hovedfokus. Nilsen og Pettersen (2024, kapittel 6 i denne boka) skriver om undervisningskvalitet, men det er ellers lite søkelys på læreren i antologikapitlene (jf. tema 1 og 2). Dette kan naturlig forklares ved at PISA først og fremst undersøker elevene og deres prestasjoner, og i den norske PISA-undersøkelsen samles det ikke inn data fra lærerne. Naturlig nok er det heller ikke noe fokus på undervisningsintervensjoner og effekten av disse (tema 6), siden PISA er en tverrsnittsundersøkelse, og ingen av antologikapitlene handler om teknologi og digitale verktøy (tema 9), selv om dette nevnes i noen kapitler. Dette viser at det er flere aspekter

som har betydning for elevers møte med matematikk i skolen som ikke undersøkes i PISA. Denne sammenligningen blir dermed en påminnelse om at PISA ikke kan fortelle oss alt som er verd å vite om matematikk i skolen. Nedenfor vil jeg gå mer i detalj for å se på likheter og forskjeller mellom hvordan antologikapitlene i denne boka forholder seg til sentrale begreper knyttet til disse tematikkene og hvordan disse begrepene omtales i forskningsfeltet ellers.

Nivå 3: Sammenligning av ordbruk i kontekst

For å avgrense har jeg her valgt å undersøke ordbruken knyttet til elevenes læring og prestasjoner i matematikk, og jeg har sammenlignet ordbruken i tilknytning til noen av de sentrale temaene som trekkes fram i antologikapitlene. I disse analysene har jeg studert mikrokontekster omkring utvalgte nøkkelord (tre ord før og etter nøkkelordet).

Elevenes læring og prestasjoner i matematikk

Analyser av hvordan elevene omtales i antologikapitlene, synliggjør et fokus på elevenes prestasjoner. Ofte omtales elevene som «lavtpresterende», men generelt beskriver antologikapitlene hvordan de norske elevene presterer, eller hva som kjennetegner prestasjonene deres. En del ganger omtales også elevenes læring – men i mindre grad enn i forskningslitteraturen. Når en sammenligner ordbruken i antologikapitlene med forskningslitteraturen, viser en kji kvadrattest at forskjellen i omtalen av elevers læring er svært signifikant ($p < 0,001$). Ordet «resilient» (på norsk: motstandsdyktig eller robust) forekommer også ofte, men dette er særlig i ett av kapitlene. Ordet «teachers» kommer også høyt på lista over ord som brukes i den umiddelbare konteksten til omtaler av elevene i forskningslitteraturen, og også her er forskjellene signifikante ($p < 0,001$). Den internasjonale forskningslitteraturen refererer ofte til elevenes forståelse og tenkning, mens antologikapitlene sjelden gjør det.

I antologikapitlene blir ordet «SØS» (sosioøkonomisk status) oftest brukt i sammenheng med elevenes prestasjoner, tett fulgt av «matematikk». Ordet «innvandrerbakgrunn» er også svært framtrødende her. Den internasjonale forskningslitteraturen har lite fokus på SØS og innvandrerbakgrunn når det er snakk om elevenes prestasjoner. Det er også verd å merke seg at ord som «bruke» og «prestasjoner» ofte blir brukt om matematikk, mens et ord som «lære» kommer lenger ned på lista. Ofte blir matematikk

nevnt til sammenligning med de andre hovedområdene i PISA: lesing og naturfag. I forskningslitteraturen finner vi også ord som «elever», «læring» og «prestasjoner» høyt oppe på lista, men her er det også svært ofte snakk om lærere og undervisning. I antologikapitlene er det nesten aldri snakk om lærerne når det refereres til matematikk, og det er sjeldnere snakk om undervisning enn i forskningslitteraturen.

Antologikapitlene skriver av og til om læring i tilknytning til undervisning, og noen ganger omtales også kompetanse i samme kontekst som læring. Koblingene mellom undervisning og læring blir stort sett gjort av Pettersen et al. (2024, kapittel 2 i denne boka) og Nilsen og Pettersen (2024, kapittel 6 i denne boka). Noen av de mest framtrepende ordene i kontekstene omkring «undervisning» er derimot «støttende» og «klasseledelse». Når forskningslitteraturen på feltet refererer til læring, refereres det oftere til undervisning enn i antologikapitlene. Forskningslitteraturen refererer også ofte til læringsmiljøet. Læringsmiljøet blir hyppig nevnt i kapittel 8, men ellers har ikke de andre antologikapitlene søkelys på dette.

Sentrale tema fra antologikapitlene

Nedenfor har jeg sammenlignet ordbruken omkring tre av temaene som løftes fram i antologikapitlene: modellering, resonnering og argumentasjon, og likeverd. I den internasjonale forskningslitteraturen omtales ofte modellering i forbindelse med «structural equation modeling» eller andre modeller som blir brukt i analysen av data, mens antologikapitlene – og da særlig kapittel 4 – ser på elevenes matematiske modellering. De gangene forskningslitteraturen omtaler denne formen for modellering, handler det ofte om ulike læringsaktiviteter en kan bruke, eller ulike modelleringskompetanser som kan være involvert. Det er også en del studier som diskuterer de ulike delene av modelleringsprosessen. Berget et al. (2024, kapittel 4 i denne boka) skriver noe om kompetanse i tilknytning til modellering, men lite om aktiviteter.

Når antologikapitlene skriver om resonnering og argumentasjon – særlig hos Senneset og Pettersen (2024, kapittel 5 i denne boka) – så er det ofte i forbindelse med hvorvidt argumenter er gyldige eller eventuelt utilstrekkelige eller feil. Elevenes matematiske argumenter er i søkelyset. I den internasjonale forskningslitteraturen diskuteres ofte resonnering innenfor spesifikke matematiske områder («spatial reasoning», «proportional reasoning» og «algebraic reasoning»), og flere studier analyserer elevenes

ferdigheter eller tenkning på dette området. Antologikapitlene ser sjelden på (utvikling av) elevenes ferdigheter eller tenkning knyttet til resonnering og argumentasjon.

I den internasjonale forskningslitteraturen beskrives likeverd ofte med ordet «equity», og dette blir gjerne sett på i sammenheng med hvordan undervisningen kan bidra til å skape muligheter for læring for alle elever. Likeverdig tilgang («access») til utdanning og læringsmuligheter er sentralt. I antologien er det særlig ett kapittel som retter søkelys mot likeverd (Nilsen & Jensen, 2024, kapittel 7 i denne boka), og her nevnes «tilgang» bare én gang – og da i forbindelse med at elever med innvandrerbakgrunn bør ha «samme tilgang til gode skoler som majoritets elever». Fokuset i antologien er i stor grad på systemnivået.

Konklusjon

PISA er en storskala undersøkelse som gir muligheter til å måle norske elevers prestasjoner i matematikk (samt lesing og naturfag), til å sammenligne nivået på norske elever med elever i andre land, og til å studere utviklingen over tid. Det er viktig å ha pålitelige måleredskaper som kan hjelpe oss med dette. Standpunkt karakterer og eksamens karakterer gir ikke de samme mulighetene for å sammenligne elevenes prestasjoner over tid. Nasjonale prøver gir muligens bedre grunnlag for sammenligning innenfor den norske konteksten, men disse er ikke kalibrert opp mot internasjonale mål. I så måte er undersøkelser som PISA og TIMSS viktige. Samtidig har dette kapittelet vist at fokuset i PISA er begrenset. For mange er dette selvsagt, men det er likevel verd å understreke med bakgrunn i den betydningen PISA har fått.

Forskning på elever og matematikk er sammensatt, på samme måte som elevers læring og utvikling knyttet til et fag som matematikk er sammensatt. PISA undersøker noen av faktorene – med særlig vekt på elevenes prestasjoner, deres holdninger til faget og undervisningen. Den internasjonale forskningen på feltet understreker lærerens rolle, og forskningen understreker for eksempel hvordan lærerens faglige kunnskap har betydning for kvaliteten på undervisningen (f.eks. Hill et al., 2012), og for elevenes læring. Kapitlene i denne antologien har lite fokus på lærerne, og den norske PISA-undersøkelsen samler ikke inn lærerdata – i motsetning til for eksempel TIMSS. Selv om et av kapitlene i antologien studerer undervisningskvalitet, er det bare enkelte aspekter ved undervisningsarbeidet

som blir vektlagt – og bare ut fra elevenes syn. De muntlige aspektene ved matematikkundervisningen blir ikke vektlagt i PISA, og selv om resonnering og argumentasjon blir diskutert i et av antologikapitlene, blir dette knyttet til arbeidet med skriftlige oppgaver og ikke i dialog og diskusjoner i et sosialt fellesskap.

PISA-undersøkelsen har et sterkt søkelys på elevenes prestasjoner, og selv om antologikapitlene også skriver en del om læring, blir elevenes læring stort sett definert ut fra testresultatene. Den internasjonale forskningen studerer i større grad elevenes forståelse og tenkning knyttet til faget, og ofte med søkelys på hvordan lærere kan få fram elevenes tenkning gjennom matematiske samtaler (f.eks. Kazemi & Hintz, 2019). Når PISA og antologikapitlene har fokus på andre sider ved læring og undervisning i matematikk, er ikke det nødvendigvis en svakhet. Men det understreker begrensningene ved PISA-undersøkelsen, og at det er andre sentrale perspektiver fra forskningen som også er viktige å ta med inn i diskusjoner om skole og undervisning.

Forfatterbiografi

Reidar Mosvold er professor i matematikdidaktikk ved Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk ved Universitetet i Stavanger. Hans forskningsinteresser er knyttet til ulike aspekter ved undervisningsarbeidet i matematikk, og han har vært involvert i en rekke prosjekter knyttet til etter- og videreutdanning av matematikklærere. Siden 2023 har Mosvold vært leder for forskningsprosjektet «Partners in Practice».

Referanser

- Benoit, K., Watanabe, K., Wang, H., Nulty, P., Obeng, A., Müller, S. & Matsuo, A. (2018). Quanteda: An R package for the quantitative analysis of textual data. *Journal of Open Source Software*, 3(30), 774. <https://doi.org/10.21105/joss.00774>
- Berget, I. L., Løvgren, M. & Pettersen, A. (2024). Å kome i gang med matematisk modellering i klasserommet – kan PISA-oppgåver vise veg frå kaos til system i første del av modelleringsprosessen? I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 75–110). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch4>
- Blei, D. M., Ng, A. Y. & Jordan, M. I. (2003). Latent diriclet allocation. *Journal of Machine Learning Research*, 3, 993–1022.
- Gökçe, S. & Yenmez, A. A. (2023). Ingenuity of scratch programming on reflective thinking towards problem solving and computational thinking. *Education and Information Technologies*, 28(5), 5493–5517. <https://doi.org/10.1007/s10639-022-11385-x>

- Halme, H., Van Hoof, J., Hannula-Sormunen, M. & McMullen, J. (2024). Not realizing that you don't know: Fraction state anxiety is reduced by natural number bias. *British Journal of Educational Psychology*, 94(1), e12637. <https://doi.org/10.1111/bjep.12637>
- Hill, H. C., Umland, K., Litke, E. & Kapitula, L. R. (2012). Teacher quality and quality teaching: Examining the relationship of a teacher assessment to practice. *American Journal of Education*, 118(4), 489–519. <https://doi.org/10.1086/666380>
- Jensen, F. & Nilsen, T. (2024). Lavtpresterende elever i matematikk. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 187–211). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch8>
- Jensen, F., Pettersen, A., Frønes, T. S., Eriksen, A., Løvgren, M. & Narvhus, E. K. (2023). *PISA 2022. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing*. Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/noasp.205>
- Kazemi, E. & Hintz, A. (2019). *Måltrettet samtale – hvordan strukturere og lede gode, matematiske diskusjoner*. Cappelen Damm Akademisk.
- Kunnskapsdepartementet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)*. Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. Hentet fra <https://www.udir.no/lk20/mat01-05>
- Nilsen, T. & Jensen, F. (2024). Like muligheter til matematisk kompetanse? I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 167–185). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch7>
- Nilsen, T. & Pettersen, A. (2024). Matematikkundervisning i norske og nordiske klasserom – klasseledelse, støttende undervisning og faglige utfordringer. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 139–165). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch6>
- Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9–28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- Ozkale, A. & Aprea, C. (2023). Designing mathematical tasks to enhance financial literacy among children in grades 1–8. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54(3), 433–450. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2157342>
- Pettersen, A. (2024). Hvor relevante er PISA-resultatene for matematikkfaget i Norge? – En sammenlikning av matematisk kompetanse i PISA 2022 og LK20. I I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 49–74). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch3>
- Pettersen, A., Kaarstein, H. & Nordtvedt, G. A. (2024). Matematikk i PISA 2003–2022: Måling av endringer i et samfunn som endrer seg. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 21–48). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch2>
- Powell, S. R., Urrutia, V. Y., Berry, K. A. & Barnes, M. A. (2022). The word-problem solving and explanations of students experiencing mathematics difficulty: A comparison based on dual-language status. *Learning Disability Quarterly*, 45(1), 6–18. <https://doi.org/10.1177/0731948720922198>
- Radišić, J. & Pettersen, A. (2024). Succeeding against the odds: Exploring self-beliefs and academic emotions profiles of resilient and non-resilient students. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 213–239). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch9>
- R Core Team. (2023). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing. <https://www.R-project.org/>
- Rodrigues, J., Locke, S., L. Singell, E., & Mirielli, L. G. (2024). Teaching fraction magnitude using the number line. *Intervention in School and Clinic*, 59(3), 165–172. <https://doi.org/10.1177/10534512231156885>

- Roof, H. & Chimuma, L. (2022). The relationship among reading, math and science achievement: Exploring the growth trajectories over three time points. *Educational Research: Theory and Practice*, 33(2), 32–49.
- Senneset, M. K. & Pettersen, A. (2024). Hvordan argumenterer norske elever i matematikk? En analyse av 15-åringers besvarelser på tre oppgaver fra PISA 2022. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 111–138). Cappelen Damm Akademisk. <https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch5>
- Soboleva, E. V., Sabirova, E. G., Babieva, N. S., Sergeeva, M. G. & Torkunova, J. V. (2021). Formation of computational thinking skills using computer games in teaching mathematics. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(10), Artikkel em2012. <https://doi.org/10.29333/ejmste/11177>
- Uyar, S. (2021). Factor structure and measurement invariance of the TIMSS 2015 mathematics attitude questionnaire: Exploratory structural equation modelling approach. *International Journal of Assessment Tools in Education*, 8(4), 855–871. <https://doi.org/10.21449/ijate.796862>
- Yakubova, G., Chen, B. B., Al-Dubayan, M. N. & Gupta, S. (2024). Virtual instruction in teaching mathematics to autistic students: Effects of video modeling, virtual manipulatives, and mathematical games. *Journal of Special Education Technology*, 39(1), 51–66. <https://doi.org/10.1177/01626434231177875>

Mestringsnivåer i matematikk i PISA 2022

Mestringsnivå 6 (669 poeng og over)

Elever på dette mestringsnivået kan typisk

- arbeide med abstrakte problemer
- være kreative og tenke fleksibelt for å komme fram til løsninger
- bruke framgangsmåter som ikke er gitt i oppgaven i ukjente kontekster
- vise en dypere forståelse av et matematisk konsept som en del av en begrunnelse
- knytte sammen ulike informasjonskilder og representasjoner, som kan innebære å bruke simuleringer eller regneark på en effektiv måte
- tenke kritisk
- beherske matematiske symboler, operasjoner og sammenhenger, og bruke dette til å kommunisere egne resonnementer på en tydelig måte
- vurdere om framgangsmåten og løsningen er gyldig i lys av den opprinnelige situasjonen

Mestringsnivå 5 (607–669 poeng)

Elever på dette mestringsnivået kan typisk

- lage og jobbe med modeller for komplekse situasjoner
- gjenkjenne og bestemme begrensninger og antakelser i modeller
- bruke systematiske og godt planlagte problemløsningsstrategier
- kan løse problemer som krever at de trekker inn matematisk kunnskap som ikke er eksplisitt gitt i oppgaven
- reflektere over arbeidet sitt og vurdere matematiske resultater opp mot den opprinnelige konteksten

Mestringsnivå 4 (545–607 poeng)

Elever på dette mestringsnivået kan typisk

- arbeide effektivt med eksplisitte modeller for komplekse, men konkrete situasjoner som kan inneholde to variabler
- bruke avansert algoritmisk tenkning til å sette opp egne modeller og jobbe med disse
- begynne å engasjere seg i kritisk tenkning, for eksempel gjøre en kvalitativ vurdering av rimeligheten av et resultat eller en påstand når det ikke er nok informasjon til å gjøre utregninger
- hente ut og bruke informasjon fra ulike representasjoner, inkludert symbolske eller grafiske, og kople dem til de riktige delene av situasjoner i den virkelige verden
- utforme og kommunisere forklaringer og argumenter basert på deres tolkninger, resonnement og framgangsmåter

Mestringsnivå 3 (482–545 poeng)

Elever på dette mestringsnivået kan typisk

- utarbeide løsningsstrategier, inkludert strategier som krever stegvise beslutningsprosesser eller fleksibel bruk av kjente begreper
- begynne å bruke algoritmisk tenkning som del av løsningsstrategien
- løse oppgaver som krever flere forskjellige rutinemessige utregninger, hvor framgangsmåten ikke er gitt i oppgaven
- bruke romlig visualisering
- avgjøre hvordan en simulering kan brukes til å samle data som er hensiktsmessige for oppgaven
- tolke og bruke ulike representasjoner, basert på ulike informasjonskilder, og gjøre resonnementer basert på dem
- i noen grad håndtere prosent, brøk og desimaltall, og arbeide med proporsjonalitet

Mestringsnivå 2 (420–482 poeng)

Elever på dette mestringsnivået kan typisk

- gjenkjenne situasjoner der de må lage og bruke enkle strategier for å løse problemer, for eksempel gjøre enkle simuleringer som involverer én variabel
- hente ut relevant informasjon fra en eller flere kilder som bruker litt komplekse representasjoner, for eksempel tabeller med to variabler, diagrammer eller todimensjonale representasjoner av tredimensjonale objekter
- vise en grunnleggende forståelse av funksjoner og kan løse problemer som involverer enkle forholdstall
- gjøre bokstavelige tolkninger av resultater

Mestringsnivå 1a (358–420 poeng)

Elever på dette mestringsnivået kan typisk

- svare på spørsmål knyttet til enkle kontekster der all nødvendig informasjon er gitt og spørsmålene er tydelig formulert
- jobbe med to kilder samtidig for å trekke ut relevant informasjon når informasjonen er gitt i enkle formater
- utføre enkle, rutinemessige prosedyrer etter direkte instruksjoner
- utføre handlinger som er åpenbare eller krever minimal kopling av informasjon, hvor handlingene er tydelig beskrevet i oppgaveteksten
- bruke grunnleggende algoritmer, formler, framgangsmåter eller regler for å løse problemer som oftest involverer hele tall

Mestringsnivå 1b (295–358 poeng)

Elever på dette mestringsnivået kan typisk

- svare på spørsmål som inneholder enkle og forståelige kontekster der all nødvendig informasjon er tydelig gitt i én enkel representasjon, for eksempel i en tabell eller en grafisk framstilling
- gjenkjenne informasjon som ikke er relevant for å løse oppgaven
- utføre enkle utregninger med hele tall, hvor framgangsmåten er tydelig gitt i korte og enkle tekster

Mestringsnivå 1c (233–295 poeng)

Elever på dette mestringsnivået kan typisk

- svare på spørsmål knyttet til enkle kontekster hvor all relevant informasjon er gitt i et kjent og enkelt format, for eksempel en liten tabell eller bilde, med korte og enkle tekster
- følge en tydelig instruksjon som beskriver et enkelt steg eller en operasjon

Hovedresultatene fra PISA-undersøkelsen 2022 ble publisert i en kortrapport høsten 2023. Rapporten fikk mye oppmerksomhet, hovedsakelig på grunn av de norske elevenes svake prestasjoner i matematikk. I denne antologien gjør forfatterne videre analyser av matematikkresultatene fra PISA 2022 og tidligere PISA-undersøkelser.

Forfatterne undersøker ulike sider ved elevenes matematiske kompetanse, innholdet i matematikkfaget og matematikkundervisningen. I tillegg undersøker de i hvilken grad norske elever har like muligheter til å lykkes i matematikk, ved å se nærmere på hva som kjennetegner de lavtpresterende elevene, og hvilken betydning sosioøkonomisk status har for elevenes prestasjoner. Resultatene diskuteres i en norsk skolekontekst og blir sett i lys av resultater for de andre nordiske landene, læreplanen LK20, covid-19-pandemien og annen aktuell forskning.

Noen av kapitlene har en didaktisk profil rettet mot lærere, lærerstudenter og skoleledere, mens andre kapitler i større grad er rettet mot forskere, politikere og beslutningstakere.

Andreas Pettersen og Fredrik Jensen ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo (UiO) er redaktører.
Øvrige bidragsyttere fra UiO er Guri A. Nortvedt, Hege Kaarstein, Maria Løvgren, Marte K. Senneset, Trude Nilsen og Jelena Radišić.
I tillegg bidrar Ingeborg Lid Berget ved Høgskulen i Volda og Reidar Mosvold ved Universitetet i Stavanger.